第 12 卷 第 6 期 电 子 科 学 学 刊 Vol. 12, No. 6
1990 年 11 月 JOURNAL OF ELFCTRONICS Nov., 1990

任意有向图的最小 K 边连通扩充***

孙立山 孙雨耕 杨山
(哈尔滨工业大学) (天津大学自动化系)

摘要 本文研究了以最小边集扩充一个任意有向图为K边连通有向图这一优化问题. 提出了一个复杂度为 $O(|V|^5)$ 的有效算法. 该算法为可靠网络的计算机辅助设计打下了基础.

关键词 图论;有向图;K 边连通有向图

一、前 言

设图 $G=(V,E)$ 表示一个有向图,V表示图G的顶点集合,E表示图G的边集合. 如果对 $V_s\subset V$ 中的任意两点 x 和 y,从 x 到 y 和从 y 到 x 均有 K (K 是任意的正整数)条边不相重的有向路径,则称点集 V_s 是K边连通的. 如果点集V是K边连通的,则称图G是K边连通的.

对于有向图 $G_0=(V,E_0)$, 所谓G_0的最小K边连通扩充问题就是求一个具有最少数目的有向扩充边集 E',当 E' 加到 G_0后, 使得图 $G=(V, E_0\cup E')$ 是K边连通的. Eswaran 和 Tarjan[1] 首先研究了边连通扩充问题,证明了加权扩充问题属于 NP 完全问题,并提出了一个扩充任意有向图为强连通图($K=1$)的有效算法. Kajitani 和 Ueno[2] 提出了一个扩充有向树图为K边连通有向图的有效算法. 但是, 一般的有向边连通扩充问题仍未解决.

本文提出了一个扩充任意有向图为K边连通有向图的有效算法. 首先, 根据图中各点的余度将该图增广扩充;然后,检查各点之间的边连通度,并把点集V划分成多个子集,每个子集是K边连通的;再根据最优准则增加有向扩充边使得各子集之间是K边连通的,并把各个子集合并成一个点集;最后进行可行删除,去掉增广点得到一个最小K边连通有向图.

二、基本定义和定理

在有向图 $G=(V,E)$ 中,$(x,y)_G$ 表示始点为 x,终点为 y 的边集. $E^+(A,B;G)$表示始点在点集A中,终点在点集B中的边集.此外 $E^-(A, B;G)=E^+(A,B;G)$, $E(A,$

* 1989 年 3 月 27 日收到,1989 年 10 月 10 日修改定稿.
** 国家自然科学基金资助项目.

$B;G) = E^+(A,B;G) \cup E^-(A,B;G)$. $E^+(A;G) = E^+(A,\bar{A};G)$, $E^-(A;G) = E^-(A,\bar{A};G)$. $d^+(A;G) = |E^+(A;G)|$ 和 $d^-(A;G) = |E^-(A;G)|$ 分别表示点集A的出度和入度. 点x和y之间的边连通度 $\lambda(x,y;G)$ 定义为

$$\lambda(x,y;G) = \min\{d^+(X;G): X \subset V,\ x \in X, y \in \bar{X}\}$$

即它等于使从x到y的有向路径中断所需从G中移去的最少有向边数. 相应地，图G的边连通度$\lambda(G)$定义为

$$\lambda(G) = \min_{\{x,y\} \in V} \lambda(x,y;G)$$

定义集合 $T(x,y;G)$ 为

$$T(x,y;G) = \{X \subset V: x \in X,\ y \in \bar{X} \text{ 且 } d^+(X;G) = \lambda(x,y;G)\}$$

对于点集 $A \in T(x,y;G)$, $E^+(A;G)$ 必然是分离从x到y有向路径的最小割集.

