基于 QR 分解的高分辨率快速算法 [1]

李有明

(西安电子科技大学雷达信号处理实验室 西安 710071)

摘　要　以 MUSIC 为代表的一类基于特征分解的高分辨谱估计方法由于具有优越的分辨性能而受到人们的普遍重视。然而，做特征分解运算量大，工程实现较困难，使这类方法应用于实际有困难。利用阵列输出协方差矩阵的特殊结构，本文提出一种基于 QR 分解的高分辨谱估计方法及其改进形式。这种方法在多数情况下性能与 MUSIC 方法相近，而运算量和算法复杂性却大大降低。

关键词　阵列信号处理，方向估计， QR 分解

中图号　TN911.7

1　引　言

近年来，在多元定位问题中，一类基于特征分解的高分辨阵列处理方法引起人们极大的兴趣。比较典型的有 MUSIC[1]， Min-Norm[2] 等方法。大量的理论分析和计算机模拟结果表明 [3]，与传统方法相比，这类方法具有高的方向分辨特性。然而，由于要对数据协方差阵做特征分解，运算量大，实时处理有一定难度。在降低分辨性能不大的情况下，为减少运算量，人们做了不懈努力，并已取得一些进展。如 ESPRIT[4]， RRQR[5,6]，子空间迭代 (SUB)[7] 等方法。 QR 分解是所有能得到正交基的分解中最简单的一种，然而如果直接对协方差矩阵做 QR 分解是很难找出信号或噪声子空间的。利用数据协方差矩阵的特殊结构，本文提出了一种基于 QR 分解的高分辨方法及其改进形式。这种方法在多数情况下性能与 MUSIC 方法相近，其中改进的 QR 方法性能优于 RRQR 方法，而运算量还大大降低。

2　模型和问题

设一阵列由 N 个阵元组成，空间有 M 个信号被阵列所接收，则阵元输出的向量形式为 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{n}(t)$. 若 $\boldsymbol{S}(t)$ 与 $\boldsymbol{n}(t)$ 是均值为零，相互独立的复平稳随机过程，则其相关阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^H(\theta)+\sigma^2\boldsymbol{I}$ 有如下特征分解形式：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}\Lambda\boldsymbol{E}^H=[\boldsymbol{E}_S,\boldsymbol{E}_N]\begin{bmatrix}\Lambda_S & \\ & \sigma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_S^H\\ \boldsymbol{E}_N^H\end{bmatrix}. \tag{1}$$

[1] 1994-08-09 收到， 1995-07-18 定稿
军事电子预研基金资助课题

其中 $E_N = [e_{M+1}, e_{M+2}, \cdots, e_N]$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$.

多源定位问题是：如何从采样数据 $\boldsymbol{X}(t)$ 或其协方差矩阵确定信号来向 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_M$ 。由 (1) 式易得

$$\boldsymbol{E}_N^H \boldsymbol{a}(\theta_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, M, \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{A}(\theta) = [\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{a}(\theta_M)]$ 为导向矢量。MUSIC 方法正是利用上述正交性来估计波达方向的。

3 QR 高分辨算法

3.1 无噪声的情形

首先考虑无噪声的情形，此时协方差矩阵具有形式：$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}^H(\theta)$ 根据上述模型，有如下定理：

定理 1 设信号源部分相关，即 $\boldsymbol{R}_S$ 非奇异。如果对矩阵 $\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{A}(\theta)$ 作如下分块：

$$R_0 = [R_1, R_2], \qquad \boldsymbol{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A_1(\theta) \\ A_2(\theta) \end{bmatrix},$$

此处 $\boldsymbol{A}_1(\theta) \in C^{M\times M}$, $\boldsymbol{A}_2(\theta) \in C^{(N-M)\times M}$, $\boldsymbol{R}_1 \in C^{N\times M}$, $\boldsymbol{R}_2 \in C^{N\times(N-M)}$，那么，有结论：$\mathrm{span}\boldsymbol{A}(\theta) = \mathrm{span}\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{T}_S$. 进一步，如果 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{QH}$ 为 $\boldsymbol{R}_1$ 的 QR 分解，将 $\boldsymbol{Q}$ 作分解，$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2]$，那么 $\boldsymbol{Q}_2^H \boldsymbol{A}(\theta) = 0$. 此处 $\boldsymbol{Q}_1 \in C^{M\times M}$, $\boldsymbol{Q}_2 \in C^{N\times(N-M)}$.

