

## 基于紧支径向基函数内插的图像修复算法

王卫红<sup>①②</sup> 秦绪佳<sup>①③</sup>

<sup>①</sup>(浙江工业大学 软件学院 杭州 310032)

<sup>②</sup>(北京航空航天大学 软件开发环境国家重点实验室 北京 100083)

<sup>③</sup>(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

**摘要** 该文提出一种基于紧支径向基函数插值的图像修复算法, 该算法将图像看成残缺的三维散乱点集, 将图像修复问题转化为三维数据的曲面重建问题。采用径向基函数曲面重建的方法构造出逼近三维点集的隐函数曲面, 实现对残缺部分的插值, 并对重构曲面采样得到残缺部分的像素值。紧支径向基函数可使求解权系数的线性系统的系数矩阵具有稀疏带状结构, 从而降低算法的复杂度。实验结果表明, 该算法是一种实用对图像修复算法, 可得到良好的修复效果。

**关键词** 图像修复, 紧支, 径向基函数, 插值

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)05-0890-05

## Novel Image Inpainting Algorithm Based on CSRBF Interpolation

Wang Wei-hong<sup>①②</sup> Qin Xu-jia<sup>①③</sup>

<sup>①</sup>(College of Software Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

<sup>②</sup>(State Key Lab. of Software Development Environment, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

<sup>③</sup>(State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract** A novel algorithm for image inpainting based on Compactly Supported Radial Basis Functions(CSRBF) interpolation is proposed. The algorithm looks an image as an incomplete 3D points set. The 2D image inpainting problem is converted into implicit surface reconstruction problem from 3D points set. To construct the implicit surface for approximating the points set by using Radial Basis Functions(RBF) can interpolate the points in absent portion, and then resample from the constructed surface can calculate the pixels' value of damaged or removed portion on the image. Using CSRBF, the matrix of corresponding system of the linear algebraic equations is spare and bounded. So it can decrease the complexity of RBF algorithm. A number of examples on image inpainting demonstrates that the algorithm is an practical one and using the algorithm can obtain good results.

**Key words** Image inpainting, Compactly-supported, Radial Basis Functions(RBF), Interpolation

### 1 引言

图像修复(inpainting)是将图像中丢失、破损的部分恢复出来, 或将图像中多余的部分剔除, 然后根据剔除区域周边景物的特征填补剔除区域。这在照片编辑、文物修复等方面有着重要应用价值。

在图像修复方面, 文献[1]给出了较为详细的总结和分析。目前, 许多工作集中在基于图像去噪声和纹理合成的方法来进行图像修复<sup>[2-4]</sup>。De Bonet采用多分辨率的金字塔方法来重建纹理, 该方法可以合成结构复杂的纹理<sup>[5]</sup>。Wei采用矢量量化方法, 提出快速的多分辨率纹理合成算法<sup>[6]</sup>, 单纯纹理合成的方法并不能满足普遍意义下的图像修复。

Bertalmio<sup>[7,8]</sup>采用偏微分方程(PDE)的方法进行图像修复, 取得了较好的效果。Chan等提出了整体变分模型(Total Variational, TV)<sup>[9]</sup>和基于曲率的扩散模型(Curvature-Driven Diffusion, CDD)<sup>[10]</sup>。这几种方法都注重边缘及边界曲率的连续性。Oliveira利用高斯卷积核对图像进行滤波<sup>[11]</sup>, 能快速地修复破损区域, 但只适合破损区域是窄带的场合。最近Jia等提出了一种自适应 $N$ 维张量选举(Tensor Voting)的方法<sup>[12]</sup>, 该方法将图像的颜色及纹理信息转化成 $N$ 维张量, 然后对每一像素在 $N$ 维纹理空间中计算出一个最优的颜色值。

基于三维散乱点集的曲面重建方法中, 径向基函数(RBF)的隐函数建模方法是一种重要的方法<sup>[13,14]</sup>。采用紧支径向基函数(CSRBF)可降低RBF曲面插值算法的复杂度<sup>[15-18]</sup>。

