

## 参数未知的时延混沌系统滑模变结构同步控制

张洪 陈天麒

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:** 将滑模控制策略用于时延混沌系统的同步, 采用了对系统参数摄动鲁棒性好的变结构控制, 使系统对噪声和参数失配情况具有更强的鲁棒性。同时将自适应技术、系统辨识技术应用于系统中的未知参数逐步逼近, 实现具有扰动以及参数未知的时延混沌系统的同步。仿真结果证实了该方法的有效性。

**关键词:** 混沌同步, 自适应参数估计, 滑模

中图分类号: TP271<sup>†</sup>.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)12-1937-05

## Synchronization of Time-Delay Chaotic Systems with Uncertainty Based on Sliding Mode Controller

Zhang Hong Chen Tian-qi

(College of E.E UESTC, Chengdu 610054, China)

**Abstract** This paper presents a sliding mode control method for synchronizing a class of unknown parameters time-delayed chaotic system. The variable structure control scheme provides robust synchronization even in the presence of unknown disturbance. And adaptive method is used to estimate unknown parameter. Finally, numerical results are used to show the robustness and effectiveness of the proposed control strategy.

**Key words** Chaotic system synchronization, Adaptive parameter estimation, Sliding mode

### 1 引言

自从Carroll和Pecora<sup>[1]</sup>提出著名的混沌同步方法以后, 混沌同步引发了人们对它在物理, 数学以及通讯工程等领域应用的研究热情, 特别值得指出的是作为保密通信的关键, 混沌同步已经成为一个非常重要的研究方向<sup>[2-5]</sup>。现有的许多研究主要集中于只有一个正Lyapunov指数的低维混沌系统同步通信, 由于这种系统的复杂性不高, 在保密通讯中很容易被破译<sup>[6]</sup>, 使同步研究转向于具有多个正Lyapunov指数的高维混沌系统(非时延超混沌系统), 但这会使同步系统的结构变得异常庞大复杂, 增加了同步的难度。时延混沌系统由于自身的无穷维特性, 能够产生具有多个正Lyapunov指数的混沌吸引子。系统正Lyapunov指数的个数不再受系统维数的限制, 同时可以采用较为简洁的同步方式, 克服了非时延混沌系统的弱点, 使它特别适用于保密通讯。

滑模控制作为一种非线性控制策略, 以其良好的鲁棒性在混沌同步中得到应用<sup>[7]</sup>。由于滑模同步控制中需要使用大量的系统信息, 对于自身具有无穷维特性时延混沌系统而言是难以观测的, 从而不利于工程的实现。因此本文提出了时

延混沌系统基于滑模变结构的同步控制方法, 采用估计值代替系统信息, 使系统在一定的条件下对误差的摄动和外干扰具有不变性, 增强控制系统的鲁棒性; 同时将自适应技术、系统辨识技术与之结合起来, 利用辨识技术对系统参数进行渐进估计, 以此实现参数未知的时延混沌系统的同步, 使其符合实际通信的情况需要。理论与仿真研究表明, 该方法能够实现存在干扰以及系统参数未知、不同初始条件下混沌系统的同步。

### 2 基于变结构滑模控制同步

#### 2.1 问题描述

考虑下述的连续时延混沌系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\}) \quad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) + u \quad (2)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为时延混沌系统状态变量,  $\{a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  为原系统的参数;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  为同步

时延混沌系统状态变量,  $\{a'_i, b'_i, i=1,2,\dots,n\}$  为同步系统参数;  $u$  为控制量。

定义同步误差

$$\frac{de}{dt} = F(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - [F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] + u \quad (3)$$

其中  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^T$ , 为了实现系统的同步控制, 我们的目标就是设计有效的控制器  $u$ , 使系统在不确定系统参数条件下, 实现误差  $e$  随着时间  $t$  趋向于无穷大而收敛于零。本文选择变结构滑模控制, 是因为系统在滑动模上对参数的不确定和外部的干扰有更好的鲁棒性<sup>[8]</sup>, 符合工程上实际控制需要。具体的滑模控制器分析如下。

### 2.2 滑模控制器的设计与分析

2.2.1 滑动模平面的控制器设计 一般来说, 滑动模平面可以设计如下:

$$s(e) = ce \quad (4)$$

其中  $c = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$  是  $n$  维对角阵。为了不失一般性, 我们

