

图像多重分形测度的速降函数投影方法 与图像奇异性分析

肖亮* 吴慧中* 韦志辉***

*(南京理工大学计算机科学与技术系 南京 210094)

** (南京理工大学研究生院 南京 210094)

摘要: 该文给出了一个基于多重分形理论的图像奇异性分析框架。该框架通过定义在图像梯度级上的测度,证明了该测度在速降函数上的投影与尺度之间满足幂指数关系。给出了将图像分解为一系列具有不同奇异性指数和分形维的分形集合的分解算法。最后理论分析并提出了选择速降函数的基本原则,讨论了仅根据分形集合上的导数信息就可以重建该分形层面图像分量的重构算法。实验表明,该文给出的多重分形框架在图像奇异性检测和分析中具有十分重要的意义。

关键词: 边缘重构图像, 边缘检测, 奇异性分析, 多重分形, 速降函数

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)08-1182-05

The Projection Method of Fast Decreasing Functions for Multifractal Measure and Image Singularity Analysis

Xiao Liang* Wu Hui-zhong* Wei Zhi-hui***

*(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

** (Graduate School, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract The framework for image singularity analysis based on multifractal theory is presented in this paper. The measure is defined which gives the local distribution of the gradient of the image. The exponential formalism between the projection of fast decreasing functions of the defined measure and scale is proved. According to the exponential formalism, the paper also presented an algorithm, in which the nature image can be decomposed in a serial fractal sets with different singularity exponent and fractal dimension. Finally, some basic theoretical results of the choice for the fast decreasing functions are proposed. Also an investigation of how to reconstruct the different fractal image components with derivative information contained in the different fractal sets is made. Experiments show that the multifractal formalism has significance in image singularity analysis and detection.

Key words Reconstructing image from edge, Edge detection, Singularity analysis, Multifractal, Fast decreasing functions

1 引言

多重分形方法在图像分析中有广泛应用。1984年 Pentland 对自然景物纹理图像进行了大量的实验,发现有 92% 的纹理在局部区域里能够较好地满足随机布朗运动的统计特性^[1,2]。Vehel 系统总结了图像分析中的多重分形方法,并提出了基于多重分形的图像分割和增强方法^[3-5]。国内刘文予等人提出了离散分形布朗增量随机场的纹理分割方法^[6],吴更石等提出了基于分形维数的纹理图像分割^[7],李军等提出了基于多重分形的图像边缘检测算法^[8],文献^[9]提出了一种多重分形测度的信号奇异形分析方法。2000年,Decoster 等人提出基于小波模极大值算法的多重分形图像分析方法^[10]。但是他们都没有提出从最锐利边缘到纹理各层面奇异性集合重构相应图像的方法,因此无法分析各层面奇异性

性的视觉重要性和相关性。1998~2002年, Turiel 等人发表了一系列的文章^[11-13]。他们通过定义图像中像素点局部邻域内图像对比度的梯度积分作为测度 μ , 然后对近 2000 幅不同纹理特性的自然图像统计分析,验证了测度 μ 的多重分形行为以及测度 μ 与尺度 r 服从幂指数关系。他们提出基于速降函数投影的图像多重分形分解方法,并提出由最奇异流形 (Most Singular Manifold, MSM)(图像边缘及其边缘上的梯度信息)重建整幅图像的算法;但是并没有理论上严格证明测度 μ 与该类速降函数的投影值随尺度参数 r 的衰减性。

本文在 Turiel 等人的成果上展开工作,首先理论上揭示了多重分形测度的紧支撑函数投影定理和速降函数投影定理。然后根据该定理,提出了速降函数选择的基本原则,构建了图像多重分形描述框架,包括:图像多重分形分解与相应分形集合重建分形图像的算法。

2 图像多重分形测度定义

设灰度图像记为 $u(x): \Omega \rightarrow R^1$, x 表示图像的坐标向量, Ω 为图像的定义域。在文献[10]中, 图像多重分形分析是针对图像的对比度 $c(x) = u(x) - \text{mean}(u(x))$ 进行的, 本文直接对图像进行讨论。

定义 1 对图像 $u(x)$, 定义测度 μ 的密度为 $d\mu(x) := |\nabla u|(x)dx$ 。令 A 为图像 $u(x)$ 像素域的任意子集, 赋予子集 A 的正测度 $\mu(A) := \int_A |\nabla u|(x)dx$, 称 $\mu(A)$ 为子集 A 的边缘测度。

