

基于 FIR 滤波器的信号分解和合成技术¹

周建鹏 杨义先

(北京邮电大学信息工程系 145 信箱 北京 100088)

摘要 本文对基于 FIR 滤波器的信号分解和合成技术进行了研究, 特别对其中的关键环节数据的扩展方法进行了深入分析, 指出了传统方法中存在的问题, 并在传统数据对称扩展方法的基础上给出了新方法.

关键词 子带分解, 信号合成, 数据扩展

中图分类号 TN911.72, TN713

1 引言

利用小波变换对信号进行子带分解压缩编码, 不仅能够获得比 DCT 更高的压缩比, 而且还能够消除方块效应^[1], 因此得到了广泛应用. 对信号进行小波压缩编码包括两部分^[2]: 由树结构两段滤波器组组成的信号分解和合成系统和压缩编码系统. 每个部分的性能对整个系统来说都相当重要, 都影响整个系统的性能, 然而信号的分解和合成系统又是整个系统的基础, 因此研究信号的分解和合成技术对获得高压缩比和高质量的信号来说非常重要. 本文重点是对信号分解和合成系统中的关键技术定长信号的扩展方法进行分析和研究.

当定长信号 $x[n]$ 与 FIR 滤波器 $h[n]$ 相卷积时, 信号尺寸将变长, 这显然不利于信号压缩的需要, 因此解决这个问题必须寻找一种方法使卷积后的数据能用和 $x[n]$ 具有相同长度的数据通过扩展得到. 现在普遍认为有三种方法: 周期扩展方法^[2], 对称扩展方法^[2,3], DFT 方法^[4]. 实质上, DFT 方法也是周期扩展方法中的一种. 对称扩展方法是人们研究较多的一种, 因为它保留了信号的连续性, 但传统的对称扩展方法由于数据保留扩展不当带来信号的损失^[3], 文献^[5]把传统的信号对称扩展方法拓展到六种不同的信号对称, 但没有改变信号保留扩展方法, 因此同样带来信号损失. 本文对传统的对称扩展方法进行分析, 提出新的信号保留方法以获得信号无失重建.

2 信号分解和合成系统

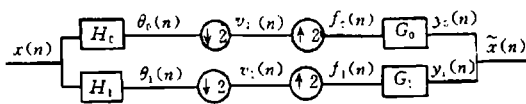


图 1

对信号 $x[n]$ 进行一级分解和合成系统见图 1. 其中 $H_0(z), G_0(z)$ 为低通滤波器, $H_1(z), G_1(z)$ 为高通滤波器. 为了信号完全重构, 我们一般选择 QMF 滤波器组, 即

¹ 1996-07-25 收到, 1997-03-17 定稿

国家杰出青年基金和国家教委跨世纪优秀人才专项基金资助课题

$$\left. \begin{aligned} h_1(n) &= (-1)^n h_0(L-n-1), \\ g_0(n) &= (-1)^n h_1(n), \\ g_1(n) &= (-1)^{n+1} h_0(n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 L 为滤波器的长度。

定理 1 按 (1) 式选择滤波器组, 如果 $h_0(n)$ 为正交小波 FIR 滤波器, 那么系统完全重构, 信号每级分解和合成的系统延迟为 $L-1$, 其中 L 为滤波器的长度, 且为偶数。

证明 由图 1 可得

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= (1/2)[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) + (1/2)[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z) \\ &= T(z)X(z) + S(z)X(-z), \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T(z) &= (1/2)[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)], \\ S(z) &= (1/2)[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为了重构 $x[n]$, 即 $\hat{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的延迟, 对所有的 z 必须有

$$\begin{cases} S(z) = 0, \\ T(z) = z^{-n_0}, \end{cases} \quad \text{其中 } n_0 \text{ 是延迟系数.}$$

由 (1) 式可得

$$\left. \begin{aligned} H_1(z) &= (-z)^{-L+1} H_0(-z^{-1}), \\ G_0(z) &= H_1(-z), \\ G_1(z) &= -H_0(-z). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (3) 式得

$$\begin{aligned} S(z) &= 0, \\ T(z) &= \frac{1}{2} z^{-L+1} [H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})]. \end{aligned}$$