选择滑模平面的控制律如下:

$$u(t) = kw(t) \quad (5)$$

其中  $k = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$  也是  $n$  维对角阵, 把它带入式(3)可得

$$\frac{de}{dt} = F(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - [F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] + kw(t) \quad (6)$$

在滑模开关平面  $s(e) = 0$  上, 使系统稳定的控制律约束条件应该满足  $\frac{ds(e)}{dt} = 0$ , 以保证系统的状态轨迹稳定在滑模平面上。因此控制系统应满足下列条件:

$$s(e) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{ds(e)}{dt} = 0 \quad (7b)$$

把式(4)和式(6)带入式(7b), 可得

$$\frac{ds(e)}{dt} = c[F(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - [F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] + kw(t)] = 0 \quad (8)$$

此时系统处于滑模平面  $s(e) = ce$  上, 且有  $s(e) = 0$ , 对系统线性化近似取值, 可得

$$\left. \begin{aligned} F(y(t), \{a'_i\}) - F(x(t), \{a_i\}) &\approx (A + \Delta A)e \\ G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - G(x(t-\tau), \{b_i\}) &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中未知参数的同步可以由自适应参数辨识技术获得, 具体的方法在 2.3 节中将给予说明, 这里就不再详细解释。令  $w(t) = e$ , 可得

$$\frac{ds(e)}{dt} = c(A + \Delta A + k)e = 0 \quad (10)$$

我们知道, 通过选择适当的  $c, k$  值, 可以使系统关于  $c(A + \Delta A + k)$  有负实部的特征根, 此时控制系统是渐进稳定的, 即误差  $e$  随时间  $t$  的增大而收敛于 0 点。

2.2.2 滑模控制器的设计 我们选择到达律为

$$\frac{ds(e)}{dt} = -rs \quad (11)$$

其中增益  $r > 0$  是滑模运动产生的充分条件。

将式(4), 式(6)带入式(11), 可以得到

$$\frac{ds(e)}{dt} = c[F(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - [F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] + kw(t)] = -rs \quad (12)$$

因此, 有

$$w(t) = -(ck)^{-1} [cF(y(t), \{a'_i\}) - cF(x(t), \{a_i\}) + cG(y(t-\tau), \{b'_i\}) - cG(x(t-\tau), \{b_i\}) + rs] \quad (13)$$

此时, 滑模控制需要得到系统的状态信息对系统进行控制, 在实际的工程应用中, 式(14)是不能预先确定的。

$$c \left[ F(y(t), \{a'_i\}) - F(x(t), \{a_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - G(x(t-\tau), \{b_i\}) \right] \quad (14)$$

但由混沌的定义可知, 混沌存在奇异吸引子, 它是由有限区域内的轨道无穷伸缩、折叠而形成的复杂空间结构。因此给定系统的变量  $y(t), x(t)$  值域是有界的, 可以预先给定的, 当函数  $F(\bullet), G(\bullet)$  连续, 可微 (对于绝大多数混沌系统能够满足这一要求) 时, 由变量  $y(t), x(t)$  的值域有界可以求出函数  $F(\bullet), G(\bullet)$  的值域有界。于是选择合适的值域  $M > 0$ , 有式(15)成立。

$$\left| c \left[ F(y(t), \{a'_i\}) - F(x(t), \{a_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) - G(x(t-\tau), \{b_i\}) \right] \right| < M \quad (15)$$

这里  $M$  的取值比实际误差微分变量取值范围要大, 虽然从能量的角度考虑形成了一定的浪费, 但另一方面却对于干扰的扰动起到抑制作用, 加速了系统的同步速度, 对系统的同步

是有益的。于是  $w(t)$  可以取

$$w(t) = -(ck)^{-1} [M \operatorname{sgn}(s) + rs] \tag{16}$$

作为控制项来实现系统的同步，文中  $\operatorname{sgn}(\bullet)$  表示符号函数， $\operatorname{sgn}(\bullet)$  的引入保证了控制项加入后函数  $F(\bullet), G(\bullet)$  依然有界。同步结果的具体证明在 2.4 节中给出。