定义 2 对任意子集 A , 其 Lebesgue 测度记为 $\lambda(A)$, 边缘测度为 $\mu(A)$, 则子集 A 的边缘密度定义为

$$\rho(A) = \mu(A) / \lambda(A)$$

由以上定义, $\mu(A)$ 表征了子集 A 内图像相当不规则的行为, 边缘密度 $\rho(A)$ 给出了图像 u 的梯度局部分布。记以像素 x_0 为中心、 r 为半径的局部球形邻域为 $B_r(x_0)$, 边缘测度簇 $\{\mu(B_r(x_0))\}_{r>0}$ 与尺度 r 是否存在尺度依赖的对数关系呢? Turiel 等人通过对近 2000 幅不同纹理特性的自然图像统计实验分析, 验证了边缘测度 μ 秉承多重分形行为, 并提出可以假设测度 μ 与尺度 r 服从如下的幂指数关系^[10]:

$$\mu(B_r(x_0)) = \alpha(x_0)r^{d+h(x_0)} + o(r^{d+h(x_0)}) \quad (1)$$

式中 d 为空间维数, 对二维自然图像而言 $d=2$; $\alpha(x_0)$ 为与尺度 r 无关的量; $o(\cdot)$ 为高阶无穷小量。为了理论推导需要, 严格的幂指数方程被松弛为两边夹形式:

$$m(x_0)r^{d+h(x_0)} \leq \mu(B_r(x_0)) \leq M(x_0)r^{d+h(x_0)} \quad (2)$$

其中 $m(x_0)$, $M(x_0)$ 为两个常数。 $h(x)$ 称为 $|\nabla I|(x)$ 的奇异性标度指数, 它具有明显的物理意义: 当 $h < 0$, 说明 $|\nabla u|(x)$ 存在严重的奇异性; 当 $h > 0$, 说明 $|\nabla u|(x)$ 具有比较连续和光滑的行为; h 越大, 说明图像越光滑; 如果将所有具有相同指数 h 的像素组织为一个层面, 则自然图像可以根据奇异性指数, 进行不同层面的分解。定义集合 $F_{h_0} = \{x | h_0 - \Delta h \leq h(x) \leq h_0 + \Delta h\}$ 称 F_{h_0} 为图像的奇异性分量, 构成一个分数维为 $D(h_0)$ 的分形集合。因此由式(1)或者两边夹形式定义的边缘测度 μ 称为多重分形, 函数 $D(h)$ 称为该多重分形的维谱。

奇异性标度指数 $h(x)$ 求取的标准方法是利用速降函数投影方法, 即边缘测度 μ 与速降函数 $\psi(x)$ 作卷积:

$$P_\psi \mu(B_r(x_0)) = \int d\mu(x) \frac{1}{r^d} \psi\left(\frac{x_0 - x}{r}\right) \quad (3)$$

得到多尺度投影序列 $\{P_\psi \mu(x_0, r_i)\}_{i=0,1,2,\dots,n}$ 。如果该投影

和尺度仍然存在幂指数形式:

$$P_\psi \mu(B_r(x_0)) = \beta(x_0)r^{h(x_0)} + o(r^{h(x_0)}) \quad (4)$$

则对方程两边求对数, 建立 log-log 形式的直线方程, 该直线的斜率即为 $h(x)$ 。

3 图像多重分形测度的速降函数投影定理

下面证明: 假设测度 μ 与尺度 r 服从如式(2)的幂指数关系, 当 $\psi(x)$ 为集合的特征函数、紧支撑函数或者速降函数时, 测度 μ 的投影与尺度 r 的幂指数关系依然成立。不失一般性, 下面定理中都假设 $x_0 = 0$ 时 $\mu(B_r(0))$ 的速降函数投影 $P_\psi \mu(B_r(0))$ 与尺度的关系。

定义 3 (集合的特征函数) 定义 $\chi_E(x)$ 为定义于集合 E 上的特征函数, 如果满足 $\chi_E(x) = 1$, 当 $x \in E$; $\chi_E(x) = 0$, 当 $x \notin E$ 。

定义 4 (紧支撑函数) 称连续函数 $\psi(x)$ 为紧支撑函数, 如果 $\exists L > 0$, s.t. $\psi(x) = 0, \forall |x| > L$ 。