引理 1[3] 边连通度不大于最小度,即

$$\lambda(G) \leqslant \min_{x \in V}\{d^+(x;G), d^-(x;G)\}$$

引理 2[4] 设G为无向或有向图,对于任意三个相异点a、b、c,总有

$$\lambda(a,c;G) \geqslant \min\{\lambda(a,b;G),\ \lambda(b,c;G)\}$$

设 $z \in V(G)$, $e \in (x,z)_G$, $e' \in (z,y)_G$, 并且 $x \neq y \neq z$, 定义 $G^{ee'} = [V(G^{ee'}), E(G^{ee'})] = [V(G), (E(G) - \{e,e'\}) \cup f]$ 为图G在z点上的一个删除,其中$f \notin E(G)$,并且f的始点为x,终点为y. 如果G是无向图,若能选择边e和e'使得对G中任意两点a和b均有 $\lambda(a,b;G^{ee'}) = \lambda(a,b;G)$ 成立,则称删除$G^{ee'}$是可行的. 文献[4]已证明了对于无向图总存在着可行删除;如果G是有向图,则仅有以下较弱的形式.

引理 3[5] 设G是一个有向图,z是G中的一点,并且 $d^+(z;G) = d^-(z;G) \geqslant 1$. 那么总存在边$e$和$e'$使得对$G$中任意两点$a$和$b$均有 $\min_{a\neq b\neq z}\lambda(a,b;G^{ee'}) = \min_{a\neq b\neq z}\lambda(a,b;G)$成立.

引理3说明,对于有向图,删除只能保证图G的边连通度 $\lambda(G) = \min_{\{a,b\}\in V}\lambda(a,b;G)$不变,而不能保证图$G$中任意两点之间的边连通度不变. 若一个删除能使$\lambda(G)$不变,则称这个删除为有向可行删除(有时简称可行删除).

三、最优判据

由于图的边连通度总不大于它的最小度,因此,若图G是K边连通有向图,则G中的每一点的出度和入度均应大于或等于K,即 $d^\pm(x;G) \geqslant K$ 是图G为K边连通有向图的一个必要条件. 由此我们扩充一个有向图为K边连通有向图的思路是首先满足它的必要条件,即首先使各点的出度和入度都大于或等于K. 为此,我们用增广扩充图来增加有向扩充边使得图中各点的出度和入度都达到K.

定义 设图 $G^z = (V \cup \{z\}, E_0 \cup E^z)$, 其中 $z \notin V$, $E^z = E(z;G^z)$, 则称G^z是$G_0 = (V, E_0)$ 的增广扩充图,z为增广点,E^z为增广扩充边集. 若G^z除z外是K边连通的,则称G^z是G_0的增广K扩充图;若同时$|E^z|$是最小的,则称G^z是G_0的最小增广K

扩充图.

引理 4　对于有向图 $G_0=(V,E_0)$，它的最小K边连通扩充图 $G=(V,E_0\cup E')$ 可由 G_0 的最小增广K扩充图 $G^z=(V\cup\{z\},\ E_0\cup E^z)$ 经过有向可行删除后去掉 z 点而得到,并且 $|E'|=\max\{d^+(z;G^z),d^-(z;G^z)\}$.

证　若 $d^+(z;G^z)\neq d^-(z;G^z)$,不妨设 $d^+(z;G^z)>d^-(z;G^z)$,任选一点 $x\in V$,在 x 和 z 之间增加 $d^+(z;G^z)-d^-(z;G^z)$ 条有向边(x,z)，所以总可以假设 $d^+(z;G^z)=d^-(z;G^z)=n$. 设 $G=(V,E_0\cup E')$ 是由 G^z 在 z 点连续做 n 次有向可行删除后去掉 z 点而得到的图. 由于 G^z 除 z 外是K边连通的,根据引理 3,G 也是K边连通的,并且 $|E'|=n=\max\{d^+(z;G^z),\ d^-(z;G^z)\}$.

若$|E'|$不是最小的,则必有另一K边连通有向图 $G^*=(V,E_0\cup E^*)$ 使得 $|E^*|<|E'|$. 设图 G^{z*} 是由图 G^* 按下面操作而得到的图：将每一边 $e_i\in E^*$ 用一点 z_i 剖分,最后将所有的 z_i 合并成一点 z^*,则 G^{z*} 除 z^* 外是K边连通的. 并且

$$d^+(z^*;G^{z*})=d^-(z^*;G^{z*})=|E^*|<|E'|=\max\{d^+(z;G^z),d^-(z;G^z)\}$$

即 $|E(z^*;G^{z*})|<|E(z;G^z)|$，和 G^z 是 G_0 的最小增广K扩充图相矛盾，从而得出 G^* 是不存在的.　　证毕

对图 G_0,根据引理 4,只要求出 G_0 的最小增广K扩充图 G^z，然后进行可行删除就可得到 G_0 的最小K边连通扩充图. 那么如何求出 G_0 的最小增广K扩充图 G^z 就成为解决本问题的关键.