证明 引用上述分块矩阵记号，由 $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}^H(\Theta)$ 知：

$$\boldsymbol{R}_0 = [\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2] = \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}^H(\Theta) = [\boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}_1^H(\Theta), \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}_2^H(\Theta)].$$

由此有 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}_1^H(\Theta)$，基于此易知 $\boldsymbol{R}_1$ 的列向量张成的子空间包含 $\boldsymbol{A}(\Theta)$ 的列向量所张成的子空间。然而 $\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}(\Theta)$ 和 $\boldsymbol{A}_1(\Theta)$ 的秩均为 M，这样 $\boldsymbol{R}_1$ 的秩也为 M 。因而 $\mathrm{span}\boldsymbol{R}_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{A}(\Theta)\} = \boldsymbol{T}_S$. 由于 $\boldsymbol{R}_1 \in C^{N\times M}(N > M)$, 其 QR 分解为

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{H}_1,$$

那么 $\boldsymbol{R}_1^H\boldsymbol{Q}_2 = 0$ 。而 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}_1^H(\Theta)$, 所以 $\boldsymbol{A}_1(\Theta)\boldsymbol{R}_S^H\boldsymbol{A}^H(\Theta)\boldsymbol{Q}_2 = 0$ 。通过上面分析得 $\boldsymbol{A}_1(\Theta)$ 列满秩，$\boldsymbol{R}_S$ 非奇异，因而 $\boldsymbol{Q}_2^H\boldsymbol{A}(\Theta) = 0$. 由此定理得证。

基于上面定理，假如信号数 M 已知，那么有如下算法可以同时得到信号子空间 $\boldsymbol{T}_S$ 与噪声子空间 $\boldsymbol{T}_N$:

算法 I

(1) 将协方差阵分块，$\boldsymbol{R}_0 = [\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2]$，此处，$\boldsymbol{R}_1 \in C^{N\times M}$ ；(2) 对 $\boldsymbol{R}_1$ 作 QR 分解，$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{QH}$ ；(3) 将 $\boldsymbol{Q}$ 分块，$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2]$，那么 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Q}_1\} = \boldsymbol{T}_S$, $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Q}_2\} = \boldsymbol{T}_N$ ，此处 $\boldsymbol{Q}_1 \in C^{N\times M}$, $\boldsymbol{Q}_2 \in C^{N\times(N-M)}$ 。这样，对于无噪声的情况，一次 QR 分解即可得到需要的子空间，因而运算量很小。

3.2 有噪声的情形

有噪声时，协方差矩阵具有如下形式： $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{A}^H(\theta)+\sigma^2\boldsymbol{I}$ 。如果首先使用逆乘幂法估计出噪声功率 σ^2 ，则问题可化为无噪情形。因此我们给出了如下算法用于估计噪声功率 σ^2

算法 II

(1) 设初始向量 $\boldsymbol{v}^{(0)}\neq 0$, $\boldsymbol{v}^{(0)}\in C^{N\times 1}$; (2) 计算 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ ： $\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{(k)}=\boldsymbol{v}^{(k+1)}$; (3) 正交化 $\boldsymbol{u}^{(k)}$; $\boldsymbol{v}^{(k)}=\boldsymbol{u}^{(k)}/\|\boldsymbol{u}^{(k)}\|_2$ ； (4) 若 $\|\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|<\delta$ ，转到执行 (5) ，否则返回 (2); (5) $\sigma^2=\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}^{(k)}\|$ ； (6) $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}-\sigma^2\boldsymbol{I}$ ，然后使用算法 I 计算信号或噪声子空间。

在 QR 算法中，我们在性能上作了一些牺牲，以换取算法的简化，矩阵 $\boldsymbol{R}_1$ 实际上是阵列全数据向量 (N 个元) 与缩短数据向量 (前 M 个元) 的外积，而构成的协方差矩阵会有一定的信息损失。

几点注记：(1) 容易看出，协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_0$ 的任意 M 个列都张成信号子空间。 (2) 多数情况下，如果利用 $\boldsymbol{R}_1$ 的前 $M+1$ 行，新方法仍然有效，此时运算量又一次大大降低，但性能有更多损失。 (3) 如果使用文献 [8] 中提出的逐次校正技术，这类方法的运算量可进一步降低。