定义 5 (速降函数) 称连续函数 $\psi(x)$ 为速降函数, 如果 $\exists L > 0$, s.t. $\psi(Kx) < N(K)\psi(x), \forall K > 1, \forall |x| > L$ 。其中 $N(K)$ 在无穷远处比任何幂次的多项式都下降得快, 满足

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K^n N(K) = 0, \forall n > 0$$

由特征函数的定义及式(3), 不难得到引理 1 和引理 2, 它们分别将在定理 1 和定理 2 中用到。

引理 1 (多重分形的特征函数投影定理 1) 假设边缘测度 $\mu(B_r(0))$ 与尺度 r 满足 $m_0 r^{d+h(0)} \leq \mu(B_r(0)) \leq M_0 r^{d+h(0)}$, 则 $\mu(B_r(0))$ 在特征函数 $\psi(x) = \chi_{B_{\lambda}(0)}$ 上的投影满足

$$m_0 \lambda^{h(0)+d} r^{h(0)} \leq P_\psi \mu(B_r(0)) \leq M_0 \lambda^{h(0)+d} r^{h(0)}$$

引理 2 (多重分形的特征函数投影定理 2) 记集合 $R_0 = B_{\lambda}(0)$, 圆盘 $R_k = B_{k\lambda}(0) - B_{\lambda}(0), k > 1$, 假设边缘测度 $\mu(B_r(0))$ 与尺度 r 满足 $m_0 r^{d+h(0)} \leq \mu(B_r(0)) \leq M_0 r^{d+h(0)}$, 则 $\mu(B_r(0))$ 在特征函数 $\psi(x) = \chi_{R_k}$ 上的投影满足 $P_\psi \mu(B_r(0)) \leq M r^{h(0)}$, 其中 $M = (k\lambda)^{h_0+d} M_0 - \lambda^{h_0+d} m_0$ 。

定理 1 (多重分形的紧支撑函数投影定理) 假设边缘测度 $\mu(B_r(0))$ 与尺度 r 满足 $m_0 r^{d+h(0)} \leq \mu(B_r(0)) \leq M_0 r^{d+h(0)}$, 则 $\mu(B_r(0))$ 在紧支撑函数 $\psi(x)$ 上的投影满足

$$mr^{h(0)} \leq P_\psi \mu(B_r(0)) \leq Mr^{h(0)}$$

证明 由紧支撑函数 $\psi(x)$ 的定义, $\exists L > 0$, 使得 $\psi(x) \neq 0, \forall x \in B_L(0)$, 又由 $\psi(x)$ 在圆盘 $B_L(0)$ 内连续, 则存在最小、最大值, 记为 m_1, M_1 , 使得 $m_1 \chi_{B_L(0)} \leq \psi(x) \leq M_1 \chi_{B_L(0)}$, 利用 $m_0 r^{d+h(0)} \leq \mu(B_r(0)) \leq M_0 r^{d+h(0)}$ 及引理 1, 可

得

$$m_0 m_1 L^{h(0)+d} r^{h(0)} \leq m_1 P_{\chi_{B_L(0)}} \mu(B_r(0)) \leq P_\psi \mu(B_r(0))$$

$$P_\psi \mu(B_r(0)) \leq M_1 P_{\chi_{B_L(0)}} \mu(B_r(0)) \leq M_0 M_1 L^{h(0)+d} r^{h(0)}$$

记 $m = m_0 m_1 L^{h(0)+d}$, $M = M_0 M_1 L^{h(0)+d}$, 得到

$$m r^{h(0)} \leq P_\psi \mu(B_r(0)) \leq M r^{h(0)}$$

定理 2 (多重分形的速降函数投影定理) 假设边缘测度 $\mu(B_r(0))$ 与尺度 r 满足

$$m_0 r^{d+h(0)} \leq \mu(B_r(0)) \leq M_0 r^{d+h(0)}$$

则 $\mu(B_r(0))$ 在定义 5 所定义的速降函数 $\psi(x)$ 上的投影满足 $m r^{h(0)} \leq P_\psi \mu(B_r(0)) \leq M r^{h(0)}$ 。