在有向图 $G_0=(V,E_0)$ 中,点 v 的K出余度和K入余度分别定义为

$$D_K^+(v;G_0)=\max\{K-d^+(v;G_0),0\},\ D_K^-(v;G_0)=\max\{K-d^-(v;G_0),0\}$$

相应地,点集 $A\subset V$ 的K出余度和K入余度分别定义为

$$D_K^+(A;G_0)=\sum_{v\in A}D_K^+(v;\ G_0),\ D_K^-(A;G_0)=\sum_{v\in A}D_K^-(v;G_0)$$

设图G包含 $G_0=(V,E_0)$ 为其子图,点 $v\in V$ 在G中的出扩充度和入扩充度分别定义为

$$\phi^+(v;G)=d^+(v;G)-d^+(v;G_0),\ \phi^-(v;G)=d^-(v;G)-d^-(v;G_0)$$

相应地,点集 $A\subset V$ 的出扩充度 $\phi^+(A;G)$ 和入扩充度 $\phi^-(A;G)$ 也类似地定义.

引理 5　图 $G^z=(V\cup\{z\},E_0\cup E^z)$ 是图 $G_0=(V,E_0)$ 的增广K扩充图的充要条件是对任一点集 $A\subset V$ 均有

$$\phi^+(A;G^z)\geqslant\max\ \{K-d^+(A;G_0),\ D_K^+(A;G_0)\}$$
$$\phi^-(A;G^z)\geqslant\max\{K-d^-(A;G_0),\ D_K^-(A;G_0)\}$$

证　*充分性*　对任意一点集 $A\subset V$ 有

$$|E^\pm(A;G^z)|=|E^\pm(A;G_0)\cup E^\pm(A,z;G^z)|=d^\pm(A;G_0)+\phi^\pm(A;G^z)\geqslant K$$

由于A是任意的,故对点 $\{x,y\}\in V$, 从 x 到 y 和从 y 到 x 均有K条边不相重有向路径,可见 G^z 除 z 外是K边连通的.

必要性　设 $A\subset V$,既然点集V是K边连通的,那么一定有 $d^\pm(v;G^z)\geqslant K$, $d^\pm(A;G^z)\geqslant K$. 因此可推出 $\phi^\pm(v;G^z)\geqslant D_K^\pm(v;G_0)$, $\phi^\pm(A;G^z)\geqslant D_K^\pm(A;\ G_0)$. 此外 $d^\pm(A;G^z)\leqslant d^\pm(A;G_0)+\phi^\pm(A;G^z)$,故 $\phi^\pm(A;\ G^z)\geqslant d^\pm(A;G^z)-d^\pm(A;\ G_0)\geqslant K-d^\pm(A;$

G_0). 证毕

定理(最优准则) 一个增广K扩充图 $G^z=(V\cup\{z\}, E_0\cup E^z)$ 是图 $G_0=(V, E_0)$ 的最小增广K扩充图，当且仅当存在点集V的两个划分，$V=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$, $V=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$,使得对点集 A_i 和 B_j 有

$$\phi^+(A_i;G^z)=\max\{K-d^+(A_i;G_0),\ D_K^+(A_i;G_0)\},\ i=1,2,\cdots,m$$
$$\phi^-(B_j;G^z)=\max\{K-d^-(B_j;G_0),\ D_K^-(B_j;G_0)\},\ j=1,2,\cdots,n$$