3.3 QR 算法的改进形式

从后面的模拟结果可看出，与特征分解方法相比， QR 算法有性能损失。究其原因，主要有两方面：一是构造算法时仅用了协方差矩阵的前 M 列，信息损失造成性能下降；二是有限次快拍使得协方差矩阵的最小特征值分散化，这时用最小特征值作为噪声功率的估计，自然误差较大。针对上面原因，我们做了如下改进。假设阵列输出的协方差阵为 $\boldsymbol{R}$ 。若记 $\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_M,\boldsymbol{r}_{M+1},\cdots,\boldsymbol{r}_N]$，令 $\boldsymbol{R}_1=[\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_M]$, $\boldsymbol{R}_2=[\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_{M+1}]$, $\cdots$, $\boldsymbol{R}_{N-M+1}=[\boldsymbol{r}_{N-M+1},\cdots,\boldsymbol{r}_N]$, 求 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_{N-M+1}$ 的平均，即

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{N-M+1}\sum_{i=1}^{N-M+1}\boldsymbol{R}_i.$$

对矩阵 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 直接作 QR 分解，即

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}.$$

以 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 分别形成信号和噪声子空间。

这样充分利用了协方差矩阵的各列信息，同时使噪声得到平均，从而使 QR 方法的性能得到提高。这样形成的方法记为 IMQR_1 。事实上，若用逆乘幂法估计出噪声功率后形成协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}-\sigma^2\boldsymbol{I}$ ，则基于 $\boldsymbol{R}_0$ 采用上述平均性能会得到进一步提高，这样形成的方法记为 IMQR_2 。计算机模拟结果表明，两种改进方法性能接近特征分解方法。