证明 首先证明不等式的左边: 根据定义 5, $\exists L > 0$, 使得 $\psi(x)$ 在圆盘 $B_L(0)$ 之外速降。由 $\psi(x)$ 在圆盘 $B_L(0)$ 内连续, 可记 $B_L(0)$ 内的最小值为 m_1 , $\psi(x) \geq m_1 \chi_{B_L(0)}$, 则同定理 1 证明过程可知 $P_\psi \mu(B_r(0)) \geq m_0 m_1 L^{h(0)+d} r^{h(0)}$ 。然后证明不等式的右边, 分 3 步进行。

步骤 1 不妨设 $r = \tau^{-j}$, j 为正整数, 则可构造圆环簇 $R_i = B_{\tau^{-i}\lambda}(0) - B_{\tau^{-(i+1)}\lambda}(0)$, $R_0 = B_\lambda(0)$, 整数 $i \geq 1$, 实数 $\tau > 1$ 。令速降函数 $\psi(x)$ 在圆环 R_i 上的最大值和最小值分别为 \bar{M}_i , \bar{m}_i 。构造关于 $\psi(x)$ 的上包络函数 $\Phi^+(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{M}_i \chi_{R_i}(x)$, 显然 $\Phi^+(x) \geq \psi(x)$, 则 $P_\psi \mu(B_r(0)) \leq P_{\Phi^+} \mu(B_r(0))$ 。

步骤 2 下面证明

$$P_{\Phi^+} \mu(B_r(0)) \leq \lambda^{h(0)+d} (M_0 - \tau^{-(h(0)+d)} m_0) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i \right] r^{h(0)}$$

根据速降函数投影的定义 $P_{\Phi^+} \mu(B_r(0)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{M}_i P_{\chi_{R_i}(x)} \mu(B_r(0))$,

则利用引理 2, 可得

$$P_{\Phi^+} \mu(B_r(0)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{M}_i P_{\chi_{R_i}(x)} \mu(B_r(0))$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left((\tau^i \lambda)^{h(0)+d} M_0 - (\tau^{i-1} \lambda)^{h(0)+d} m_0 \right) \bar{M}_i \right) r^{h(0)}$$

$$= \left(\lambda^{h(0)+d} (M_0 - \tau^{-(h(0)+d)} m_0) \sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i \right) r^{h(0)}$$

步骤 3 证明级数 $\sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i$ 收敛。由速降函数 $\psi(x)$ 在圆盘 $|x| > L$ 之外的速降性, 令 $i_0 = \left\lceil \log_\tau \left(\frac{L}{\lambda} \right) \right\rceil$, 则对 $i' > i > i_0$, 有 $\bar{M}_{i'} < N(\tau^{i'-i}) \bar{M}_i$ 。由于对 $i' > i > i_0$, $\bar{M}_{i'} < N(\tau^{i'-i}) \bar{M}_i$, 则级数 $\left\{ \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i \right\}_{i=0,1,2,\dots}$ 收敛, 因此 $\sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i = C < \infty$ 。

综合步骤 1, 2, 3, 可得

$$P_{\Phi^+} \mu(B_r(0)) \leq C \cdot \lambda^{h(0)+d} (M_0 - \tau^{-(h(0)+d)} m_0) r^{h(0)}$$

证毕

4 图像多重分形结构的分解与重构算法

4.1 速降函数的选择

设 $H = [h_{\min}, h_{\max}]$ 为奇异性标度指数 h 的支集, 其中 h_{\min} , h_{\max} 分别为指标的下限和上限。理论上定义 5 中的速降函数既可以选择容许小波也可以选择非容许小波。在实际图像多重分解过程中, 可选择更为宽松的速降函数。根据 Turiel 等人的统计结果, 图像的奇异性标度指数 h 一般限制在 $H = [-1, 2]^{[10, 11]}$ 。该结论可以作为图像的先验知识以确定具体的速降函数。

根据定理 2 的证明过程, 测度 $\mu(B_r(0))$ 对速降函数 $\psi(x)$ 上的投影上界为

$$M = \lambda^{h(0)+d} (M_0 - \tau^{-(h(0)+d)} m_0) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i \right] r^{h(0)}$$

