

基于微分算子的 Eno-haar 小波变换及其应用¹

宋锦萍 杨晓艺 侯玉华

(河南大学数学与信息科学学院 开封 475001)

摘要: 该文首先引入微分算子并结合 Haar 小波的特点, 提出了一种遗传性算法, 用于 2D 信号奇异性检测。其次, 将该算法与 Eno-haar(Essentially non-oscillatory-haar) 小波相结合, 得到了一种基于微分算子的 Eno-haar 小波变换算法, 并通过仿真实验说明了其在图像压缩中的可行性和有效性。

关键词: Eno-haar 小波变换, 微分算子, 信号奇异性检测, 图像压缩

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)06-0940-05

The Eno-haar Wavelet Transforms Based on Differential Operators and Its Application

Song Jin-ping Yang Xiao-yi Hou Yu-hua

(College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475001, China)

Abstract In this paper, the differential operators are introduced firstly. Then based on the characteristics of Haar wavelet transforms and the differential operators, a transmissibility algorithm is proposed and applied to the singularity measuring of 2D signal. Secondly, a new algorithm called the Eno-haar (Essentially non-oscillatory-haar) wavelet transforms algorithm based on the differential operators is presented. And it is proved by experiments that this algorithm is effective and feasible to image compression.

Key words Eno-haar wavelet transforms, Differential operators, Singularity measuring of the signal, Image compression

1 引言

小波变换是近年来发展起来的一种非常有效的数学工具, 在许多领域都得到了广泛的应用, 如数字信号处理、数字图像分割、压缩、去噪、恢复和指纹鉴定等。尤其是在图像压缩中, 利用小波变换对图像的光滑部分进行线性逼近时具有很高的精度, 但对图像的边缘以及具有奇异点的部分进行逼近时, 却不尽如人意, 往往出现常见的 Gibbs 现象^[1,2], 即奇异点附近的点会出现振荡现象, 从而掩盖了原有图像的奇异特征, 使得线性逼近的精确度大大降低。本文首先引入微分算子来确定原始图像中奇异点的位置, 然后结合 Haar 小波的特点, 提出了一种遗传性算法, 来判断经小波变换后原始图像中奇异点在各个尺度上对应的位置, 从而巧妙地解决了 2D 信号奇异性检测问题。进一步, 将该算法与 Eno-haar(Essentially non-oscillatory-haar) 小波相结合, 给出了一种基于微分算子的 Eno-haar 小波变换算法, 并通过仿真实验说明了其在图像压缩中的可行性和有效性, 且与文献 [1] 相比计算量有所降低。

2 Eno 小波变换^[1,3]

众所周知, 小波的线性逼近具有压缩数据的作用。对连续函数, 或者某一函数的连续部分, 应用小波的线性逼近有较高的精确度, 但是在奇异点附近却不太理想, 如图 1 所示, 利用小波

¹ 2003-01-28 收到, 2003-09-29 改回

河南省自然科学基金(2003110004)、河南省高校青年骨干教师基金(G2002016)、河南大学科研基金(XK02069)资助课题

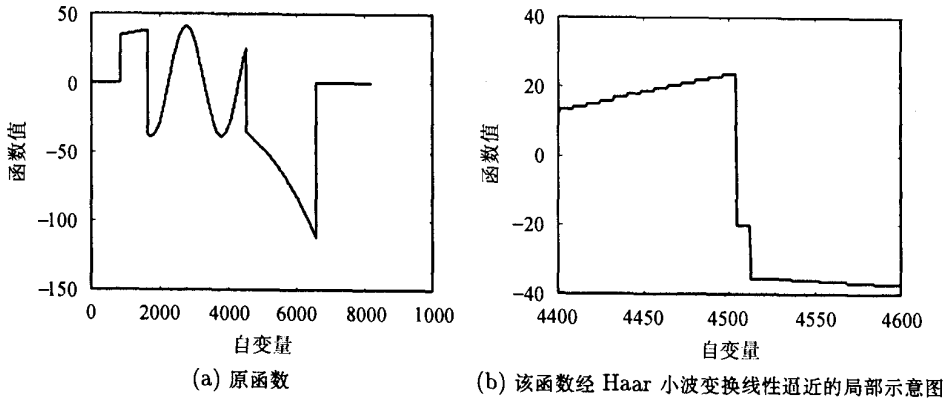


图 1 标准小波变换线性逼近在奇异点附近产生振荡现象示意图

变换对原函数进行线性逼近时，位于点 4400~4600 之间的奇异点附近出现齿状，湮没了原奇异点的真实位置。原因在于在奇异点附近作小波变换时，若恰有小波滤波器通过，则会产生较大的小波系数，线性逼近就会将这些大的系数去掉，从而在奇异点附近产生振荡，甚至完全湮没原奇异特征。