又因为 $h_0(n)$ 为正交滤波器, 所以 $H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2$, 则 $T(z) = z^{-L+1}$ 所以系统完全重构, 且系统延迟为 $L-1$. 证毕

3 信号扩展方法

为了信号的压缩和重构, 信号的分解和合成系统应满足以下两个特性: (1) 信号的重构应是无损失的. (2) 信号分解过程不应增加数据量. 我们从图 1 可知, 信号分解和合成的主要运算是卷积, 由于卷积算法的存在, 如果直接采用线性卷积方法, 那么在保留和原信号相同尺寸数据量的情况下, 合成过程必然带来信号的损失, 解决这一问题的方法是将原始信号扩展成周期信号, 用周期卷积代替线性卷积, 利用周期信号和定长信号的卷积为周期信号这一原则, 在

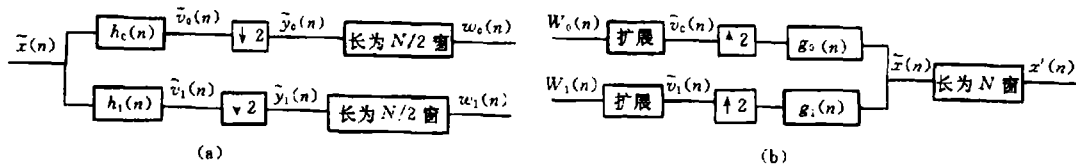


图 2

分解过程中保留数据, 在合成过程中再根据信号的周期性进行扩展, 然后进行周期卷积^[2,3]。现在对两种比较流行的数据扩展方法进行分析。

(1) 周期扩展方法 设 $x[n]$ 的长度为 N , 则 $x[n]$ 被周期扩展为 $\tilde{x}(n) = x(n \bmod N)$ 。其整个两段分解和合成系统如图 2。根据周期信号卷积的定理, $\tilde{v}_0(n)$ 和 $\tilde{v}_1(n)$ 的周期都是 N , 经下采样, 取周期内 $N/2$ 个数据 $w_0(n)$ 和 $w_1(n)$; 在合成过程中, $w_0(n)$ 和 $w_1(n)$ 再进行周期扩展成 $\tilde{y}_0(n)$ 和 $\tilde{y}_1(n)$, 经上采样, 周期卷积后, 合成 $\tilde{x}'(n)$, 其周期为 N , 再用长度为 N 的窗口截取, 即可得 $x'(n)$ 。

(2) 对称扩展方法 设 $x[n]$ 的长度为 N , 则 $x[n]$ 被周期扩展为 $2N$ 的周期序列 $\tilde{x}(n)$, $\tilde{x}(n) = x_{se}(n \bmod 2N)$, 其中

$$x_{se}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ x(2N-n-1), & N \leq n \leq 2N-1. \end{cases} \quad (5)$$

在图 2 中, 虽然 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 $2N$, 但是由于它的对称性, 它由长度为 N 的 $x[n]$ 序列唯一决定, 当滤波器具有线性相位时, $\tilde{v}_0(n)$ 和 $\tilde{v}_1(n)$ 具有对称结构, 传统的方法是保留 $\tilde{v}_0(n)$ 和 $\tilde{v}_1(n)$ 的周期内前 N 个数据, 经过下采样, 可获得 $w_0(n)$ 和 $w_1(n)$, 数据长度为 $N/2$, 在合成过程中, 对 $w_0(n)$ 和 $w_1(n)$ 进行对称周期扩展, 上采样, 再经过周期卷积, 获重建信号 $x'(n)$ 。

使用周期扩展方法, 当信号 $x[n]$ 的尾部 $x(N-1)$ 和头部 $x(0)$ 的幅度值相差很大时, 会使信号边缘衰退, 这点已得到实验证明^[2], 其主要原因是由于边缘信号的不连续性, 使信号边缘能量变得模糊。对称扩展方法就是试图克服边缘信号不连续性这一缺陷, 以获得系统性能的提高。当滤波器长度较短、信号 $x[n]$ 的后部分幅度变化不明显时, 此方法得到了系统性能的明显改善。但是当滤波器尺寸较长, 信号 $x[n]$ 的后部分幅度变化较大时, 效果反而更糟。因此, 文献^[3]在经过实验后建议使用边缘值重复的方法, 以保证边缘值的连续性。本文将对对称扩展方法的全过程进行详细分析。