本文提出了基于 CSRBF 的图像修复算法。将图像的像素阵列看成  $XY$  平面, 像素信息看成  $Z$  坐标, 把图像转化为三维散乱点集。由此点集构造 CSRBF 隐式曲面, 对图像待

2005-07-28 收到, 2006-01-04 改回

国家自然科学基金(60473024), 浙江省自然科学基金(Z105391, Y104341, Y105303)和浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室资助课题

修复区域采样得到该区域像素信息, 达到图像修复的目的。本文首先对图像修复技术作一概述, 然后对 RBF 及 CSRBF 算法进行介绍及复杂度分析, 接着详细讨论基于 CSRBF 的图像修复算法, 最后给出实验结果及结论。

## 2 基于紧支径向基函数的曲面插值

### 2.1 径向基函数的曲面插值

基于 RBF 的方法是近年来图形学领域用于隐函数造型的重要方法, 特别是基于大规模散乱点云的曲面重建方面, RBF 曲面插值方法是主要方法。给定三维空间数据集  $\{P_i\}_{i=1}^n$ ,  $p$  的几何坐标为  $(x, y, z)$ , RBF 插值曲面可定义为下面 RBF 的零等值面:

$$f(p) = q(p) + \sum_{j=0}^n \lambda_j \phi(|p - p_j|) \quad (1)$$

式中  $q(p)$  为低次多项式;  $\lambda_j$  为实值权系数;  $\phi(\bullet)$  为 RBF;  $|\bullet|$  为欧氏范数。

式(1)中的实值权系数  $\lambda_j$  可转化为求解下面的线性系统, 即

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & \lambda_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} & x_2 & y_2 & z_2 & 1 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} & x_n & y_n & z_n & 1 & \lambda_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

这里  $f(p_j) = h_j$ ,  $\phi_{ij} = \phi(|p_i - p_j|)$ ,  $q(p) = c_0x + c_1y + c_2z + c_3$ 。故式(2)可简化为

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$$

式中  $A_{ij} = \phi(|p_i - p_j|)$ ;  $P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

式(2)的系数矩阵是一个对称矩阵, 适当选取基函数  $\phi$  可使得系数矩阵为正定矩阵, 以保证式(2)有解<sup>[16]</sup>。

由于 RBF 插值曲面上的点其函数值  $f(p_i) = h_i \equiv 0$ , 为了避免式(2)出现平凡解, RBF 插值一般采用了沿点的法向偏移很小的距离, 使得  $f(p'_i) = h'_i \neq 0$ 。本文算法中, 采用一部分点不变, 一部分点向法向方向偏移 0.001, 一部分点向非法向方向偏移 0.001。

### 2.2 径向基函数插值的算法分析

采用 RBF 的散乱点曲面重建, 对算法的时间复杂度分析主要考虑下面 3 个方面: (1) 式(2)的构造时间复杂度; (2) 求解式(2)的时间复杂度; (3) 由式(1)计算函数值的时间复杂度。

对于式(2)的系数矩阵的构造, 计算  $\phi_{ij} = \phi(|p_i - p_j|)$ , 其计算复杂度是  $O(n^2)$ 。由于系数矩阵除主对角线上的元素为 0 外, 其余几乎不为 0, 因此空间复杂度为  $O(n^2)$ <sup>[16,17]</sup>。求解式(2), Turkt 和 O'Brien 采用 LU 分解的方法并采用迭代技术, 时间复杂度可降到  $O(n^2)$ <sup>[19]</sup>。由插值函数进行函数值的估算的复杂度为  $O(n)$ 。

### 2.3 紧支径向基函数

Wendland 在 1995 年构造了具有局部支撑特性的 RBF, 即 CSRBF, 它保证由此构造的系统矩阵是正定矩阵<sup>[15]</sup>。基函数的统一形式为

$$\phi(r) = \begin{cases} (1-r)^q p(r), & 0 \leq r < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

