

# 基于独立矢量基的波达方向估计<sup>1</sup>

李小军 张贤达 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

**摘 要** 独立分量分析可从线性混合的信号中分离出彼此独立的信号源,也就是利用独立矢量基对混合的信号进行分离,这种方法在一定条件下与盲信源分离等价。该文利用通过非线性最小均方准则获得的独立矢量基,并且根据其所具有的特性,将其应用于均匀线阵的信号波达方向估计。

**关键词** 盲源分离,独立分量分析,独立矢量基,波达方向

**中图分类号** TN911.23

## 1 引言

寻找一种合理描述信号分量的坐标方法是分析信号的关键技术之一。在利用二阶统计量的信号分析中,主分量分析(PCA)方法利用一组正交基将待分析的信号进行投影分解,使得投影获得的各信号之间满足不相关的关系。然而在实际信号分析中,只利用二阶统计量是不完全的,尤其在针对非高斯信号分析时,这种方法往往失效。独立分量分析(ICA)<sup>[1-4]</sup>方法是寻找一种非线性变换,使得分解后的信号满足统计独立特性,而不仅仅是“不相关”。从另一角度看,独立分量分析可从线性混合的信号中分离出彼此独立的信号源,因此在信源彼此独立时,盲信源分离(BSS)与独立分量分析是等价。盲信源分离是现代信号处理的一个热门研究领域。

独立分量分析在图像特征提取,语音处理,阵列处理和生物医学信号处理中等得到了广泛的应用<sup>[1-3,5,6]</sup>。由于独立分量分析所获得的独立矢量基往往体现了信号传输信道的某些特性,因此本文将其应用于阵列信号的波达方法估计问题。

## 2 独立分量分析

令  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  是一个可观测的  $n$  维随机变量,它的联合概率密度函数为  $p(\mathbf{x})$ 。独立分量分析就是寻找一变换矩阵  $\mathbf{W}$ ,将  $\mathbf{x}$  投影形成一个  $m$  维随机变量  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$ ,使得各分量  $y_i, i = 1, \dots, m$ , 相互独立。令  $\mathbf{y}$  的概率密度函数为

$$p(\mathbf{y}) = p(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ 。利用输出各分量之间的互信息作为判断独立性的测度,即

$$I(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y}) \log \left[ \frac{p(\mathbf{y})}{\prod_k p(y_k)} \right] d\mathbf{y} \quad (2)$$

若输出  $\mathbf{y}$  的联合概率密度函数可以分为各分量概率密度函数的乘积,则互信息  $I(\mathbf{y})$  为零,此时输出各分量即满足统计独立。

如果  $\mathbf{x}$  是由  $m$  个独立变量  $s_k, k = 1, \dots, m$ , 通过一个线性变换混合所得,即

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{s} \quad (3)$$

<sup>1</sup> 2000-09-18 收到, 2001-04-20 定稿  
国家自然科学基金(60072043)资助项目

则独立分量分析所得到的  $\mathbf{W}$  就可以认为是混合矩阵  $\mathbf{M}$  的广义逆。针对  $\mathbf{W}$  的估计, Bell 和 Sejnowski 提出了一种具有指导意义的方法<sup>[2]</sup>, 即将针对各分量的一个非线性变换(投影)作用于输出  $\mathbf{y}$ , 得到  $\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$ , 并且  $\mathbf{z}$  的边缘分布满足均匀分布。引入非线性变换的目的是为了在非线性的 Taylor 展开中引入高阶统计量。这一非线性变换步骤只是在学习过程中使用, 一旦学习稳定, 就只是一个简单的线性变换了。因此可以用一个单层神经网络来实现对  $\mathbf{W}$  的估计, 网络加权系数就是  $\mathbf{W}$  的各元素, 各神经元即为非线性变换函数  $g$ 。

根据互信息的性质, 针对各分量的可逆变换将不改变互信息, 即有  $I(\mathbf{z}) = I(\mathbf{y})$ 。当针对第  $k$  个分量的非线性变换  $g_k$  选择为可获得边缘分布为均匀分布的非线性函数时, 互信息  $I(\mathbf{z})$  就等于  $\mathbf{z}$  的负熵:

$$I(\mathbf{z}) = -H(\mathbf{z}) = -\int p(\mathbf{z}) \log p(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (4)$$

这时进行互信息最小化, 得

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{W}_{ij}} = \frac{\partial \log |\det \mathbf{W}|}{\partial \mathbf{W}_{ij}} + \sum_k E \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}_{ij}} \log g'_k(z_k) \right\} = \mathbf{W}^{-T} + E\{c\mathbf{y}^T\} \quad (5)$$

式中  $c_i = \phi_i(z_i) = g''_i/g'_i$ ,  $E\{\cdot\}$  表示期望, 上标  $T$  表示转置,  $g'_i$  和  $g''_i$  分别为  $g_i$  的一阶和二阶导数。在以后的各种方案中, 基本上是在此框架下进行变化, 如 MacKay 的协方差算法<sup>[7]</sup> 和 Amari 的自然梯度算法<sup>[8]</sup>, 基本的思想是一致的。