### 2.3 不确定参数的辨识

借助自适应控制理论中的最速下降法有

**定理 1** 对于连续时延混沌系统式(1)和式(2)，如果其映射  $F(x), G(x)$  在其定义域内连续、可微，且其 Jacob 矩阵连续、有界，则其未知系统参数可以利用下式进行辨识：

$$\frac{da'_i}{dt} \propto -e \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial a'_i} \right) \tag{17a}$$

$$\frac{db'_i}{dt} \propto -e \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial b'_i} \right) \tag{17b}$$

**证明** 如果在控制项  $u(t)$  作用下，参数  $\{a'_i, b'_i\}$  趋近于未知参数  $\{a_i, b_i\}$ ，那么将会实现发送器和接收器同步，此时，误差变量  $\|e\|$  将会趋于零。因此，为了寻找同步系统误差最小时的未知参数形式，引入状态变量来辨识不确定系统参数，根据最速下降法原理，有

$$\begin{aligned} \frac{da'_i}{dt} \propto -\frac{\partial e^2}{\partial a'_i}, \quad \frac{db'_i}{dt} \propto -\frac{\partial e^2}{\partial b'_i}, \quad \text{即} \\ \frac{da'_i}{dt} \propto -e \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial a'_i} \right), \quad \frac{db'_i}{dt} \propto -e \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial b'_i} \right) \end{aligned}$$

### 2.4 稳定性鲁棒分析

为了检验上述控制系统的稳定性，我们构建下面的 Lyapunov 函数来进行验证

$$V = \frac{1}{2} s^2 \tag{18}$$

求取 Lyapunov 函数对时间的导数，可得

$$\frac{dV}{dt} = s \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial e} \frac{de}{dt} s$$

把式(6)，式(16)代入式(18)，可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= s \{ cF(y(t), \{a'_i\}) + G(y(t-\tau), \{b'_i\}) \\ &\quad - [F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] + kw(t) \} \\ &= s \{ cF(y(t), \{a'_i\}) + cG(y(t-\tau), \{b'_i\}) \\ &\quad - c[F(x(t), \{a_i\}) + G(x(t-\tau), \{b_i\})] - M \operatorname{sgn}(s) - rs \} \end{aligned} \tag{19}$$

由式(15)可知

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq s(-rs) \\ &= -rs^2 \end{aligned} \tag{20}$$

且当  $e \neq 0$  时，不等式  $\frac{dV}{dt} < 0$  总是成立，也就是说，在参数未知条件下，控制输入式(16)是控制系统稳定鲁棒性的充分条件。

## 3 数值分析与模拟结果

为了验证上述策略的适用性，分别以单时延混沌系统和二时延混沌系统为例进行仿真，具体的方程描述如下：

### 3.1 单时延系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a \sin(5x(t)) - b \sin(5x(t-\tau)) \tag{21}$$

当  $a=1, b=2, \tau=1$  时系统处于混沌状态<sup>[9]</sup>，如图 1(a)所示。

假设该系统有两个未知参数  $a, b$ ，其中  $a=1+0.1\delta(t)$ ， $b=2$ ， $\delta(t)$  为服从(0,1)分布的高斯白噪声，这样给定主从系统分别如下

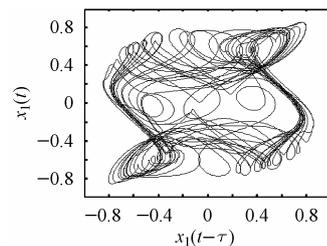
$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a \sin(5x(t)) - b \sin(5x(t-\tau)) \tag{22}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a' \sin(5y(t)) - b' \sin(5y(t-\tau)) + u \tag{23}$$

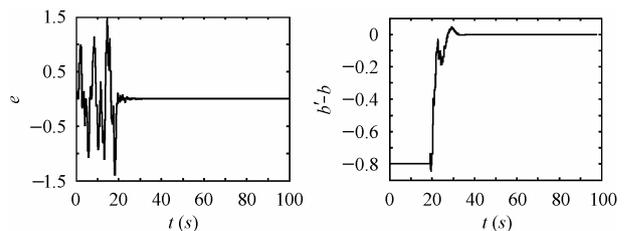
令  $e = y - x$ ，有

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -e + a' \sin(5y(t)) - a \sin(5x(t)) \\ &\quad - (b \sin(5y(t-\tau)) - b' \sin(5x(t-\tau))) + u \end{aligned} \tag{24}$$