Wendland 给出了 1, 3, 5 维情况  $C^0, C^2, C^4$  连续的  $\phi(r)$  的各种形式, 其中 3 维  $C^0$  的形式为  $\phi(r) = (1-r)_+^2$ ,  $C^2$  的形式为  $\phi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$ 。由于式(3)中支撑半径  $r$  小于等于 1, 为满足其它的支撑半径, Wendland 引入了一个缩放因子  $\alpha$ , 使  $\phi(r/\alpha)$  能支持各种需求的支撑半径  $r$ 。

由于 RBF 的有限支撑, 对于一点  $P_i$ , 离  $P_i$  距离大于支撑半径  $r$  的  $P_j$ , 有  $\phi(|P_i - P_j|) = 0$ 。因此, RBF 的紧支性使线性系统的系数矩阵具有带状稀疏的特性, 从而可以大大降低 RBF 插值的计算复杂度。文献[16]给出了 CSRBF 的计算复杂度: (1) 系数矩阵构造的时间复杂度为  $O(n \log n)$ , 系数矩阵存储的空间复杂度为  $O(n)$ ; (2) 求解线性方程组的时间复杂度为  $O(n^{1.5})$ ; (3) 插值函数的数值估算时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

采用 CSRBF 插值的曲面修复的实例如图 1 和图 2 所示, 图 1(a)和 2(a)为不完整的曲面, 图 1(b)和 2(b)为修复的曲面。

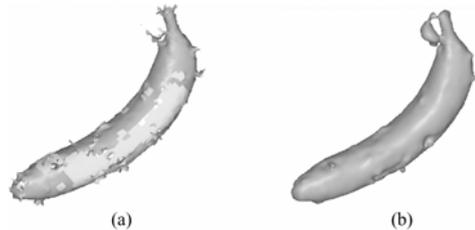


图 1 香蕉模型的 CSRBF 插值曲面修复  
(a) 带有破损区域的香蕉模型 (b) CSRBF 曲面修复结果  
Fig.1 CSRBF interpolation for banana model  
(a) Original surface (b) CSRBF repaired surface

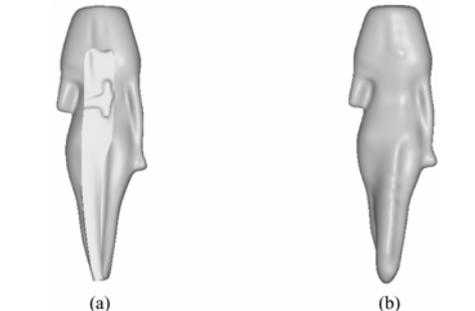


图 2 修女模型(背部)的 CSRBF 插值曲面修复  
(a) 带有孔洞的模型修女模型 (b) CSRBF 修复结果  
Fig.2 CSRBF interpolation for nun model  
(a) Original surface (b) CSRBF repaired surface

### 3 基于紧支径向基函数插值的图像修复

#### 3.1 灰度图像修复过程

对于  $M \times N$  的灰度图像, 将图像像素灰度值  $f(x, y)$  视为  $z$  坐标, 图像数据可看作是  $(x, y, z)$  的三维点云数据, 图像中破损部分的点去除掉。由这些点采用 CSRBF 构造插值曲面, 然后对插值曲面重采样, 获得图像破损部分点的  $z$  值, 从而得到图像破损部分像素的灰度值, 达到破损图像修复的目的。本文构造 CSRBF 时, 支撑半径  $r$  取图像破损区域的最大宽度, 如图 3 所示。图 3(a) 为一部分破损的灰度图像, 图 3(b) 为图像像素视为  $z$  坐标对应的曲面, 图 3(c) 为用 CSRBF 插值曲面, 图 3(d) 为 CSRBF 修复结果图像。