为了减弱和消除奇异点附近出现的振荡，文献 [1] 提出了一种 Eno 小波变换，主要步骤如下：第一确定奇异点的位置；第二修正尺度系数和小波系数；第三进行线性逼近。

3 基于微分算子和 Haar 小波变换的信号奇异性检测

为了解决利用小波变换进行线性逼近时所产生的振荡现象，必须首先检测出奇异点的位置，为此，本节引入微分算子来确定原始图像中奇异点的位置，并根据 Haar 小波变换具有整齐的二叉树结构及邻里之间具有完全的不相关性，归纳出一种遗传性算法，以此确定经小波变换后原始图像奇异点在各个尺度上对应的位置，从而巧妙地解决了 2D 信号奇异性检测问题。

3.1 基于微分算子的边缘检测

图像的灰度边缘是灰度值不连续 (或突变，奇异) 的结果，这种不连续常可利用求导数方便地检测到，而微分算子具有边缘检测的功能 [4]，本节采用微分算子中的方向算子判断奇异点的位置。方向算子是利用一组模板分别计算在不同方向上的差分值，取其中的最大值作为边缘强度，而将与之对应的方向作为边缘方向。常用的八方向 Kirsch(3×3) 模板如图 2 所示 [5]，各方向的夹角为 45°。

首先，利用方向算子计算图像的边缘强度。设图像为 I ，模板为 $M_k(k = 1, 2, \dots, 8)$ ，则边缘强度在点 (x, y) 处为

$$E = \max_k \{M_k \bullet I\} \tag{1}$$

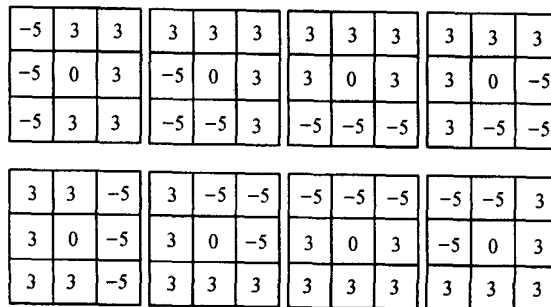


图 2 八方向 Kirsch(3×3) 模板示意图

这里 \bullet 表示点乘，其具体计算方法为：模板在图像中漫游，将模板中心与图中某个像素位置重合，模板上系数与模板下对应像素相乘，然后将所有乘积相加。

其次，设边缘强度对应的灰度图像为 B ，利用迭代方法选择阈值。先取图像 B 的灰度范围的中值作为初始阈值 P_0 (设共有 Q 个灰度)，然后按下式进行迭代：

$$P_{i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{P_i} n_k \cdot k}{\sum_{k=0}^{P_i} n_k} + \frac{\sum_{k=P_i+1}^{Q-1} n_k \cdot k}{\sum_{k=P_i+1}^{Q-1} n_k} \right\} \tag{2}$$

迭代直到 $P_{i+1} = P_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 时终止，取终止时的 P_i 为阈值，其中 n_k 是灰度为 k 值的像素个数。

最后，由式 (2) 得到的阈值，将边缘强度图二值化 (大的边缘强度和小的边缘强度)，确定出 2D 图像中的所有边缘。

3.2 基于微分算子和 Haar 小波变换的遗传性算法

确定出图像的边缘以及边缘方向之后，将任一边缘方向上所有像素点构成的集合，视为一个一维信号，边缘对应的点即为信号的奇异点，这样就将 2D 图像问题转化为 1D 信号进行处理。下面利用 Haar 小波变换整齐的二叉树结构、邻里之间的完全不相关性以及奇异点位置在尺度间的“遗传性”，我们得到了奇异点在其它各个尺度上对应的位置。

“遗传性”如图 3 所示，图中取尺度 $j = 3$ ，原始信号奇异点位于 $\{x(n), x(n+1)\}$ (图中以虚线表示)，并设 $2^3 | n+1$ 即 2^3 整除 $n+1$ ，图中 \bullet 代表原始信号奇异点相应于不同尺度 $j (j = 1, 2, 3)$ 上的位置。