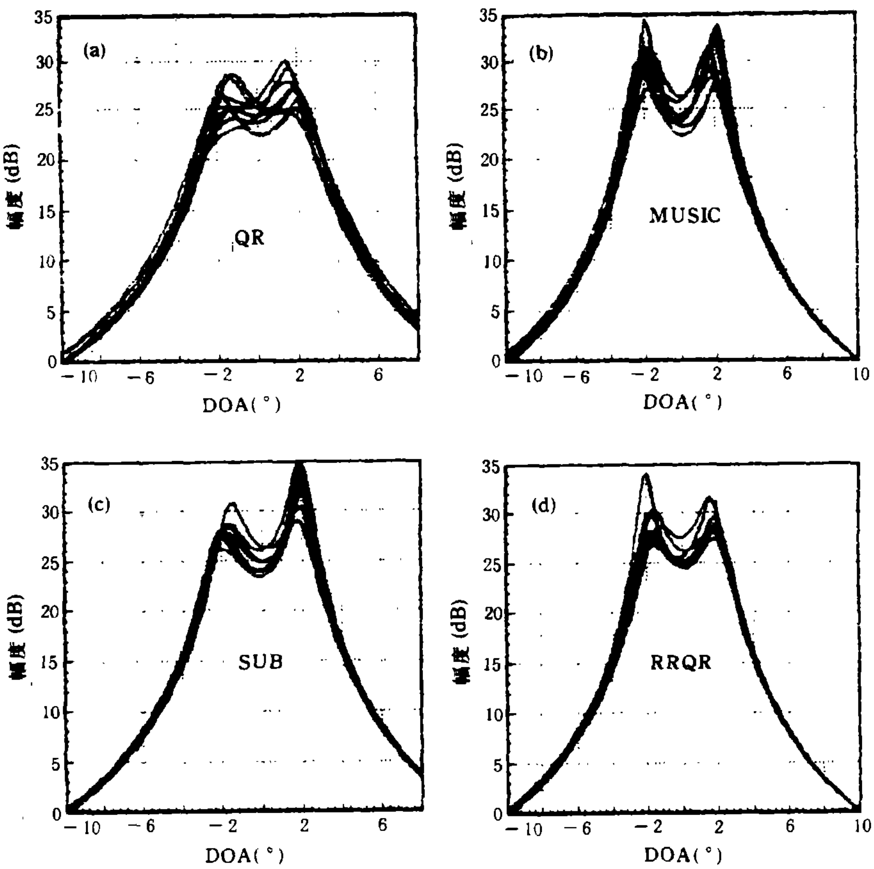

图 1

4 计算机模拟结果

本文的模拟均以等距线阵为例，这仅仅为了模拟简单起见。同时信号源之间相互独立。为了比较本文提出的 QR 算法及其改进型与已有的几种方法如 MUSIC ， RRQR 以及 SUB 等方法的分辨性能，我们做了如下模拟：设一阵列由 $N = 8$ 个阵元组成，空间有两个非相干源信号分别从 $\theta_1 = -2°, \theta_2 = 2°$ 被该阵列接收，快拍数 N_T=100 ，单元信噪比各 10dB 。图 1 为 10 次独立仿真下几种方法的谱图。由图可看出， 10 次仿真 QR ， RRQR 方法都较正确地显示出信号的方位，然而与 MUSIC 和 SUB 方法相比，两种方法有不同程度的性能损失。图 2(a) ，图 2(b) 分别为 QR 的改进型 IMQR1 、 IMQR2 方法在相同条件下 10 次独立仿真谱图。由图可看出，改进后的方法性能明显得到提高，其性能接近特征分解类方法，并且优于 RRQR 方法，而运算量却是最小的。

5 结束语

利用阵列输出协方差矩阵的特殊结构，本文提出一种基于 QR 分解的高分辨谱估计方

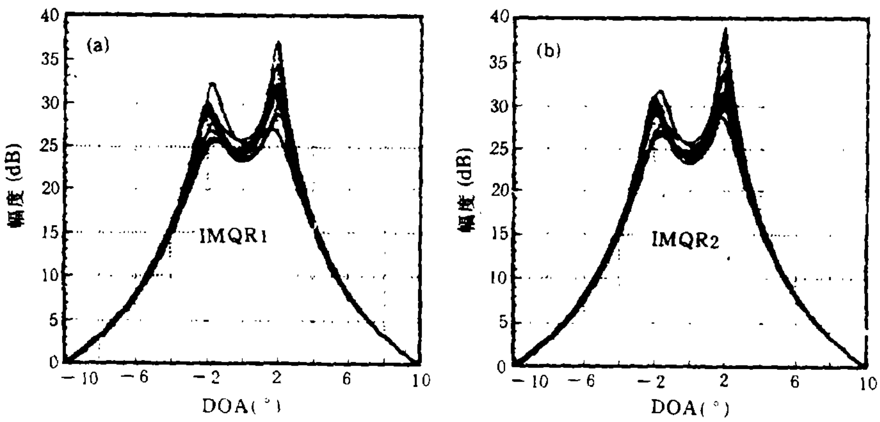

图 2

法。这种方法除了运算量小、易于工程实现外，其性能接近特征分解类方法。

参 考 文 献

[1] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, AP-34(3): 276–280.

[2] Kumareson R, Tufts D W. IEEE Trans. on. AES, 1983, AES-19(1): 154–159.

[3] Kaveh M, Barabell A J. IEEE Trans. on. ASSP, 1986, ASSP-34(2): 331–341.

[4] Roy R H, Kailath T. IEEE Trans. on. ASSP, 1989, ASSP-37(7): 984–995.

[5] Prasad S, Chandna B. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(5): 1224–1228

[6] 李有明，保铮. 电子学报，1994, 22(2): 47–52.

[7] 李有明. 电子科学学刊，1994, 16(6): 641–645.

[8] Gill P E, *et al.* Math. Comp., 1974, 28(2): 505–535.

A FAST HIGH RESOLUTION METHOD BASED ON QR DECOMPOSITION

Li Youming

(Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Many high resolution methods such as MUSIC rely on a signal subspace decomposition, which is conventionally accomplished by an eigendecomposition. However an eigendecomposition is very computationally intensive and difficult to implement. In this paper, by using the special structure of the covariance matrix, a fast high resolution method based on QR decomposition is presented. In most case, the performance of the new method is similar to those of MUSIC method, but the new method has smaller computational complexity and easier for parallel implementation.

Key words Array signal processing, DOA estimation, QR decomposition

李有明： 男，1963 年生，讲师，目前从事阵列信号处理、数值分析等方面研究.