### 3 非线性函数的选择

在上述分析方法中, 没有误差信号可以利用, 因此需使用无监督学习算法。对非线性函数的选择是决定算法结果好坏的关键。

如果变量的边缘概率密度函数已知, 则可利用变量的分布函数直接作为非线性函数, 使变量通过此函数后服从均匀分布, 即

$$g(z_k) = P(z_k) = \int_{-\infty}^{z_k} p(x_i) dx_i \quad (6)$$

根据  $\phi$  的定义, 可以得到

$$\phi(z_k) = \frac{\partial \log p}{\partial z_k} = \frac{p'(z_k)}{p(z_k)} \quad (7)$$

实际中并不知道变量的边缘密度函数, 因此就需要借用高阶累积量。有两种获得高阶累积量的方法: 一种直接估计高阶累积量<sup>[3]</sup>, 在盲信源分离时, 其效果可以满足要求。另一种方法是利用一个非线性函数, 一般要针对不同的问题选择非线性函数。当  $\phi(z) = -\tanh(z)$  时, 就是等价地用  $P(z) = 1/\pi \cosh(z)$  来近似表示这种变量的分布函数。对于服从超高斯分布信号, 选择  $\phi(z) = \tanh(z)$ 。本文采用选择非线性函数的方法。

### 4 独立矢量基

在独立分量分析中, 利用  $\mathbf{W}$  对输入数据进行投影, 获得输出  $\mathbf{y}$ 。如果各分量独立, 那么任意一对分量之间的互相关为零, 则

$$\mathbf{y}\mathbf{y}^T = \mathbf{W}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{W}^T = \mathbf{D}^2 \quad (8)$$

式中  $D$  为一尺度因子的对角阵。当  $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$  满秩时,

$$D^{-1}\mathbf{W}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{W}^TD^{-1} = I \quad (9)$$

随机变量独立首先要满足不相关。从上式我们可以看出  $D^{-1}\mathbf{W}$  为一解相关矩阵, 并且使  $\mathbf{x}$  正交化。这样就可以直接利用以下方法得到白化矩阵。令  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(T)\}$  为  $T$  个时刻的观测数据矩阵, 它的奇异值分解为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V} \quad (10)$$

式中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  为正交方阵,  $\mathbf{\Sigma}$  为奇异值矩阵。若令

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T \quad (11)$$

则  $\mathbf{W}\mathbf{X} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{X} = \mathbf{V}$  为白噪声过程, 这里  $\mathbf{U}$  就是主分量分析中的特征矢量矩阵。这种表示相似于主分量分析中对变量进行的投影表示, 但增加了正交归一。从概念上来看,  $\mathbf{W}$  所起的作用是对信号进行了投影, 获得了相互独立的分量成分, 因此  $\mathbf{W}$  是一个具有独立分解特性的矢量基。

在主分量分析中, 主分量基  $\mathbf{U}$  (主特征矢量所组成的基) 的一个重要特性就是结构误差最小。若将数据进行投影降维后使用, 即

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{x} \quad (12)$$

则这种降维结构满足最小均方误差准则:

$$\min \varepsilon^{(\text{PCA})} = \min E\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2\} \quad (13)$$

在独立分量分析中, 如果采用独立矢量基, 也可以获得与主分量分析中对数据相似的投影, 只是这里采用的是非正交基。与主分量分析类似, 可以得到数据的另外一种表示,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^+\mathbf{W}\mathbf{x} \quad (14)$$

式中  $\mathbf{W}^+$  表示  $\mathbf{W}$  的广义逆, 且  $\mathbf{W} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T$ 。于是, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(\text{ICA})} &= E\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2\} = E\{\|\mathbf{x} - \mathbf{W}^+\mathbf{W}\mathbf{x}\|^2\} \\ &= E\{\|\mathbf{x} - (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma})\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{x}\|^2\} = \varepsilon^{(\text{PCA})} \end{aligned} \quad (15)$$

从上式看出, 在学习系统稳定时, 利用独立矢量基结构化数据可以起到与主分量分析同样优化准则的结果。并且在这一步骤中可以使数据降维, 简化运算。

## 5 学习准则与算法

在独立分量分析的无监督学习过程中, 利用最小均方准则对分离矩阵  $\mathbf{W}$  进行优化, 即

$$\mathbf{W} = \arg \min E\{\|\mathbf{x} - \mathbf{W}^+g(\mathbf{W}\mathbf{x})\|^2\} \quad (16)$$

实际中, 可利用非线性主分量分析的方法<sup>[9]</sup>得到  $\mathbf{W}$  的学习算法:

$$\Delta\mathbf{W} = \mu(\mathbf{x} - \mathbf{W}^Tg(\mathbf{y}))g(\mathbf{y}^T) \quad (17)$$

式中  $\mu > 0$  是一学习参数, 通常为一很小的常数。

在独立信号源情况时, 收敛判断条件为

$$\Delta(\mathbf{WM}) = \min \frac{\|\mathbf{WM} - \text{diag}(\mathbf{WM})\|}{\|\mathbf{WM}\|} \quad (18)$$

