第14卷 第1期
1992年1月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 14, No. 1
Jan., 1992

一种新的信号迭代恢复方法

王岩飞
(中国科学院电子学研究所，北京 100080)

摘要 本文给出了一种新的信号迭代恢复方法，其中估计算子 W_k 可以根据误差算子 B_k 来选择. 在每一次迭代过程中，通过选择适当的估计算子 W_k 可以尽可能的减小估计误差，因而使迭代运算具有比较快的收敛速度. 本文还对迭代方法的收敛性及噪声影响所产生的误差进行了分析，并给出了普通方法与新方法进行对比的计算例子.

关键词 信号处理；迭代恢复，卷积反演

1. 引言

在信号处理中，经常要遇到对失真的信号进行恢复的问题. 这一问题可以表示为

$$y = Dx \tag{1}$$

其中 x 是输入信号，y 是输出信号，D 为失真算子. 给定 y 和 D 求 x 称为对信号的恢复. 我们可以通过求出 D 的逆算子 D^{-1} 来得到 x

$$x = D^{-1}y \tag{2}$$

然而在实际应用中，求 D^{-1} 有可能很困难，甚至无法求出，例如 D^{-1} 不存在，或者有奇点，或者是病态的等. 这时可以通过迭代方法来恢复信号，利用迭代方法可以克服上述的困难. 迭代方法还适用于非线性系统及时变系统所产生的失真，并且可以在信号的迭代恢复过程中加以各种先验信息，获得比较好的结果[1].

一般，迭代方法通过产生一序列 $\{x_k\}$ 来逼近 x，用 x_k 表示对 x 的估计，而 e_k 表示 x_k 与 x 的差. 如果能够知道 e_k，那么就可以求得 x. 实际上，我们只能对 e_k 做一估计 $\hat{e}_k$，从而对 x 进行下一次的估计，也就是进行下一次的迭代. 普通的迭代过程如下[1]:

$$x_{k+1} = x_k + \hat{e}_k \tag{3}$$

$$\hat{e}_k = \lambda(y - Dx_k) \tag{4}$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda(y - Dx_k) = \lambda y + (I - \lambda D)x_k \tag{5}$$

其中 I 表示单位算子，λ 为调整参数. (5) 式还可以表示成

$$x_{k+1} = Fx_k = \lambda y + Gx_k \tag{6}$$

算子 G 和 F 分别定义为 $G = (I - \lambda D)$ 和 $Fx = \lambda y + Gx$. 假设 x 和 y 属于巴拿赫线性空间，x 和 y 的距离以 $d(x,y)$ 表示，x 的范数以 $\|x\|$ 表示，并且 F 是此空间的有界算子，即满足

$$d(Fx, Fy) \leqslant Md(x,y) \tag{7}$$

这里 M 是一常数，称为 F 的界限，表示为 $\|F\|$. 如果 F 是压缩算子，即 $0 \leqslant M < 1$，可

1990.12.06 收到，1991.03.13 定稿.

以认为两个信号经算子 F 转换后的距离趋于减小，对于线性系统，可以简单地解释为算子的增益小于 1. 对于压缩算子 F，存在定点 x 满足 $x = Fx$，并且由 (6) 式产生的序列 $\{x_k\}$ 对于不同的 x_0 都收敛于 x，即当 $k\to\infty$时 $x_k \to x$。这就构成了一般的迭代方法恢复信号 x 的数学基础[2]。

2. 新的迭代方法

(1) *方法* 为了求解 (1) 式中的 x，(6) 式构成了一般的迭代方法的基础，这里我们给出不同的迭代方法. 设 H_k 为转换算子，x_k 为对 x 的估计

$$x_k = H_k y = H_k D x \tag{8}$$

由 (8) 式可以得到 x_k 与 x 的误差

$$e_k = x - x_k = (I - H_k D)x = B_k x \tag{9}$$

其中 B_k 代表误差算子. 为了求得 x，由上式可知只需要知道 e_k. 然而我们只能根据 x_k 对 e_k 做出估计从而对 x 做出进一步的估计. 假设

$$\hat{e}_k = W_k x_k \tag{10}$$

由 (3) 式可得

$$x_{k+1} = x_k + \hat{e}_k = (I + W_k)x_k = (I + W_k)H_k y \tag{11}$$

$$H_{k+1} = (I + W_k)H_k \tag{12}$$

x_{k+1} 与 x 的误差算子 B_{k+1} 如下:

$$B_{k+1} = I - H_{k+1}D = I - (I + W_k)H_k D = I - (I + W_k)(I - B_k) \tag{13}$$

由上面的式子可以看出，每进行一次迭代运算对 x 的估计 x_k 与 x 的误差都由误差算子 B_k 所决定. 误差算子 B_k 由 (13) 式给出，通过选择不同的 W_k 可以使 B_{k+1} 具有不同的形式. 为了使迭代运算能快速收敛，这里选择

$$W_k = B_k + B_k^2 + \cdots + B_k^{n-1} = (I - H_k D) + \cdots + (I - H_k D)^{n-1} \tag{14}$$