按照前面的设计方法，可以求得  $A \approx 4, \Delta A \approx 0.5$ 。我们选择增益  $k=-8$ ，滑模平面为  $s(e) = e$ ，此时在滑模平面上是渐进稳定的。参考稳定鲁棒性条件，选择  $r=1, M=10$ ，我们有控制输入：



(a) 当  $a=1, b=2, \tau=1$  时系统的式(21)状态图



(b) 误差  $e$  随时间  $t$  的变化图 (c) 参数  $b' - b$  随时间  $t$  的变化图

图 1 单时延混沌系统的状态图以及同步结果

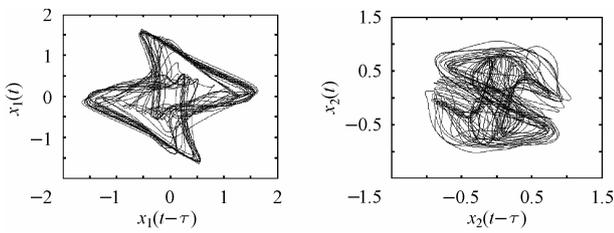
$$w(t) = 0.125e + 1.25\text{sgn}(s) = \begin{cases} 0.125e + 1.25, & s(e) > 0 \\ 0.125e - 1.25, & s(e) < 0 \end{cases} \quad (25)$$

任意给定系统的初始值，并且假定  $a' = 1.4$ ， $b' = 1.2$ ，在 20s 后，当系统轨迹呈现混沌状态时，加入滑模控制器进行控制，控制结果如图 1(b)，图 1(c) 所示，从图中可以看到当控制器加入后，误差  $e$  随着时间  $t$  增大而趋近于零。

3.2 二时延混沌系统

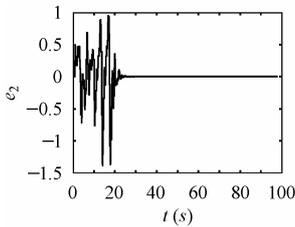
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1(t) + a_1 \sin(px_2(t)) - b_1 \sin(px_2(t-\tau)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2(t) + a_2 \sin(px_1(t)) - b_2 \sin(px_1(t-\tau)) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

当  $a_1 = 3$ ， $a_2 = 2.1$ ， $b_1 = 1.85$ ， $b_2 = 1.05$ ， $p = 2.81$  时系统处于混沌状态<sup>[9]</sup>，如图 2(a)，图 2(b) 所示。

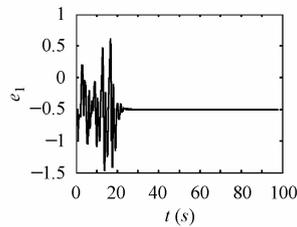


(a) 二时延混沌  $x_1(t)$  与  $x_1(t-\tau)$  的状态相图

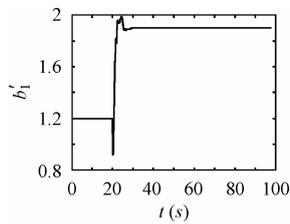
(b) 二时延混沌  $x_2(t)$  与  $x_2(t-\tau)$  的状态相图



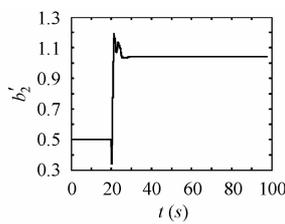
(c) 误差  $e_1 = y_1 - x_1$  随时间  $t$  的变化图



(d) 误差  $e_2 = y_2 - x_2$  随时间  $t$  的变化图



(e) 参数  $b_1'$  随时间  $t$  的变化图



(f) 参数  $b_2'$  随时间  $t$  的变化图

图 2 二时延混沌系统的状态图以及同步结果

假设该系统有未知参数  $a_1$   $a_2$   $b_1$   $b_2$ ，其中  $a_1 = 3 + 0.1\delta(t)$ ， $b_1 = 1.85$ ， $a_2 = 2.1 + 0.05\delta(t)$ ， $b_2 = 1.05$ ， $\delta(t)$  为服从(0,1)分布的幅值为 1 的高斯白噪声，分别给定主从系统如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1(t) + a_1 \sin(px_2(t)) - b_1 \sin(px_2(t-\tau)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2(t) + a_2 \sin(px_1(t)) - b_2 \sin(px_1(t-\tau)) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1(t) + a_1' \sin(py_2(t)) - b_1' \sin(py_2(t-\tau)) + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2(t) + a_2' \sin(py_1(t)) - b_2' \sin(py_1(t-\tau)) + u_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