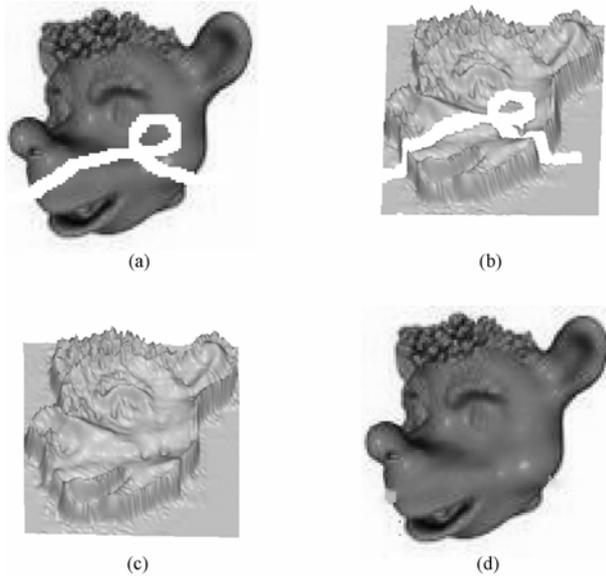


图 3 基于 CSRBF 曲面插值的图像修复 (a) 破损的灰度图像 (b) 灰度图像对应的曲面 (c) CSRBF 插值修复的曲面 (d) 曲面采样修复的图像

Fig.3 Image inpainting based on CSRBF interpolation (a) Damaged image (b) Surface convert from the gray image (a) (c) Surface restored by CSRBF interpolation (d) The repaired image

对于灰度图像, 具体修复过程为先将破损部分(或照片中要去除的景物)标记出来, 形成破损部分的掩膜(mask)图像, 标记出来的掩膜部分即为要修复的像素; 然后再用 CSRBF 修复。掩膜的生成可以设计算法自动获取图像破损部分得到, 也可以手工交互来标记出图像破损区域。本文采用手工方法来标记出图像破损区域, 生成掩膜(mask)图像。

#### 3.2 法向估算

由散乱云构造 RBF 隐函数曲面时, 为了避免式(2)出现平凡解, 常用沿点的法向偏移很小的距离  $h_i$ 。因此, 要对由图像转化成的三维点集中的点进行法向估算。本文采用采样点的 8 邻域点来进行估算, 这里所谓三维点的 8 邻域即为对应图像中该点像素的 8 邻域 (8 连通域)。如图 4 为某像素  $P$  的 8 邻域点  $P_0 \sim P_7$ 。具体估算方法是先计算矢量  $v_i$  :

$$v_i = P_i - P, \quad i = 0, 1, \dots, 7$$

然后计算矢量  $n_i$  :

$$n_i = v_i \times v_j, \quad i = 0, 1, \dots, 7, \quad j = (i + 1) \% 8$$

8 对  $n_i$  取均值, 得到某点的法向估算值:

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} n_i / N \quad (4)$$

$N$  为  $P$  点的邻域有效点数, 通常取  $N = 8$ 。当  $P$  处于图像边界或破损区域边界时,  $N < 8$ 。

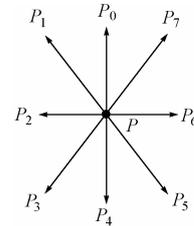


图 4 用于法向估算的点的 8 邻域

Fig. 4 Point's 8 neighbors for normal evaluate

#### 3.3 彩色图像的处理

对于彩色图像, 首先要对图像的彩色分量  $R, G, B$  通道分离, 得到 3 幅分别代表原像红色、绿色、蓝色分量的灰度图像; 然后分别对这 3 幅灰度图像进行 CSRBF 插值修复; 最后再将修复的  $R, G, B$  分量图像进行通道合成, 得到原彩色图像的修复结果。

#### 3.4 计算区域的确定

构造 CSRBF 插值曲面的时间的空间耗费取决于插值散乱点的规模。为减少计算量, 在构造 CSRBF 插值区域时, 可采用由破损区域边界向外扩张一个适当宽度的条带。为处理简便, 本文也采用包含破损区域的一个矩形区域作为 RBF 的插值区域。如图 5(b) 为条带区域作为 RBF 插值区域, 图 5(c) 为矩形区域作为 RBF 插值区域。

