第7卷 第5期
1985年9月
电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS
Vol. 7, No. 5
Sept., 1985

用线性函数空间理论求解标量波动方程和泊松方程的反演问题*

宋 文 淼
(中国科学院电子学研究所)

提 要

基于线性函数空间理论的矩量法不仅适用于电磁场问题的数值计算，而且适用于解析法求解电磁场问题．本文分析了用本征函数作试函数和展开函数时的标量波动方程和泊松方程的反演形式．得到了一个很简单的对于各种边界条件普遍适用的公式．这一公式不仅适用于求解标量波动方程和泊松方程，而且只要稍加修改还可适用于解矢量波动方程问题，即求普遍形式的电磁场的激励问题．

用格林函数法求解电磁场问题虽是一种古典的数学方法，但现在仍是求解电磁场问题的基本方法之一[1-3]．现代数学方法在电磁场理论中已经获得越来越广泛的应用，最突出的例子就是基于线性函数空间理论的矩量法在电磁场的数值计算中的应用[4]．我们把上述两种方法结合起来用于求电磁场激励问题的解析解．得到的结果虽然与用格林函数法得到的相同，但可表示为一种对于各种边界条件普遍适用的形式，表达式非常简洁．为了简化起见，这里只讨论标量波动方程和泊松方程的反演问题．当然这一方法并不限于求解标量波动方程和泊松方程的反演问题，只要稍加改变就可以同样用于求解矢量波动方程的反演问题以及其他更复杂的问题．

一、本征函数和本征函数空间变换

先考虑一个用算子形式表示的一般的非齐次问题

$$Lf(\boldsymbol{R}) = -\rho(\boldsymbol{R}). \tag{1}$$

为了更一般化起见，我们让 $L=\mathscr{L}+k^2$．这里L为一线性自共轭偏微分算子．它包括线性自共轭偏微分表达式和自共轭边界条件．对于包括齐次边界和无限大边界的电磁场问题，(1)式相当于

$$(\nabla^2+k^2)f(\boldsymbol{R}) = -\rho(\boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{R}\text{ 在域 } v_R \text{ 内;} \tag{2}$$

$$f(\boldsymbol{R})=0 \text{ 或 } \frac{\partial f(\boldsymbol{R})}{\partial n}=0, \qquad \boldsymbol{R}\text{ 在边界 } S_1 \text{ 或 } S_2 \text{ 上;} \tag{3}$$

* 1983年11月16日收到，1984年11月21日修改定稿．

$$\lim_{R_i\to\infty} R_i^{\frac{l-1}{2}}\left[\frac{\partial f}{\partial R_i}-ihf\right]=0,\qquad \text{在 } S_\infty \text{ 上}. \tag{4}$$

这里 f 属于场函数空间；ρ 属于源函数空间；$\boldsymbol{R}$ 表示三维欧氏空间中的一个点；R_i 为 $\boldsymbol{R}$ 空间中的某一子空间，l 为这一子空间的维数；S_1 和 S_2 分别表示第一类和第二类齐次边界，S_∞ 表示无限大边界；(3)式表示第一类或第二类齐次边界条件；(4)式表示对于无限大边界的辐射边界条件，辐射边界条件也可以作为自共轭边界条件的一种；k 为传播常数，它正比于频率 ω；h 为对应于 R_i 坐标的传播常数．我们不单独讨论泊松方程的情况，只把它作为 $k=0$ 的一个特例．为了完成(1)式的反演，我们先讨论一下它的本征问题，即它所对应的齐次问题的解，

$$\mathscr{L}\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})+\lambda^2\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})=0 \tag{5}$$

这里 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 为算子 $\mathscr{L}$ 对应于本征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的本征函数，当 $\mathscr{L}$ 自共轭时，$\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 具有两个重要的特性：

(1) 对于两个不同的本征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}'$ 的本征函数 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 和 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{R})$ 是正交的，即

$$\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{R})\rangle_R=0,\ \boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{\lambda}'. \tag{6}$$

这里下标 R 表示在 $\boldsymbol{R}$ 空间里求内积．$\boldsymbol{R}$ 空间是连续空间．对于连续空间，内积定义为积分的形式：

$$\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{R})\rangle_R=\iiint_{v_R}\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})\mathscr{F}^*(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{R})dv. \tag{7}$$