证 假设满足上式的 G^z 不是 G_0 的最小增广K扩充图，则必有另一图 G^{z*} 是 G_0 的最小增广K扩充图,并使得

$$d^+(z^*;G^{z*})+d^-(z^*;G^{z*})=d(z^*;G^{z*})<d(z;G^z)=d^+(z;G^z)+d^-(z;G^z)$$

成立。因 $\phi^+(V;G^z)+\phi^-(V;G^z)=\phi(V;\ G^z)=d(z;G^z)$，故至少有一个点集 A_i 或 B_j 使得

$$\phi^+(A_i;G^{z*})<\phi^+(A_i;G^z)=\max\{K-d^+(A_i;G_0), D_K^+(A_i;G_0)\}$$

或者

$$\phi^-(B_j;G^{z*})<\phi^-(B_j;G^z)=\max\{K-d^-(B_j;G_0),\ D_K^-(B_j;G_0)\}$$

成立。根据引理 5,G^{z*} 除 z^* 外不是K边连通的,与假设相矛盾。 证毕

四、最小K边连通扩充算法

任意有向图的最小K边连通扩充算法 DKMA 由以下四步组成：(1)增广扩充，(2)划分,(3)合并,(4)可行删除。下面分别叙述这四个过程。

1. 增广扩充

在图G_0中加入一个增广点 z,对 $v\in V$，在 v 与 z 之间加 $D_K^+(v;G_0)$ 条边 (v,z) 和 $D_K^-(v;G_0)$ 条边(z,v)。

2. 划分

在增广扩充后，若 G^z 除 z 外是K边连通的,根据最优准则，G^z 一定是 G_0 的最小增广K扩充图，划分和合并这两个过程可以略过。否则，在 G^z 中必存在两点 x 和 y 使得 $\lambda(x,y;G^z)<K$。设 $A\in T(x,y;G^z)$，将点集V划分成 $V_1=A$ 和 $V_2=V-A$ 两个子集,再检验子集 V_1 和 V_2 是否是K边连通的。若某个子集不是K边连通的,则将该子集划分成两个子集。直到所有的子集是K边连通为止。

划分完毕后,各子集之间的关系可用一邻接图来表示,如图 1 所示。在邻接图中，子集用点来表示,两个相邻接的子集用一线联结，称它为桥。一个桥 c_{ij} 对应着两个边割 c_i 和 c_j，称 c_i 为子集 V_i 的边割，c_j 为子集 V_j 的边割。若某个子集 V_i 为悬子集(悬子集为只与一个子集相邻接的子集。在图 1 中,子集 V_1、V_2、V_3、V_4 为悬子集)。则联结该子集与它所邻接的子集的桥所对应的两个边割一个是 $E(V_i;G^z)$,另一个是 $E(V-V_i;G^z)$。

3. 合并

在合并过程中,若某个子集的出度或入度小于K，则在该子集内任选一点 x，在 x 与 z 之间增加有向边使得该子集的出度或入度等于K。根据最优准则,这一步是必要的。如

果一个桥所对应的两个边割均大于等于K，那么该桥所联结的两个子集是K边连通的.则可将这两个子集合并成一个新子集。

在合并中可能出现这样的情况：各子集的出度和入度均大于等于K，但任意两个相邻接的子集不能合并，即任意一个桥所对应的两个边割至少有一个少于 $K(|c_i^+|<K$ 或 $|c_i^-|<K)$. 例如，对图2所示的图，设子集 V_1、V_2、V_3 是5边连通的，虽然此时各子集的出度和入度均大于等于5，但该图有两个边割 c_1^+ 和 c_2^+ 小于5. 只有在子集 V_3 中增加一条扩充边才能使该图成为增广K扩充图.