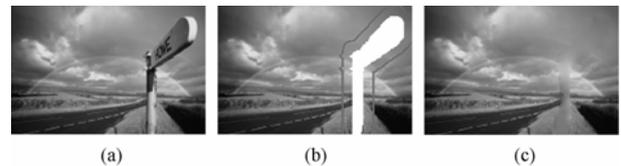


图 5 照片中路标的去除

(a) 原图像 (b) 去除物体的 mask (c) 修复结果

Fig. 5 Remove the road sign from a photo

(a) Original image (b) Mask image (c) Final result

### 4 实验结果

本文算法采用 VC++6.0 为开发平台, 在 PIV 2.4GHz, 512MB 内存的微机上实现。对于待处理图像的破损区域或要去除的目标, 本文采用手工方法勾画, 得到其掩膜(mask)区域; 然后用 CSRBF 内插的方法恢复出掩膜区域的图像像素信息。

图 5 为一带有路标的图片, 目的是去除路标。图 5(b) 为勾画出路标区域的掩膜图像, 区域边界到深色线包围的条带区域为 CSRBF 曲面构造的有效区域。图 5(c) 为去除路标后的 CSRBF 修复结果。采用条带区域比图 6 采用矩形区域大大减少构造 CSRBF 隐函数曲面的点数, 从而加快图像修复速度。大海风景照片中树桩的移除如图 6 所示。树桩只占整

幅照片的很小部分, 本文采用包含树桩的矩形区域作为 CSRBF 插值曲面的构建区域。图 6(b) 为包含树桩的局部区域, 图 6(c) 为局部区域相应的 mask 图像, 图 6(d) 为修复后的局部区域, 图 6(e) 整幅照片的最终结果。图 7 为熊图像中铁丝网的去除, 图 8 为带文字图像中文字的去除。

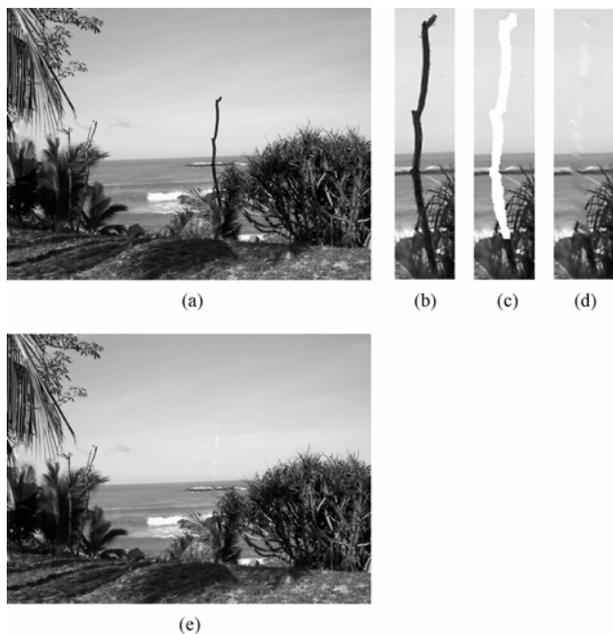


图 6 大海照片中树桩的去除

(a) 原图像 (b) 遮挡物 (c) 遮挡物 mask  
(d) 修复后的局部区域 (e) 图像修复结果图像

Fig. 6 Remove a stump from a photo (a) Original photo (b) Stump part of the photo (c) Mask image (d) Inpainting local part (e) The final result

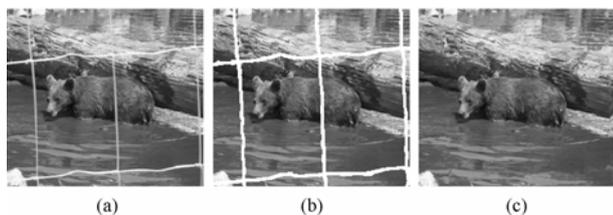


图 7 熊图像中铁丝网的去除

(a) 原图像 (b) 遮挡物的 mask (c) 结果图像

Fig. 7 Remove iron wire netting from a photo

(a) Original photo (b) Mask image (c) The final result



图 8 图像中字符的去除

(a) 含有字符的图像 (b) 去除图像中字符后的图像

Fig. 8 Remove characters from an image (a) An image with characters

(b) The image removed the characters

## 5 结束语

本文提出一种实用的图像修复算法, 将基于散乱点隐函数造型的径向基函数曲面插值方法应用于破损图像的修复中, 把灰度图像修复问题转化为三维空间曲面重建与插值问题。通过对 RBF 曲面插值的算法分析, 考虑到径向基函数的紧支性使线性系统的系统矩阵具有稀疏带状性, 本文采用 CSRBF 来进行图像修复, 以降低 RBF 曲面插值算法的复杂度。实验结果表明, 本文算法可达到良好的效果。