这里“*”表示复共轭，v_R 为 $\boldsymbol{R}$ 空间的体积．

(2) $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 组成了一个完备的正交基，凡属于算子 $\mathscr{L}$ 所定义的空间内的任意一个函数 $f(\boldsymbol{R})$ 都可以在 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 的 $\boldsymbol{\lambda}$ 空间内展开．$\boldsymbol{\lambda}$ 空间的性质与 $\boldsymbol{R}$ 的边界条件有关．当 $\boldsymbol{R}$ 的整个边界都是第一类或第二类齐次边界时，则 $\boldsymbol{\lambda}$ 所属的子空间 λ_1, λ_2, λ_3 都是离散的，$\boldsymbol{\lambda}$ 是一完全的离散空间．这时函数的展开形式为一广义的傅里叶级数：

$$f(\boldsymbol{R})=\sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2}\sum_{\lambda_3}g(\boldsymbol{\lambda})\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}), \tag{8}$$

而当 $\boldsymbol{R}$ 的某一子空间 R_i 为无限大边界时，则与它对应的本征值 λ_i 就是连续的．这样，一般情况下 $\boldsymbol{\lambda}$ 空间是混合空间，它的某些子空间是连续的而另一些则又是离散的．对于这种情况，它的展开形式也是混合的形式：

$$f(\boldsymbol{R})=\int d\lambda_i\sum_{\lambda_j}g(\boldsymbol{\lambda})\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}). \tag{9}$$

这里 i 表示所有的连续本征值，它既可以表示 1, 2, 3 中的任一个或任两个，也可以表示全部三个或者一个也不表示；而 j 则表示 i 以外的部分，即所有的离散本征值．在可以得到解析解的实际问题中，总是可以用分离变量法把 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 和 $g(\boldsymbol{\lambda})$ 表示成分离变量的形式．这样，(9)式的实际形式为：

$$f(\boldsymbol{R})=\int d\lambda_i g_i(\lambda_i)F_i(\lambda_i,R_i)\sum_{\lambda_j}\sum_{\lambda_k}g_j(\lambda_j)g_k(\lambda_k)F_j(\lambda_j,R_j)F_k(\lambda_k,R_k). \tag{10}$$

这里 λ_i 是连续的，而 λ_j, λ_k 是离散的．对于广义坐标的情况，本征函数常以伴随函数

的形式出现，即 F_j 中常包含 λ_i 本征值. 这样积分和级数就不能分离成三个独立的积分或级数的乘积的形式. 为了形式上简洁起见(8)式或(9)式也可以表示成在 $\boldsymbol{\lambda}$ 空间的内积的形式：

$$f(\boldsymbol{R})=\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ g^*(\boldsymbol{\lambda})\rangle_\lambda. \tag{11}$$

当然(11)式的具体形式就是(8)或(9)式，如果定义 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})$ 是归一化的，从它的正交性可以得到

$$g(\boldsymbol{\lambda})=\langle f(\boldsymbol{\xi}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi})\rangle_\xi. \tag{12}$$

(11)式和(12)式组成了一个本征函数变换对. 它概括了傅里叶级数、傅里叶积分以及各种广义的傅里叶级数和傅里叶积分的变换形式. 把(11)式和(12)式结合起来，我们可以定义一个多重内积的形式，它相当于多重的积分或级数和：

$$f(\boldsymbol{R})=\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \langle f(\boldsymbol{\xi}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi})\rangle_\xi^*\rangle_\lambda. \tag{13}$$

利用(13)式我们可以得到 δ 函数的本征函数的展开式. 首先，作为 δ 函数定义的内积形式可以表示为

$$f(\boldsymbol{R})=\langle\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'),f^*(\boldsymbol{R}')\rangle_{R'}. \tag{14}$$

如果我们令 $f(\boldsymbol{R})=\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$ 和 $f(\boldsymbol{\xi})=\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{R}')$，代入(13)式，并应用(14)式则得

$$\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')=\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}')\rangle_\lambda. \tag{15}$$

当我们在 $\boldsymbol{R}$ 空间对两个对应于不同的本征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的本征函数求内积时，应该得到本征值空间中的 δ 函数. 由于上面指出的本征值有连续的和离散的两种情况，即

$$\langle\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\mathscr{F}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{R})\rangle_R=\begin{cases}\delta_{\lambda,\mu}, & \boldsymbol{\lambda}\ \text{为离散谱;}\\ \delta(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}), & \boldsymbol{\lambda}\ \text{为连续谱.}\end{cases} \tag{16}$$

当然，也可能出现混合的情况，即对某一本征值是离散的，而对其他的是连续的. 这样，多维的 δ 函数中，有些是狄拉克 (Dirac)δ 函数，有些则是克罗内克 (Kroneker)δ 函数.