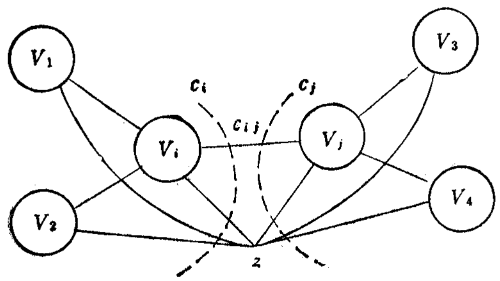

图 1

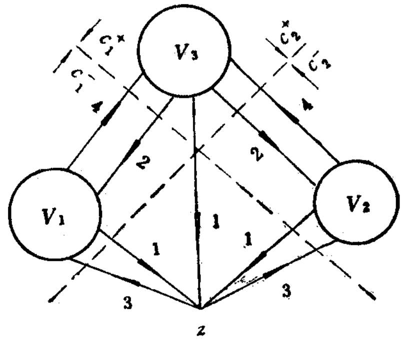

图2 （1、2、3、4 表示边数）

若出现上述情况，则此时的邻接图中至少有一个子集 V_i，它所有的边割均小于K. 否则，设 V_i 和 V_j 通过桥 c_{ij} 相邻接，并且 V_i 的边割 c_i 大于 $K(|c_i^+|$ 和 $|c_i^-|$ 均大于$K)$，则边割 c_j 小于K（或者 $|c_j^+|$ 小于K，或者$|c_j^-|$小于K），否则，子集 V_i 和 V_j 已合并成一个新的子集. 因每个子集的出度和入度均大于等于K，故 V_j 不是悬子集，它至少有一个边割大于K，设它和另一子集 V_m 相邻接，则 V_m 也不是悬子集，并且 V_m 至少有一个边割大于K，由此递推下去，有无限多个子集，与 G_0 为有限相矛盾.

设子集 V_i 的所有边割均小于K，将它所对应的一个桥断开后，邻接图分成 B 和 $\bar{B}$ 两部分. 设 $V_i \subset B$，在 B 中除 V_i 外不再含有所有边割小于K的子集，则称 B 为一个伪悬子集，V_i 为伪悬子集的核.

显然，对伪悬子集 B，或者 $d^+(B;G^z)<K$，或有 $d^-(B;G^z)<K$ 成立. 要使合并过程能继续进行，必需在伪悬子集内一点增加扩充边使得伪悬子集的出度和入度均大于等于K，但只有在伪悬子集的核内一点增加扩充边才是最优的. 因为这样既可使伪悬子集的边割达到K，又可能使伪悬子集内的其它边割达到K. 例如，在图2中，设 V_1 和 V_3 为一个伪悬子集. 在 V_3 中的一点 x 增加一条扩充边 (x,z) 后，既可以使伪悬子集的边割 c_2^+ 达到K，又可以使伪悬子集内的边割 c_1^+ 也达到K. 但在 V_1 中一点 y 增加扩充边后，虽然能使 c_2^+ 达到K，但不能使 c_1^+ 也达到K.

合并的过程如下：

(1) 如果各子集已合并成一个点集，则转(5)；否则，对所有的子集 V_i，若 $d^+(V_i;G^z)<K$（或 $d^-(V_i;G^z)<K$），则在 V_i 内任选一点 v，在 v 与 z 之间增加边 (v,z)（或边(z,v)）使得 $d^+(V_i;G^z)=K$（或 $d^-(V_i;G^z)=K$）.

(2) 对所有的桥做如下检验：如果一个桥所对应的两个边割均大于等于 K，则将该桥所联结的两个子集合并成一个新的子集.

(3) 如果在完成步骤(2)后子集的个数减少,则转(1),否则转(4).

(4) 找出邻接图中所有的伪悬子集. 对每个伪悬子集 B_i,在它的核内任选一点 v,在 v 与 z 之间增加有向边使得 $d^+(B_i;G^z) = K$ 或 $d^-(B_i;G^z) = K$,转(2).

(5) 结束

4. 可行删除

合并过程结束后，若 $d^+(z;G^z) \neq d^-(z;G^z)$，假设 $d^+(z;G^z) > d^-(z;G^z)$,则在 V 中任选一点 v,在 v 与 z 之间增加 $d^+(z;G^z) - d^-(z;G^z)$ 条边(v,z). 在 z 点连续做有向可行删除,直到 $d(z;G^z) = 0$ 为止. 去掉 z 点则得到一个最小 K 边连通扩充图. 有向可行删除的算法可参考文献[4]和[5](略).

5. 算法 DKMA 最优性证明和复杂度估计

根据引理 4,若要证明删除后得到的图 $G = (V, E_0 \cup E')$ 是图 $G_0 = (V, E_0)$ 的最小 K 边连通扩充图,只要证明合并后得到的图 $G^z = (V \cup \{z\}, E_0 \cup E^z)$ 是 G_0 的最小增广 K 扩充图即可.