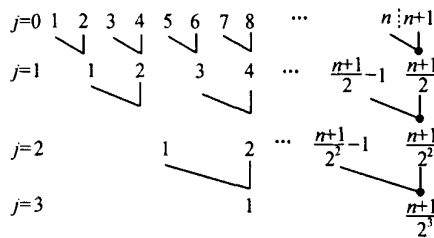


图 3 Haar 小波的二叉树结构以及奇异点位置在尺度间遗传性示意图

该“遗传性”可详细描述为如下算法：

算法 原始信号 $x = \{x(i), i = 1, 2, \dots, N\}$ ，小波分解至尺度 $j = m$ ，不妨设原始信号奇异点位置为 $\{x(n), x(n+1)\}$ ，则

(1) 若 $2^{m-1} | n$ ，则无滤波器通过原始信号的奇异点，并且对 $1 \leq j \leq m-1$ 均不会因原始信号的奇异点而产生较大的小波系数，故 $j = m$ 尺度的线性逼近不会在奇异点附近产生振荡的情形；

(2) 若 $2^{m-1} \nmid n$ 即 2^{m-1} 不能整除 n ，利用以下递归方法判断，其流程图如图 4，最终输出的 n' 即为原始信号奇异点对应在 $j = m$ 尺度上的位置。

至此，通过 3.1 节中微分算子模板和 3.2 节中的遗传性算法，我们完成了 2D 信号的奇异性检测。

4 基于微分算子的 Eno-haar 小波变换及其应用

4.1 基于微分算子的 Eno-haar 小波变换

在第 3 节及文献 [1] 的基础上，我们引入了一种新的 Eno 小波变换算法——基于微分算子的 Eno-haar 小波变换，此算法在保持消除振荡的特点和保留图像较多特征的前提下，大大降低了计算量。

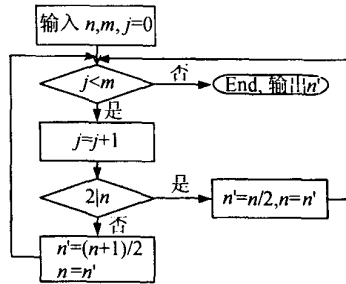


图 4 递归算法的流程图

具体步骤如下：

第 1 步 判断奇异点的位置 直接利用第 3 节的方法判断出原始图像的奇异点位置及其在各个尺度上对应的位置。

第 2 步 产生新的尺度系数和小波系数 判断出奇异点的位置之后，我们将在奇异点附近做插值得到新的小波系数和尺度系数。若小波函数具有 p 阶消失矩，则在奇异点处做 $p - 1$ 阶插值。对于 Haar 小波使用常数插值，具体的计算方法如下：

设原始信号 $x = \{x(i), i = 1, 2, \dots, N\}$ ，小波分解至尺度 $j = m$ ，不妨设原始信号奇异点位置为 $\{x(n), x(n + 1)\}$ ，利用第 1 步中“遗传性”算法，记 n' 为原始信号奇异点对应在 $j = m$ 尺度上的位置。

由于 Haar 小波情形插值为常数，以 $\hat{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$ 分别表示经左插值、右插值后产生的新的尺度系数与小波系数，则

- (1) 左插值：满足 $\hat{\alpha}_m(n') = \alpha_m(n' - 1)$ ；
- (2) 右插值：满足 $\bar{\beta}_m(n') = 0$ 。

具体计算方法需利用 $j = m - 1$ 尺度上的尺度系数：

$$(\dots, \alpha_{m-1}(2n' - 3), \alpha_{m-1}(2n' - 2), \alpha_{m-1}(2n' - 1), \alpha_{m-1}(2n'), \alpha_{m-1}(2n' + 1), \alpha_{m-1}(2n' + 2), \dots)$$

设 u, v 为待定变量，考虑如下 2×6 矩阵

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & u & \alpha_{m-1}(2n') & \alpha_{m-1}(2n' + 1) & \alpha_{m-1}(2n' + 2) \\ \alpha_{m-1}(2n' - 3) & \alpha_{m-1}(2n' - 2) & \alpha_{m-1}(2n' - 1) & v & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