二、用本征函数作矩量法中的展开函数和试函数求解算子方程的反演

用矩量法求解非齐次问题(1)式的反演的基本步骤如下：首先找出一个展开函数 u_λ，让场函数 $f(\boldsymbol{R})$ 在 u_λ 上展开，

$$f(\boldsymbol{R})=\sum_\lambda\alpha_\lambda u_\lambda. \tag{17}$$

然后再寻找一个权函数组，或叫试函数 w_μ，让(1)式的两边对 w_μ 取内积. 代入(17)式，并利用算子 L 的线性，可以得到

$$\sum_\lambda\alpha_\lambda\langle w_\mu,Lu_\lambda\rangle_R=-\langle w_\mu,\rho(\boldsymbol{R})\rangle_R. \tag{18}$$

用矩阵的形式，可以把(17)和(18)式改写为：

$$f=(u_\lambda)^T(\alpha_\lambda) \tag{19}$$

和

$$(\alpha_\lambda) = (l_{\mu,\lambda})^{-1}(g_\mu), \tag{20}$$

其中 $(l_{\mu,\lambda})^{-1}$ 为 $(l_{\mu,\lambda})$ 的逆矩阵,而

$$l_{\mu,\lambda} = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lu_1\rangle & \langle w_1, Lu_2\rangle \cdots\cdots \langle w_1, Lu_\lambda\rangle \\ \langle w_2, Lu_1\rangle & \langle w_2, Lu_2\rangle \cdots\cdots \langle w_2, Lu_\lambda\rangle \\ \cdots\cdots & \\ \langle w_\mu, Lu_1\rangle & \langle w_\mu, Lu_2\rangle \cdots\cdots \langle w_\mu, Lu_\lambda\rangle \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$g_\mu = -\begin{bmatrix} \langle w_1, \rho\rangle \\ \langle w_2, \rho\rangle \\ \vdots \\ \langle w_\mu, \rho\rangle \end{bmatrix} \tag{22}$$

和

$$(u_\lambda)^T = [u_1, u_2, \cdots u_\lambda]. \tag{23}$$

为了便于计算,u 和 w 都取相同的阶,这样 $l_{\mu,\lambda}$ 就是一个方阵. 在电磁场的数值计算中,我们取 u 和 w 为便于计算的各种离散的形状函数,然后用数值法求 $(l_{u,\lambda})$ 的逆. 在解析中,我们自然希望选择合适的 u 和 w 使矩阵 $(l_{\mu,\lambda})$ 是一个对角矩阵,这样就可以很方便地写出 α_λ 的解析形式. 从本征函数的性质,我们可以证明,只要取 u 和 $\boldsymbol{w}$ 为本征函数 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{R})$, $l_{\mu,\lambda}$ 就是一个对角矩阵. 只要记住 $L = \mathscr{L} + k^2$ 和 $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{R})$ 满足(5)式,就可以得到

$$\begin{aligned} \langle w_\mu, Lu_\lambda\rangle_R &= \langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{R}), (\mathscr{L} + k^2)\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{R})\rangle_R \\ &= \langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{R}), (k^2 - \lambda^2)\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{R})\rangle_R \\ &= (k^2 - \lambda^2)\delta_{\lambda,\mu}. \end{aligned} \tag{24}$$

这里利用(16)式,并假定 $\boldsymbol{\lambda}$ 都是离散的,便可得:

$$\alpha_\lambda = \frac{-1}{k^2 - \lambda^2}\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}), \rho(\boldsymbol{\xi})\rangle_\xi. \tag{25}$$

代入(17)式,则得

$$f(\boldsymbol{R}) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^2 - k^2}\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}), \rho(\boldsymbol{\xi})\rangle_\xi u_\lambda. \tag{26}$$

这里只讨论了 λ 是离散的情况,但(25)式实际上不仅仅适用于离散的 $\boldsymbol{\lambda}$,同样也适用于连续的 λ. 对连续的 λ,(17)式的级数改为积分的形式.对于积分形式,利用算子 L 的线性特性,同样可以把 α_λ 提到积分号外面,再利用算子的自共轭性,也可以得到(25)式的结果. 这样,我们应用(11)式的内积形式,不论本征值是连续的、离散的、还是混合的,(26)式都可以写成

$$f(\boldsymbol{R}) = \left\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{R}), \frac{1}{\lambda^2 - k^2}\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}), \rho(\boldsymbol{\xi})\rangle_\xi \right\rangle_\lambda. \tag{27}$$

(27)式是对源点所在的空间和本征值空间的双重内积. 众所周知,对于双重积分和双重和式,求积分和求和的次序可以适当地改变;同样,对于双重内积,求内积的次序也可以适当地改变;此外,为了与习惯一致起见,我们用 $\boldsymbol{R}'$ 代替 $\boldsymbol{\xi}$ 来表示源所在的空间. 这样,(27)式就可以变换成通常的格林函数的形式

$$f(\boldsymbol{R})=\left\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \frac{1}{\lambda^2-k^2}\langle \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}'),\ \rho(\boldsymbol{R}')\rangle_{R'}\right\rangle_{\lambda}$$

$$=\left\langle\left\langle\frac{1}{\lambda^2-k^2}\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}')\right\rangle_{\lambda},\ \rho^*(\boldsymbol{R}')\right\rangle_{R'}. \tag{28}$$