为了满足多重分形两边夹的形式, 只需使正项级数 $\sum_{i=0}^{+\infty} \tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i$ 收敛即可, 由达朗贝尔(D'Alembert)判别法, 其充分条件 $\tau^{(h(0)+d)i} \bar{M}_i / (\tau^{(h(0)+d)(i-1)} \bar{M}_{i-1}) < 1$ 。显然 $\bar{M}_i \propto \tau^{-(h_{\max}+d+\epsilon)i}$ ($\forall \epsilon > 0$) 满足上述条件。再可知满足 $|\psi(x)| \propto |x|^{-N}$, $\forall N > h_{\max} + d$ 的速降函数能够提取 $H = [h_{\min}, h_{\max}]$ 中的任何奇异性。对于满足 $|\psi(x)| \propto |x|^{-N_0}$ 的速降函数, 它能提取的奇异性范围为 $h_\psi = h$, 当 $h < N_0 - d$; $h_\psi = N_0 - d$, 当 $h > N_0 - d$ 。

由于本文仅需获取图像的奇异性结构, 无需利用小波本身重构原始信号, 因此可以选择非容许小波。针对不同的奇异性检测和提取任务, 可以灵活选择不同的速降函数。例如, 如果希望进行边缘检测, 则可选择检测奇异性范围较窄、空间定位能力强的速降函数; 如果希望提取不同层次的奇异性, 则应该选取衰减更快的函数。表 1 列出了几个典型小波函数。

4.2 分解算法

图像多重分形分解的计算步骤如下:

4.2.1 奇异性指数 h 的计算 选择合适的小波函数 ψ , 定义 $B_r(x_0)$ 为当前感兴趣点 x_0 的局部邻域, 则利用速降函数投

表 1 几个小波函数

小波名称	函数表达式	所属种类	无穷远处衰减性	空间定位能力	奇异性检测范围
Lorentz 小波	$\psi_1(x) = \frac{1}{1+r^2}$	非容许正小波	较慢	很强	$h \in [-1, 0]$
Lorentz 小波的一阶径向导数形成的小波	$\psi_2(x) = \frac{-2r}{(1+r^2)^2}$	非容许负小波	收敛较快	适中	$h \in [-1, 2]$
高斯小波	$\psi_3(x) = e^{-\frac{1}{2}r^2}$	非容许正小波	快速衰减	很差	任何奇异性
墨西哥草帽小波	$\psi_4(x) = (r^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}r^2}$	容许小波	快速衰减	理论上很强, 实际较差	任何奇异性

影的近似公式： $P_\psi \mu(B_r(x_0)) \approx \beta(x_0)r^{h(x_0)}$ ，奇异性指数 $h(x_0)$ 可通过线性回归方法将 $\log(P_\psi \mu(B_r(x_0)))$ 与 $\log r$ 的斜率估计出来，尺度 r 与计算的定位有关。如果使用小邻域 ($r \leq 3$)，则 $h(x_0)$ 反映了局部的奇异性；如果使用大邻域，则 $h(x_0)$ 反映了更广泛的奇异性。本文选取的邻域 $B_r(x_0)$ 定义为 $\{r_i\} = \{1, \sqrt{2}, 2, 3, 2\sqrt{2}\}$ 。

4.2.2 奇异流形的组织 (a) 首先估计最奇异流形(MSM)和 EMSM(Excluded MSM) 奇异性指数 h 计算出后，对某个 h 图像中像素出现的概率构成一个以支集 $H = [h_{\min}, h_{\max}]$ 为横坐标,相应概率为纵坐标的直方图(称为奇异性指数的 PDF)。设该 PDF 为 $\text{Pr}: h \in H \rightarrow \text{Pr}(h)$ ，定义 h_∞ 为该 PDF 的分布函数在 1% 和 5% 处的分位数平均值，则集合 $F_{\text{MSM}} = \{x | h_\infty - \Delta h \leq h(x) \leq h_\infty + \Delta h\}$ 称为 MSM，对应于图像的边缘轮廓。而 EMSM 定义为 $F_{\text{EMSM}} = \{x | h_{\min} \leq h(x) < h_\infty\}$ ，它对应于图像中最锐利的边缘。

(b) 然后组织 n 阶 MSM h_∞ 计算完后，将由(4.2.1 节) 计算出的 h 按照近邻原则，以 Δh 为间隔，进行组合，定义 n 阶 MSM 为如下分形集合： $F_{n\text{-MSM}} = \{x | h_\infty + (2n-3)\Delta h \leq h(x) \leq h_\infty + (2n-1)\Delta h\}$ 。