## 参考文献

- [1] Esedoglu S, Shen J. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model[J]. *European J. Appl. Math.*, 2002, 13(4): 353-370.
- [2] Ashikhmin M. Synthesizing Natural Textures [C]. Proceedings of 2001 ACM Symposium on Interactive 3D Graphics, Research Triangle Park, North Carolina, March 2001: 217-226.
- [3] Criminisi A, Perez P, Toyama K. Object removal by exemplar-based inpainting[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR)2003, Madison, USA., June, 2003: 721-728.
- [4] Heeger D J, Bergen J R. Pyramid-based texture analysis/synthesis[J]. *Computer Graphics*, 1995, 29(4): 229-233.
- [5] DeBonet J S. Multiresolution sampling procedure for analysis and synthesis of texture images[C]. Proceedings of SIGGRAPH' 97, Los Angeles, USA, August 1997: 361-368.
- [6] Wei L Y, Levoy M. Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization[C]. Proceedings of SIGGRAPH' 2000, New Orleans, USA, July, 2000: 479-488.
- [7] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, Ballester C. Image Inpainting[C]. Proceedings of SIGGRAPH 2000, New Orleans, USA, July 2000: 417-424.
- [8] Bertalmio M, Bertozzi A, Sapiro G. Navier-stokes, fluid-dynamics and image and video inpainting[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2001, Hawaii, USA, December 2001: 355-362.
- [9] Chan T F, Shen J. Mathematical models for local non-texture inpainting[J]. *SIAM, J. Appl. Math.*, 2001, 63(2): 1019-1043.
- [10] Chan T F, Shen J. Non-texture inpainting by curvature driven diffusion (CDD)[J]. *J. Visual Comm. Image Rep.*, 2001, 12 (4): 436-449.
- [11] Oliveira M M, Bowen B, McKenna R, Chang Y S. Fast digital image inpainting[C]. In Proceedings of the Visualization, Imaging, and Image Processing IASTED Conference, Marbella, Spain, Sept. 2001: 261-266.
- [12] Jia J, Tang C K. Image repairing: robust image synthesis by adaptive ND tensor voting[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2003, Madison, USA., June 2003: 643-650.

- [13] Carr J C, Beatson R K, Cherrie J B, *et al.*. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions[C]. Proceedings of SIGGRAPH 2001, Los Angeles, USA, July 2001: 417–424.
- [14] Carr J C, Fright W R, Beatson R K. Surface interpolation with radial basis functions for medical imaging[J]. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 1997, 16(1): 96–107.
- [15] Wendland H. Piecewise polynomial, positive defined and compactly supported radial functions of minimal degree[J]. *Adv. in Comput. Math.*, 1995, 4(4): 389–396.
- [16] Morse B S, Yoo T S, Rheingans P, *et al.*. Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions[C]. In Proceedings of Shape Modeling Conference, Genova, Italy, May 2001: 89–98.
- [17] Kojekine N, Savchenko V. Using CSRBFs for surface retouching[C]. Proceedings of The 2nd IASTED International Conference Visualization, Imaging and Image Processing VIIP2002, Malaga, Spain, September 2002: 9–12.
- [18] Kojekine N. Computer graphics and computer aided geometric design by means of compactly supported radial basis functions[D]. [Ph.D. Thesis], Tokyo Institute of Technology, June 2003.
- [19] Turk G, O'Brien J F. Variational implicit surface[R]. Technical Report GIT-GVU-99-15, Georgia Institute of Technology, 1998.
- 王卫红: 男, 1969 年生, 硕士, 副教授, 主要研究方向为 GIS、图像处理.
- 秦绪佳: 男, 1968 年生, 博士, 副研究员, 研究方向为计算机图形学、图像处理、科学计算可视化.