由 $\hat{\alpha}_m(n') = \alpha_m(n' - 1)$ 得

$$\alpha_{m-1}(2n' - 1)h_0 + vh_1 = \alpha_{m-1}(2n' - 3)h_0 + \alpha_{m-1}(2n' - 2)h_1 \tag{3}$$

由 $\hat{\beta}_m(n') = 0$ 得

$$vg_0 + \alpha_{m-1}(2n')g_1 = 0 \tag{4}$$

分别解式 (3) 和式 (4) 可得 u, v 的值，从而利用 Mallat 算法 [3]，得到两组新的尺度系数和小波系数：左插值得到 $\hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m$ ；右插值得到 $\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$ 。

第 3 步 原始信号的线性逼近 首先，对第 2 步得到的 $j = m$ 尺度上的两组新的系数，利用标准小波变换得到相应的两组线性逼近，左插值对应 \hat{x} ，右插值对应 \bar{x} 。进而，再做如下变换：(1) 原始信号奇异点左侧数据更改为 \bar{x} ；(2) 原始信号奇异点右侧数据更改为 \hat{x} ，最终得到原始图像的线性逼近。

该算法由于将 2D 问题转化为了 1D 问题，无需对 2D 问题中的各个方向均做变动，所以大大减少了计算量。

4.2 基于微分算子的 Eno-haar 小波变换在图像压缩中的应用

本节给出了基于微分算子的 Eno-haar 小波变换和标准 Haar 小波变换对 2D 图像作线性逼近的仿真结果。在图 5, 图 6 中, (a) 所示的为原始图像, 像素点数为 64×64 ; (b) 为原始图像经标准 Haar 小波变换尺度 $j = 1$ 的线性逼近; (c) 为原图像经基于微分算子的 Eno-haar 小波变换尺度 $j = 1$ 的线性逼近。显然从图中可以看出, 图像经新算法所做的线性逼近较标准的 Haar 小波变换, 不仅保留了原图像较多的奇异特征, 而且大幅度减少了振荡的情形。

综上, 基于微分算子的 Eno-haar 小波变换, 不仅具有信号奇异性检测作用, 而且大量仿真结果 (见图 5, 图 6) 说明该算法在图像压缩中是有效的和可行的。

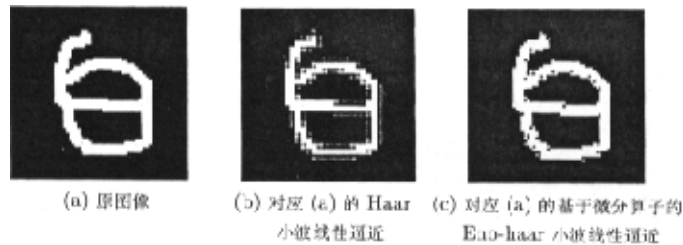


图 5

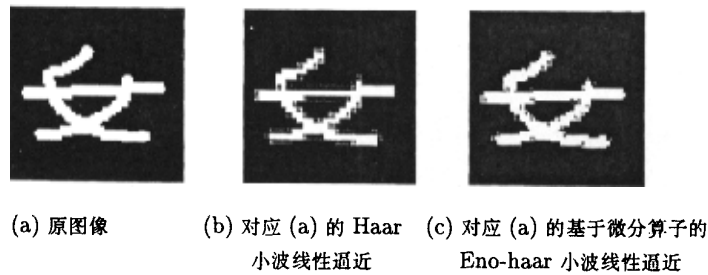


图 6

参 考 文 献

- [1] Hao-Min Zhou. Wavelet transforms and PDE techniques in image compression [D]. University of California, 2000.
- [2] Donoho D. De-noising by soft thresholding [J]. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1995, 41(3): 612-627.
- [3] Ingrid Daubechies. Ten Lectures on Wavelets [M]. Philadelphia, Pennsylvania, SIAM, 1992, Chap.1~Chap.5.
- [4] 章毓晋. 图象分割 [M]. 北京: 科学出版社, 2001, 第二章.
- [5] Kirsch R. Computer determination of the constituent structure of biological images [J]. *Computer Biomedical Research*, 1971, 4(3): 315-328.

宋锦萍: 女, 1963 年生, 副教授, 研究兴趣: 微分方程数值解、模式识别.
 杨晓艺: 女, 1978 年生, 硕士, 研究兴趣: 信号与图像处理.
 侯玉华: 女, 1956 年生, 教授, 研究兴趣: 随机过程、图像处理.