4.2.3 多重分形维谱的估计 设分形集合 F_h 的分数维为 $D(h)$ ，则映射 $h \rightarrow D(h)$ 称为多重分形维谱。根据文献 [12,13]， $D(h)$ 可由下式估算：

$$D(h) = D_\infty + \frac{h - h_\infty}{\gamma} \left[1 - \ln \left(\frac{h - h_\infty}{\gamma \cdot (d - D_\infty)} \right) \right] \quad (5)$$

式中 $\gamma = -\ln[1 + h_\infty / (d - D_\infty)]$ ， $D_\infty = D(h_\infty)$ 。可见 $D(h)$ 的估计公式中存在两个自由参数： h_∞ 和 D_∞ 。其中 h_∞ 由 2(a) 中的方法进行估计，而 D_∞ 因为是图像轮廓的维数，可设 $D_\infty \approx 1$ 。

4.3 由奇异流形重构单分形图像

记 $\delta_{F_h}(x)$ 为某个分形集合 F_h 的特征函数(即分形集合上

为 1，其它地方为 0)， $v_{F_h}(x)$ 为分形集合 F_h 的梯度场 $v_{F_h}(x) = \nabla u(x) \delta_{F_h}(x)$ 。文献[13]中通过确定性传播函数的研究，表明由 $v_{F_h}(x)$ 能够重构相应的分形分量图像 $u_{F_h}(x) = g * v_{F_h}(x)$ ，其中 $*$ 为卷积算子， g 为重构核。在 Fourier 域中定义 $g = if / |f|^2$ (令 f 为频域的空间频率变量 $f = (f_1, f_2)$ ， i 为虚数单位)，可以得到 Fourier 域的重构公式 $u_{F_h}(f) = if \cdot v_{F_h}(f) / |f|^2$ 。

重构算法

步骤 1 计算图像的梯度场 ∇u ，及其分形集合 F_h 相应的向量场 $v_{F_h}(x)$ ；

步骤 2 对二维向量场 $v_{F_h}(x)$ 作 Fourier 变换，得到二维复数向量场 $v_{F_h}(f)$ ；

步骤 3 根据重构公式，先与频率向量 f 作内积，然后与 i 相乘，再与 f 的模平方相除得到 $u_{F_h}(f)$ ；

步骤 4 对 $u_{F_h}(f)$ 作逆 Fourier 变换，得到相应分形集合 F_h 的重构图像。

5 实验结果与结论

为了验证本文中图像多重分形奇异性结构检测与描述框架的有效性和重要意义，下面以 Lenna 图像(图 1)为例给出一个多重分形分解与重构的算例。

实验 1 多重分形分解实验

实验中 $\psi_1(x) = 1/(1+r^2)$ 作为速降函数， Δh 固定为 0.15，经计算 h_∞ 为 -0.45， $D(-0.45) = 1$ 。图 2 为以奇异性指数为横坐标、分形维数构成纵坐标的曲线图。由图 2 可知对二维图像而言，分形维数介于 [0, 2] 之间。图 3 分别为多重分形分解算法检测到的各层面奇异性像素的集合：EMSM，1 阶 MSM 和 2 阶 MSM，图中黑色像素点为相应奇异性像素。其中：



图1 Lena 图像

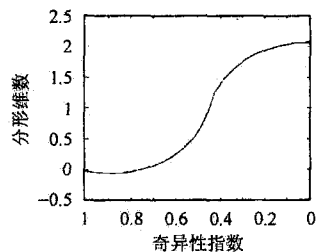


图2 奇异性指数与分形维数

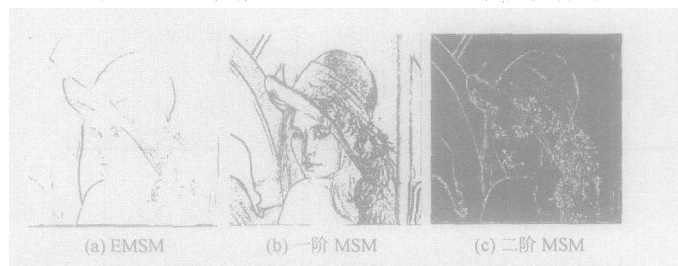


图3 实验1结果图:多重分形分解的各奇异性层面检测结果

图3(a)为对应奇异性指数为 $[-1, -0.3]$ 的EMSM,它对应图像中最锐利的边缘;图3(b)为对应奇异性指数为 $[-0.6, -0.3]$ 的MSM,可见本文多重分形分解可以得到很好的边缘检测效果;图3(c)为对应奇异性指数为 -0.15 ± 0.15 的2阶MSM, $D(-0.15)=1.84$,该分形集合基本蕴含了图像中大部分的纹理信息。