设线性相位滤波器 $h(n)$ 是对称的, 长度为 L , 则 $h(n) = h(L-n-1)$; $x[n]$ 的长度为 N , 则 $x[n]$ 被周期扩展为 $2N$ 的周期序列, 见 (5) 式, 即 $\cdots x(N-3)x(N-2)x(N-1)x(N)x(N+1)x(N+2)\cdots$, 其中 $x(N) = x(N-1)$, $x(N+1) = x(N-2), \cdots$, 则

$$x(N+n) = x(N-n-1), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (6)$$

令 $y(n) = h(n) * x(n)$, 则

$$y(n) = \sum_{t=0}^{L-1} h(t)x(n-t) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)x(n-t) + \sum_{t=L/2}^{L-1} h(t)x(n-t). \quad (7)$$

又因为

$$\sum_{t=L/2}^{L-1} h(t)x(n-t) = \sum_{t=L/2-1}^0 h(L-t-1)x(n-L+t+1) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)x(n-L+t+1). \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式得

$$y(n) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(n-L+t+1) + x(n-t)]. \quad (9)$$

于是

$$\begin{aligned} y(N+L/2-1-n) &= \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N+L/2-1-n-L+t+1) + x(N+L/2-n-1-t)] \\ &= \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N-n-L/2+t) + x(N+L/2-n-1-t)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y(N+L/2-1+n) &= \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N+L/2-1+n-L+t+1) + x(N+L/2-1+n-t)] \\ &= \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N-L/2+t+n) + x(N+L/2+n-t-1)]. \end{aligned} \quad (11)$$

又因为 $x(N+n) = x(N-n-1)$, 所以

$$\begin{aligned} x(N-L/2+t+n) &= x[N+(n-L/2+t)] = x[N-(n-L/2+t)-1] \\ &= x(N+L/2-t-n-1), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x(N+L/2+n-t-1) &= x[N+(L/2+n-t-1)] = x[N-(n+L/2-t-1)-1] \\ &= x(N-L/2-n+t), \end{aligned} \quad (13)$$

将 (12)、(13) 式代入 (10)、(11) 式得

$$y(N+L/2-1-n) = y(N+L/2-1+n), \quad (14)$$

即 $y(n)$ 关于 $y(N+L/2-1)$ 对称。

当 $h(n)$ 反对称时, 即 $h(n) = -h(L-n-1)$, 同理有

$$y(n) = \sum_{t=0}^{L-1} h(t)x(n-t) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)x(n-t) + \sum_{t=L/2}^{L-1} h(t)x(n-t).$$

又因为 $\sum_{t=L/2}^{L-1} h(t)x(n-t) = \sum_{t=L/2-1}^0 h(L-t-1)x(n-L+t+1) = -\sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)x(n-L+t+1)$, 所以 $y(n) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(n-t) - x(n-L+t+1)]$, 则

$$y(N + L/2 - 1 - n) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N + L/2 - n - 1 - t) - x(N - n - L/2 + t)],$$

$$y(N + L/2 - 1 + n) = \sum_{t=0}^{L/2-1} h(t)[x(N + L/2 + n - t - 1) - x(N - L/2 + t + n)].$$

根据 (12)、(13) 式得

$$y(N + L/2 - 1 - n) = -y(N + L/2 - 1 + n), \quad (15)$$

因此 $y(n)$ 关于 $y(N + L/2 - 1)$ 反对称。于是有以下定理:

定理 2 线性相位滤波器 $h(n)$ 与对称周期信号 $x(n)$ 进行周期卷积, 如果 $h(n)$ 是对称的, 卷积结果是对称的; 如果 $h(n)$ 是反对称的, 卷积结果是反对称的; 且都以 $y(N + L/2 - 1 + 2N * k)$ 为对称轴, 其中 $x(n)$ 的周期为 $2N$, L 为 $h(n)$ 的长度, $k \in z$ 。