将 (14) 式代入 (13) 式可以得到

$$B_{k+1} = (I - H_k D)^n = B_k^n \tag{15}$$

如取 $n = 2$，则有 $W_k = B_k = I - H_k D$；取 $n = 3$，有 $W_k = B_k + B_k^2$. 对于 $n = 3$，假设 $x_0 = y$，由 (1) 式及 (8) 式知 $H_0 = 1$，迭代运算可以表示成

$$B_0 = I - D \tag{16}$$

$$x_{k+1} = (I + B_k + B_k^2)x_k \tag{18}$$

$$B_{k+1} = B_k^2 \tag{19}$$

或者还可以表示成

$$x_{k+1} = (3 - 3H_k D + (H_k D)^2)x_k \tag{19}$$

$$H_{k+1} = (3 - 3H_k D + (H_k D)^2)H_k \tag{20}$$

(2) *收敛性* 对于给出的迭代方法，要使 x_k 收敛于 x 应有 $k\to\infty$时，$d(x_k, x)\to 0$. 根据 (8) 式，(1) 式及 (13) 式可得

$$d(x_{k+1}, x) = d((I + W_k)x_k, x) = d((I - B_{k+1})x, x) = d(x, x) + d(B_{k+1}x, 0)$$
$$= \|B_k^n x\| \leqslant \|B_k\|^n \|x\| \tag{21}$$

对于 $k = 0, 1, 2, \cdots$，重复利用 (15) 式得

$$d(x_k, x) \leqslant \|B_0\|^{nk} \|x\| \tag{22}$$

因此，只要 $0 \leqslant \|B_0\| < 1$，则有 $k \to \infty$ 时，$d(x_k, x) \to 0$。对于选定的 H_0，根据 (13) 式可知，为了使 $x_k \to x$，应使 $B_0 = I - H_0 D$ 为压缩算子。

对于一般的迭代方法，由(6)，(7) 式得

$$d(x_k, x) = d(Fx_{k-1}, x) \leqslant M d(x_{k-1}, x) \leqslant M^k d(x_0, x) \tag{23}$$

而根据新方法导出的 (21)，(22) 式，可得

$$d(x_k, x) \leqslant (\|B_0\|^{(n^{k-1})})^n d(x_{k-1}, x) \leqslant (d(x_{k-1}, x))^n / \|x\|^{n-1} \tag{24}$$

与 (23) 式相比 (24) 式按几何级数的形式收敛，所以新方法的收敛速度应比普通方法快得多。

(3) 误差分析　由于实际情况中的噪声的存在，假设 (1) 式中的 y 在观测中混入了噪声信号 n，得到

$$z = y + n = Dx + n \tag{25}$$

对于 $x_0 = H_0 z$，由 (11) 式得

$$x_{k+1}^* = (I + W_k) x_k^* \tag{26}$$

假设无噪声时 $x_0 = H_0 y$，对于 x_{k+1} 和 x_{k+1}^* 有

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}^*, x_{k+1}) &= d((I + W_k)x_k^*, (I + W_k)x_k) \leqslant \|I + W_k\| d(x_k^*, x_k) \\ &\leqslant \|I + W_k\| \cdots \|I + W_0\| d(x_0^*, x_0) \end{aligned} \tag{27}$$

由 (14) 式及 (15) 式可得

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}^*, x_{k+1}) \leqslant (1 + \|B_k\| + \cdots + \|B_k\|^{n-1}) \cdots (1 + \|B_0\| + \cdots \\ + \|B_0\|^{n-1}) d(x_0^*, x_0) \leqslant d(x_0^*, x_0)(1 - \|B_0\|^{n^{k+1}})/(1 - \|B_0\|) \end{aligned} \tag{28}$$

对于 $x_0 = H_0 y, x_0^* = H_0(y + n)$，有 $d(x_0^*, x_0) = \|H_0\|\|n\|$，因此

$$d(x_{k+1}^*, x_{k+1}) \leqslant \|H_0\|\|n\|(1 - \|B_0\|^{n^{k+1}})/(1 - \|B_0\|) \tag{29}$$