实验2 多重分形重构实验

分形重构实验中,利用分形分解得到的3个层面的分形集合,分别计算集合上像素灰度的梯度,利用重构算法分别得到对应于EMSM、MSM和2阶MSM的单分形图像。为了说明图像中各个奇异性层面的视觉重要性,以重构图像与原始图像的峰值信噪比PSNR进行客观评价指标。图4(a)对应于EMSM重建的图像,PSNR为16.55dB;图4(b)对应于MSM重建的图像,PSNR为24.64dB;图4(c)为对应于2阶MSM重建的图像,PSNR为17.84dB。实验2表明,MSM对应于图像中视觉最重要的部分。

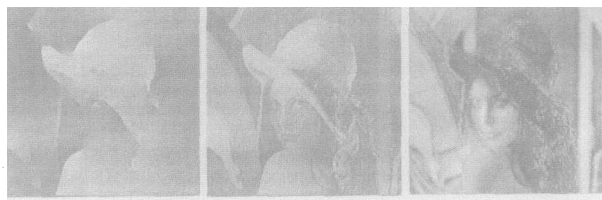


图4 实验2结果图:多重分形分解的各奇异性层面重构结果

本文给出的基于速降函数投影的图像多重分形分解为图像奇异性分析提供了一条十分有效的途径,必将在边缘检测和纹理特征分析发挥重要作用。同时奇异流形重构图像的

研究表明,图像的最奇异流形几乎蕴含了图像中绝大部分视觉信息,因此多重分形方法与基于轮廓的图像编码相结合是今后有待研究的重要课题。

参考文献

- [1] Pentland A. Fractal-based description of nature scene. *IEEE Trans. on PAMI*, 1984, 6(6): 661 - 674.
- [2] Crownnoer R M. Fractal features in image analysis. Technical report, Missouri- Columbia Univ., 1984.
- [3] Vehel L J. Multifractal segmentation. *Fractals*, 1994, 2(3): 371 - 377.
- [4] Vehel L J. Introduction to the multifractal analysis of images. *Fractal Image Encoding and Analysis*, Fisher Y Ed. Springer Verlag, 1998, Chapter 17: 331 - 401.
- [5] Guiheneuf B, Vehel L J. Image enhancement through multifractal analysis. Technical report, INRIA, 1996.
- [6] 刘文予, 朱耀庭, 朱光喜. 基于DFBIR场图像模型的纹理分割. *模式识别与人工智能*, 1992, 5(2): 116 - 122.
- [7] 李军, 庄镇泉, 高消维, 李海鹰. 基于多重分形的图像边缘检测算法. *电路与系统学报*, 2001, 6(3): 16 - 19.
- [8] 吴更石, 梁德群, 田原. 基于分形维数的纹理图像分析. *计算机学报*, 1999, 22(10): 1109 - 1113.
- [9] 乔应军. 信号奇异性分析. *电子与信息学报*, 2001, 23(11): 1231 - 1235.
- [10] Decoster N, Roux S G, Arneodo A. A wavelet-based method for multifractal image analysis. II. Application to synthetic multifractal rough surface. *European Physical Journal B*, 2000, 3(15): 739 - 704.
- [11] Turiel A, Parga N, et al.. The multi-fractal structure of contrast changes in natural images: from sharp edges to texture. *Neural Computation*, 2000, 12(4): 763 - 793.
- [12] Turiel A, Mato G, et al.. The self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows. *Physical Review Letters*, 1998, 80(5): 1098 - 1101.
- [13] Turiel A, Pozo A D. Reconstructing images from their most singular fractal manifold. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, 11(4): 345 - 350.

肖亮: 男, 1976年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为图像建模、图像处理、数字水印技术等方面的研究。

吴慧中: 女, 1942年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为虚拟现实与系统仿真、计算机图形图像理论。

韦志辉: 男, 1963年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为小波分析、数字信号处理。