由定理 2 可知, 在对称扩展方法中, 在信号分解阶段利用传统数据保留方法必然带来尾部信号损失, 在合成阶段无法正确利用扩展方法恢复原有数据, 因此当信号 $x(n)$ 的尾部幅度变化较大时, 必然带来大损失。

现在进行研究在不扩大数据量的情况下, 如何在分解过程中合理保留数据, 经过下采样和上采样后在合成过程中能够无损失地扩展成原始数据, 使合成信号无失重构原信号。

根据周期卷积的性质, 有 $y(2N + n) = y(n)$, 又因为 $y(2N + n) = y[N + L/2 - 1 + (N - L/2 + n + 1)]$, 所以当 $h(n)$ 对称时, $y(2N + n) = y(N + L/2 - 1 - N + L/2 - n - 1) = y(L - n - 2)$, 则

$$y(n) = y(L - n - 2), \quad (16)$$

因此序列 $y(n)$, $0 \leq n \leq L - 2$ 关于 $y(L/2 - 1)$ 对称。当 $h(n)$ 反对称时, $y(2N + n) = -y(N + L/2 - 1 - N + L/2 - n - 1) = -y(L - n - 2)$, 则

$$y(n) = -y(L - n - 2), \quad (17)$$

因此序列 $y(n)$, $0 \leq n \leq L - 2$, 对于 $y(L/2 - 1)$ 反对称。

通过以上的讨论, 我们为了无失重构信号, 在分解过程中采用以下的数据保留方法: 保留 $y(L/2)$ $y(L/2 + 1)$ \cdots $y(L/2 + N - 1)$ N 个数据。经过下采样有 $y(L/2)$ $y(L/2 + 2)$ \cdots $y(L + N - 2)$ $N/2$ 个数据被保留下来。在合成过程中, 首先进行上采样, 则数据经采样后变成 $y(L/2)$ 0 $y(L/2 + 2)$ 0 \cdots $y(L/2 + N - 2)$ 0 N 个数据, 根据 (16) 式或 (17) 式将得到 $y(n)$, $0 \leq n \leq L - 2$ 的前 $L - 1$ 个数据, 再根据定理 3 对数据进行对称扩展, 可得到全部数据 $y(n)$, $0 \leq n \leq 2N - 1$; 再对 $y(n)$ 进行卷积, 经过 $L - 1$ 个系统延迟后便可得到原始数据 $x(n)$ 的重构信号。

由以上过程, 我们可看出在数据对称扩展方法中, 利用我们给出的数据保留和扩展方法, 不仅保留了对称扩展方法中数据连续的优点, 同时能在不扩大分解数据量的情况下, 无失重构原始信号。

新的数据对称扩展方法与周期扩展方法相比较, 在计算方面, 因为在实际中不需要计算 $y(n)$ 的 $2N$ 个值, 只需要计算 $y(n)$ 的 $N + L/2 - 1$ 个数据即可, 所以只是增加了微小的计算和对称