$$d(x^*, x) \leqslant \|H_0\|\|n\|/(1 - \|B_0\|) \tag{30}$$

可以看出 x^* 与 x 的误差正比于 $\|n\|$，并且同 B_0 或者 H_0 有关。

3. 新的迭代方法在反卷积问题中的应用

对于卷积问题，(1) 式可表示为

$$y(n) = h(n) * x(n) \tag{31}$$

其中“$*$”表示卷积运算，单位算子 I 则为 $\delta(n)$。为方便起见取 $n = 3$，迭代运算可以表示成

$$x_{k+1} = (\delta(n) + b_k(n) + b_k(n) * b_k(n)) * x_k \tag{32}$$

$$b_{k+1}(n) = b_k(n) * b_k(n) * b_k(n) \tag{33}$$

$$b_k(n) = \delta(n) - h_k(n) * h(n) \tag{34}$$

上述迭代过程也可以从频域表示，假设 $x_k(n), b_k(n), h_k(n), x(n), y(n), h(n)$ 的傅里叶变换分别为 $X_k(\omega), B_k(\omega), H_k(\omega), X(\omega), Y(\omega), H(\omega)$，则上面的迭代可以表示为

$$X_{k+1}(\omega) = (1 + B_k(\omega) + (B_k(\omega))^2) X(\omega) \tag{35}$$

$$B_{k+1} = (B_k(\omega))^3 \tag{36}$$

$$B_k = 1 - H_k(\omega) H(\omega) \tag{37}$$

为了使迭代序列收敛，应满足 $0 \leqslant \|B_0\| < 1$，代入 (37) 式得

$$0 \leqslant |1 - H_0(\omega) H(\omega)| < 1 \tag{38}$$

一般情况下对于压缩算子 $H(\omega)$，可取 $x_0 = y$，即 $X_0(\omega) = Y(\omega)$，$h_0(n) = \delta(n)$，即 $H_0(\omega) = 1$。

图1和图2是我们根据普通的方法和本文给出的方法进行模拟计算的例子，信号 $x(n) = \delta(n-30) + \delta(n-38)$，$h(n) = 0.09974\exp(-n^2/16)$。图1是根据(3),(4)式的一般的迭代方法所计算的结果，其中 $\lambda = 2$；图2是根据本文给出的迭代方法所计算的结果，可以看出图2的几次迭代结果相当于图1的几十次的迭代结果。很显然，本文给出的迭代方法的收敛速度要比一般方法快得多。并且就相似的结果来看，新方法3次迭代的计算量要小于一般方法20次迭代的计算量，新方法5次迭代的计算量要小于一般方法60次迭代的计算量。也就是说，在达到相同结果的前提下，新方法的计算量要少于普通方法的计算量。

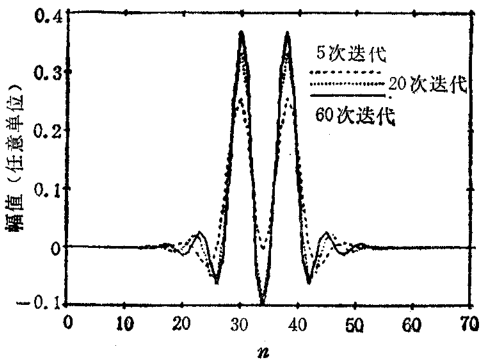

图1 一般方法

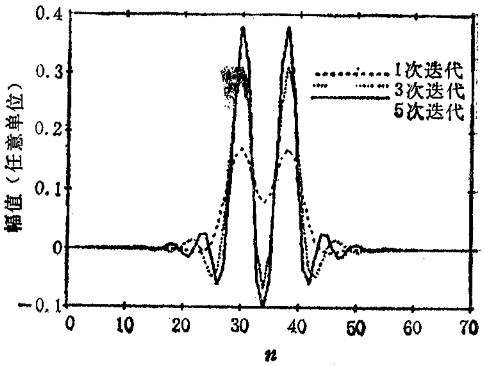

图2 本文方法

4. 结束语

本文给出的迭代方法将每步迭代的估计算子与估计所产生的误差相联系，以误差算子作为权函数来选择估计算子，因而可以使每次迭代所产生的误差尽可能小，使迭代运算的收敛速度大大加快，这也是本方法区别于其他方法的一个主要特点。本文的理论分析及计算例子都说明了新方法的快速收敛性。此外，新方法并不要求失真算子为线性算子，因而也适合于非线性失真信号的恢复，并且与其他方法一样也可以在迭代过程中加以各种先验信息及限制[1]以求获得比较好的结果。本文根据误差算子权函数做出了估计算子的一种选择，在实际应用中同样可以做出其他的选择。

参 考 文 献

[1] R.W. Schafer, R.M. Mersereau, M.A. Richards, *Proc. IEEE*, **69**(1981)4, 432—450.

[2] 陈景良，近代分析数学概要，清华大学出版社，北京，1987年。

A NEW ITERATIVE RESTORATION METHOD

Wang Yanfei

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract A new iterative method for signal restoration has been presented. An estimate operator W_k that is related to error operator B_k in the restoration process is introduced to decrease the estimate error and increase the convergence rate. The effect of noise on the estimate process has been described. Finally, the method has been applied to the deconvolution of a blurred signal, the results of which validate the theory. The comparison between presented method and general method has also been given.

Key words Signal processing; Iterative restoration; Deconvolution