首先,G^z 除 z 外是 K 边连通的. 在合并过程中,只有当一个桥 c_{ij} 所对应的两个边割 c_i 和 c_j 均大于等于 K 时才将该桥所联结的两个子集 V_i 和 V_j 合并成一个新子集. 子集 $V_i \cup V_j$ 一定是 K 边连通的,否则;将有一个边割 c, 或者 c 切分 V_i 或者 c 切分 V_j, 使得 $|c^+| < K$ 或 $|c^-| < K$. 由于在合并前子集 V_i 和 V_j 是 K 边连通的,切分 V_i 或 V_j 的任何一个边割均应大于等于 K,所以,假设的边割 c 是不存在的. 因此,G^z 除 z 外是 K 边连通的.

其次,$|E^z|$ 是最小的. 假如合并过程只经过步骤(1)和(2)就可完成, 对每个增加新的扩充边的子集,该子集或者可划分成一个点集 $A_i(i = 1,2,\cdots,m-1)$,使得 $\phi^+(A_i; G^z) = K - d^+(A_i;G_0)$; 或者可划分成一个点集 $B_j(j = 1,2,\cdots,n-1)$ 使得 $\phi^-(B_j; G^z) = K - d^-(B_j;G^z)$;或者两者均是. 而对在合并过程中所有未增加扩充边的子集,该子集既可划分成点集 A_m,使得 $\phi^+(A_m; G^z) = D_K^+(A_m;G_0)$, 又可划分成点集 B_n, 使得 $\phi^-(B_n;G^z) = D_K^-(B_n;G_0)$. 假如合并过程还要经过步骤 (4) 才能完成, 对一个伪悬子集 B_i,当在该伪悬子集的核内增加扩充边后, 若随着 $\bar{B}_i$ 内扩充边的增加而使得 B_i 内所有的边割均大于等于 K,则该伪悬子集可划分成一个点集 A_i 或 B_j;否则, 若该伪悬子集内有一边割小于 K,将该边割断开后,邻接图分成两部分,则一部分可划分成一个点集 A_i 或 B_j, 而另一部分可根据合并过程划分成几个点集 A_i 或 B_j. 总之, 点集 V 可划分成这样两个集合: $V = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m, V = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$,使得

$$\phi^+(A_i;G^z) = \max\{K - d^+(A_i;G_0), D_K^+(A_i;G_0)\}$$
$$\phi^-(B_j;G^z) = \max\{K - d^-(B_j;G_0), D_k^-(B_j;G_0)\}$$

即 G^z 是 G_0 的最小增广 K 扩充图.

在算法 DKMA 中,增广扩充,划分,合并和可行删除是串联运行的. 因此,总的时间复杂度应按工作量最大的过程来计算. 工作量最大的过程为可行删除, 它的时间复杂度为 $O(|V|^5)$. 所以,算法 DKMA 的时间复杂度为 $O(|V|^5)$.

五、结　　论

在可靠网络设计中，满足一定的边连通度条件的问题可归结为边连通扩充问题．如果该问题是无权的，则可由本文的算法给出最优解答．如果该问题是加权的，由于加权扩充问题已被证明是 NP 完全问题，则可用一个可行解代替最优解．根据本文的工作，很容易找出一个探索式算法．因此，本文为可靠网络的计算机辅助设计打下了基础．

参　考　文　献

[1] K. P. Eswaran, R. Ender Tarjan, *SIAM J. Comput.*, 5(1976)4, 653—665.
[2] Y. Kajitani, S. Veno, *Networks*, 16(1986), 181—197.
[3] J. A. 邦迪，U. S. R. 默蒂著，吴望名，李念祖等译，图论及其应用，科学出版社，1984 年。
[4] W. Mader, *Annuals of Discrete Math.*, 3(1978), 145—164
[5] W. Mader, *Europ. J. Combin.*, 3(1982), 63—67.

THE MINIMUM AUGMENTATION OF AN ARBITRARY DIRECTED GRAPH TO A *K*-EDGE-CONNECTED DIRECTED GRAPH

Sun Lishan
(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Sun Yugeng　Yang Shan
(Department of Automation, Tianjin University, Tianjin)

Abstract　The optimization problem of constructing a K-edge-connected directed graph from any given directed graph by adding a minimum set of edges is studied. An efficient algorithm with complexity of $O(|V|^5)$ is presented. This algorithm contributes a foundation for the computer aided design of reliable networks.

Key words　Graph theory; Directed graph; K-edge-connected directed graph