我们很容易把(28)式表示成格林函数的形式，只要令

$$G(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}')=\left\langle\frac{1}{\lambda^2-k^2}\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}')\right\rangle_{\lambda}, \tag{29}$$

就可得到

$$f(\boldsymbol{R})=\langle G(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}'),\ \rho^*(\boldsymbol{R}')\rangle_{R'}. \tag{30}$$

(29)和(30)式就是应用线性函数空间理论所求得的非齐次问题 (1) 式的反演形式. 与我们熟悉的格林函数法相比较，显然可以看出 (29) 式就是格林函数的内积形式. 这一形式不但非常简明，而且可以适用于任何具有(3)和 (4) 式确定的两类边界条件的系统. 它既可用于标量波动方程，也可用于泊松方程. 对于泊松方程问题，只要令 $k=0$ 就行了，即对于泊松方程

$$G(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}')=\left\langle\frac{1}{\lambda^2}\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}),\ \mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R}')\right\rangle_{\lambda}. \tag{31}$$

三、无限长矩形波导中的格林函数

作为应用的一个例子，我们讨论无限长矩形波导中的格林函数问题. 我们选择 z 方向作为无限大方向，并假定 x 方向的边界为 $(0,\ a)$，y 方向的边界为 $(0,\ b)$. 很容易写出归一化的本征函数为

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{R})=\sqrt{\frac{2}{\pi ab}}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\,e^{ihz}. \tag{32}$$

我们先考虑标量波动方程的格林函数. 应用(29)式，并考虑 (10) 式表示的混合的内积形式，得

$$G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')=\frac{2}{\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty}dh\,e^{i(z-z')h}\sum_m\sum_n\frac{1}{\lambda^2-k^2}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x'\sin\frac{m\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}y', \tag{33}$$

这里

$$\lambda^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+h^2. \tag{34}$$

为了把对 h 的积分求出来，我们应用文献[1]中讨论过的取闭合迴路的方法，并令

$$k_c^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \tag{35}$$

$$k_g=(k^2-k_c^2)^{1/2}. \tag{36}$$

(33)式对传输模式和衰减模式都可应用. 对传输模式，令

$$k_g=|(k^2-k_c^2)^{1/2}|,\qquad \text{当}\ k>k_c; \tag{37}$$

对衰减模式，k_g 为虚数，令

$$k_g = i|(k_c^2 - k^2)^{1/2}|, \qquad k_c > k. \tag{38}$$

按柯西（Cauchy）留数定理可得

$$G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \frac{2i}{ab}\sum_m\sum_n \frac{1}{k_g}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x'\sin\frac{m\pi}{b}y \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y' e^{ik_g|z-z'|}. \tag{39}$$

对于我们感兴趣的静电场的情况，只要令 $k = 0$，则

$$k_g = ik_c. \tag{40}$$

代入(39)式，得

$$G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \frac{2}{ab}\sum_m\sum_n \frac{1}{\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x' \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}y'\exp\left\{-\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \cdot |z - z'|\right\}. \tag{41}$$

这与用一般方法得到的结果完全一样．对于其他的情况，也可以得到同样的结果．

四、小　结

从上面的讨论可以看出，应用基于线性函数空间理论的矩量法，不仅可以解决电磁场的数值计算，而且可以解决电磁场的解析法求解．这样，在线性函数空间理论上，这两种方法就统一起来了．

由线性函数空间理论导出的电磁场的边值问题的公式非常简单，而且有很大的普遍性．很容易用这一普遍公式去解决具体边界下的各种激励问题．

这一方法的意义不仅在于可以用来解决标量波动方程和泊松方程的反演问题，而且可以用来解决更一般的电磁场问题，例如矢量波动方程的反演问题．

参 考 文 献

[1] C. T. Tai, Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory, Intext Educational publishers, Scranton, Pa. 1971.
[2] R. E. Collin, *Can. J. Physics*, **51**(1973), 1135.
[3] C. T. Tai, *Proc. IEEE* **61** (1973), 480.
[4] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, The Macmillan Company, New York, 1968.

INVERSE TRANSFORM OF THE SCALAR WAVE EQUATION AND POISSION'S EQUATION BY THE CONCEPTS OF LINEAR SPACE

Song Wenmiao

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

The moment method based on the concepts of linear space can be applied not only to numerical computation of the Electromagnetic field, but also to the analytic solution. By taking the eigenfunctions as basis functions and test functions, a very simple, but generalized formula of the solution for the scalar wave equations and Poission's equations can be got. This formula not only can be applied to the scalar wave equations; but also can be applied to vector wave equations by some modifications.