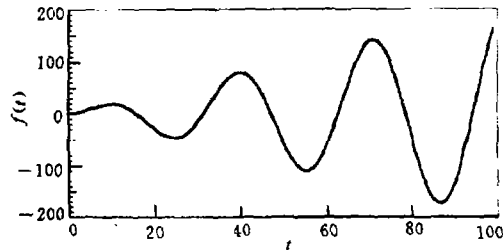


图 3

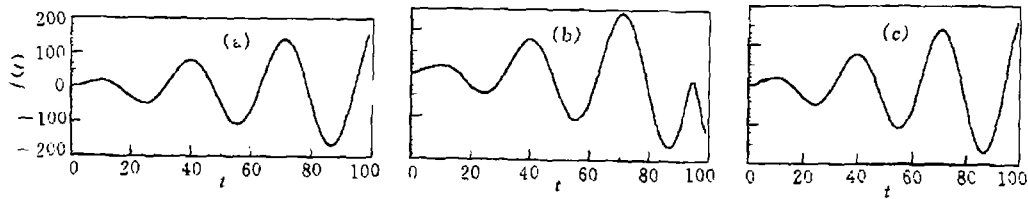


图 4

置换运算,但在性能方面,它克服了周期扩展方法中信号不连续带来的缺陷,能使信号无失真重建。

4 实验模拟

本文采用文献 [7] 给出的设计方法设计线性相位正则性近正交小波滤波器,选择 $L = 10$, $k = 3$, $\alpha = 0.5$, $w_p = 0.43\pi$, $w_s = 0.57\pi$, 则 $h_0(n) = \{0.054686, -0.030369, -0.158881, 0.188007, 0.653664, 0.653664, 0.188007, -0.158881, -0.30369, 0.054686\}$ 。

采用不同的数据扩展方法对图 3 所示原始信号进行分解和合成,其结果见图 4。

由图 4 可看出,由于原始信号左端幅度小,右端幅度大,使用周期扩展方法,经过分析滤波后,强制右端信号的能量进入左端,导致左边缘损失。使用传统的数据对称扩展方法,由于数据保留方法不当,导致右端数据没有完全恢复。文献 [2] 的实验数据采用建筑图,由于此图每行右部分和每列的下部分像素值没有变化,因此利用传统数据扩展方法得到了较好效果;文献 [3] 的实验数据采用斜格式图,实验结果表明采用传统扩展方法不理想。采用我们给出的数据对称扩展方法,在分解部分没有扩大数据量的同时获得了较好的数据恢复效果。

5 结 论

本文对信号的分解和合成技术进行了研究,特别对此技术中的关键环节——数据的扩展方法进行了详细探讨,指出了传统数据扩展方法中存在的问题,并在传统对称扩展方法的基础上给出了我们的新方法,实验表明我们的方法既克服了周期扩展方法中数据不连续的缺陷,又克服了传统对称数据扩展方法中存在的信号丢失问题,同时在分解过程中没有扩大数据量,获得了较好的信号恢复效果。

参 考 文 献

- [1] Shapiro J M. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. IEEE Trans.on SP, SP-41(12): 3445-3462.
- [2] Smith M J T, Eddins S L. Analysis/Synthesis techniques for subband image coding. IEEE Trans.on ASSP., ASSP-38(8): 1446-1456.
- [3] Karlsson G, Vetterli M. Extension of finite length signals for subband coding. Signal Processing, 1989, 16(7): 161-168.
- [4] Nishikana K, Kiya H, Sagawa M. Property of circular convolution for subband coding. IASSP'92, San Francisco, USA: 1992, PIV281-284.
- [5] Kiya H, Nishikawa K, Iwahashi M. A Development of symmetric extension method for subband image coding. IEEE Trans. on IT, IT-3(1): 78-81.
- [6] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. on Patt. Anal. Machine. Intell., PAMI-11 (7): 674-693.
- [7] 周建鹏, 杨义先. 任意规则线性相位小波滤波器的特征滤波器设计方法. 通信学报, 1997, 待发表.

SINGAL DECOMPOSITION AND
SYNTHESIS TECHNIQUE BASED ON FIR FILTER

Zhou Jianpeng Yang Yixian

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100088)

Abstract In this paper, the signal decomposition and synthesis technique based on FIR filters have been studied, the different data extension methods included in convolution procession have been investigated in detail, the problem involved in conventional symmetric extension method has been reported, the new symmetric extension method has been given. The experimental results show the new method performs better than the conventional methods.

Key words Subband decomposition, Signal synthesis, Data extension

周建鹏: 男, 1968年生, 博士生, 研究方向为图像压缩及多媒体通信, 主要研究兴趣包括小波理论、神经网络、图像压缩、B-ISDN及ATM网络中的变比特率视频编码, 现已发表论文10余篇。

杨义先: 男, 1961年生, 北京邮电大学信息安全中心主任, 教授, 博士生导师, 全国政协委员。主要研究领域包括现代密码学、计算机网络安全、信息处理、应用数学等。已发表论文一百六十余篇, 有五部专著。