令  $e = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ ，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= -e_1(t) + a_1' \sin(py_2(t)) - b_1' \sin(py_2(t-\tau)) \\ &\quad - a_1 \sin(px_2(t)) + b_1 \sin(px_2(t-\tau)) + u_1 \\ \frac{de_2}{dt} &= -e_2(t) + a_2' \sin(py_1(t)) - b_2' \sin(py_1(t-\tau)) \\ &\quad - a_2 \sin(px_1(t)) + b_2 \sin(px_1(t-\tau)) + u_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

按照前面的设计方法，可以求得  $A \approx \begin{bmatrix} -1 & 8.5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ ，

$\Delta A \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix}$ 。我们选择增益  $k = \begin{bmatrix} -1, 0 \\ 0, -1 \end{bmatrix}$ ，滑模平面为

$s(e) = e$ ，此时在滑模平面上是渐进稳定的。参考稳定鲁棒

性条件，选择  $r = \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ ， $M = \begin{bmatrix} 10, 0 \\ 0, 10 \end{bmatrix}$ ，于是有控制输入：

$$w(t) = e + 10\text{sgn}(s) \quad (30)$$

数值模拟中同样任意给定系统的初始值，并且假定  $a_1' = 2.5$ ， $a_2' = 1.4$ ， $b_1' = 1.2$ ， $b_2' = 0.5$ ，在 20s 后，当系统轨迹呈现混沌状态时，加入滑模控制器进行控制，控制结果如图 2(c) - 图 2(f) 所示，从图中可以看到当控制器加入后，误差  $e_1$ ， $e_2$  随着时间  $t$  增大而趋近于零。图 1 与图 2 的模拟结果进一步检验了第 2 节中的理论分析，可见本文提出的方法对于具有干扰与未知参数的时延混沌系统的同步是可行的。

4 结束语

本文从非线性控制及自适应参数估计的角度出发，针对一类时延混沌系统，提出了基于自适应参数估计的变结构滑模控制器，对时延混沌系统的同步控制进行了可达性与稳定性理论分析与证明，并通过数值仿真结果进一步验证了该方法的可行性；实现了在参数未知以及存在干扰情况下，时延混沌系统的同步。这对时延混沌在实际应用中克服干扰，进行通信提供了有效的解决方法。

参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8): 821 – 824.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals, *Phys. Rev. A.*, 1991, 44(4): 2374 – 2383.
- [3] Niemeyer H, Marvels I M Y. An observer looks at synchronization. *IEEE Trans. on CAS-I*, 1997, 44(10): 882 – 890.
- [4] Chen J Y, Wong K W, Chen Z X, *et al.* Phase synchronization in discrete chaotic systems. *Phys.Rev.E*, 2000,61(3): 2559 – 2562.
- [5] John R T, Gregory D V. Chaotic communication using generalized synchronization. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(1): 145 – 152.
- [6] Yang T, Lin B Y, Chun M Y. Application of neural networks to unmasking chaotic secure communication. *Physica D*, 1998, 124(1~3): 248 – 257.
- [7] Zhang Hao, Ma Xi-kui, Liu Wen-zeng. Synchronization of chaotic systems with parametric uncertainty using active sliding mode control. *Chaos, Solitons and Fractals*, (2004)21: 1249 – 1257.
- [8] Liao T L, Nuang N S. Control and synchronization of discrete-time chaotic systems via variable structure control technique. *Physics Letter A*, 1997, 234: 262 – 268.
- [9] 周尚波, 廖晓峰, 余厥邦. 具有简单时延的神经元模型的混沌行为. *电子与信息学报*, 2002, 24(10): 1341 – 1345.
- 张 洪: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为非线性控制系统、以及混沌同步的分析与研究.
- 陈天麒: 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 从事自适应信号处理、信号多参量估计与跟踪及电子工程系统等方面的研究工作.
- [7] Zhang Hao, Ma Xi-kui, Liu Wen-zeng. Synchronization of chaotic systems with parametric uncertainty using active sliding