式中  $\text{diag}(\cdot)$  表示提取对角元素。当上式达到最小化时, 分量学习过程结束。若信源完全独立, 则上式应为零。

利用学习算法 (18) 式, 我们可以实现对独立矢量基的确定。这里我们利用 B.Yang 在 1995 年提出的 PAST 算法<sup>[10]</sup>, 因为此算法性能稳定, 并根据独立分量分析的要求进行适当改进。具体迭代算法实现如下:

$$\begin{aligned} z(t) &= g(\mathbf{W}(t-1)\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{h}(t)/(\beta + \mathbf{z}^H(t)\mathbf{h}(t)) \\ \mathbf{P}(t) &= U[\mathbf{P}(t-1) - \mathbf{m}(t)\mathbf{h}^H(t)]/\beta, \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{W}^H(t-1)\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{W}(t) &= \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{e}(t)\mathbf{m}^H(t), \quad \mathbf{B} = 0 \\ \text{For } i &= 1 : m-1 \\ \mathbf{b}_i &= \mathbf{w}_i(t) \\ \mathbf{w}_{i+1}(t) &= \mathbf{w}_{i+1}(t) - \mathbf{B}\mathbf{B}^H\mathbf{w}_{i+1}(t) \\ \text{end} \end{aligned}$$

在上述算法中, 上标  $H$  表示共轭转置。 $\beta$  是一个遗忘因子, 接近 1。 $\mathbf{x}(t)$  表示  $t$  时刻的观测向量,  $U$  表示只对矩阵计算上三角, 下三角部分由上三角部分对应过来, 形成一个对称矩阵。式中  $\mathbf{h}(t)$  和  $\mathbf{m}(t)$  为中间变量,  $\mathbf{e}(t)$  为误差变量。 $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{P}$  在  $t=0$  时的初始化值可选择为单位阵。算法中  $\mathbf{b}_i$  为矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $i$  个列矢量,  $\mathbf{w}_i$  为  $\mathbf{W}$  的第  $i$  个列矢量。 $\mathbf{W}$  的列矢量组成了相应的独立矢量基。我们在算法中引入了一个循环过程, 其目的是利用投影原理<sup>[11]</sup>, 保证使输出矢量从前向后, 依次输出。由于输出矢量按顺序输出, 所以容易从中抽取相互独立的矢量基 (即独立矢量基), 而剔除那些与独立矢量基相关的输出矢量。

需要注意: 在上述算法中应首先将数据白化, 采用在线白化方法:

$$\Delta\mathbf{V}(t) = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t))\mathbf{V}(t) \quad (19)$$

式中  $\mathbf{V}(t)$  是白化矩阵,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{x}(t)$ ,  $\mu$  是一很小的正常数,  $\mathbf{V}$  的初始值可设置为单位阵<sup>[12]</sup>。

## 6 实验仿真

作为应用, 考虑一均匀线阵 (ULA), 阵元数  $L$  为 12, 阵元间距  $d$  为半波长  $\lambda$ , 现在考虑应用本算法对信源进行波达方向 (DOA) 估计。假设有 3 个独立信源, 它们分别是正弦波, 锯齿波和正交调幅信号, DOA 依次为自  $20^\circ$ ,  $35^\circ$  和  $70^\circ$ , 信噪比为 20dB, 采样快拍数为 100 次。因为信号为复数形式, 所以各初始变量也相应为复数。

在实验中信号源之间独立, 独立矢量基又是具有独立分解特性, 因此利用独立矢量基对均匀线阵信源进行分析, 可以获得信源的 DOA。本算法是在线算法, 因此对数据不需要进行积累, 利用每一次快拍的数据作为网络的输入。这里利用 MUSIC 空间谱, 用加权矢量  $\mathbf{w}$  代替原 MUSIC 估计器中的基函数, 并定义谱函数:

$$S(\theta) = 1 / \left[ \sum_{i=m+1}^L |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}_i| \right] \quad (20)$$

式中  $\mathbf{a}(\theta)$  为阵列的方向矢量,  $\mathbf{a}_i(\theta) = \exp(j2\pi d(i-1)\sin(\theta)/\lambda)$ ,  $H$  表示共轭转置,  $m$  为估计信源数。基于独立矢量基的 DOA 估计与阵列几何参数无关。图 1 为独立运行 20 次的平均结果

(遗忘因子为 0.9)。估计的结果, 三个峰值角度分别为  $19.5^\circ$ ,  $34.5^\circ$  和  $70^\circ$  (在本实验中角度分辨率为  $0.5^\circ$ ), 与实际波达方向角相符。图 2 为利用 PCA 的 MUSIC 估计器所获得的 DOA, 但 MUSIC 方法的估计结果取决于阵列的有关参数。

比较图 1 与图 2, 可以看到 MUSIC 估计器 (20) 式可以有效地估计信号波达方向, 这说明独立矢量基可以反映信道某些特性。

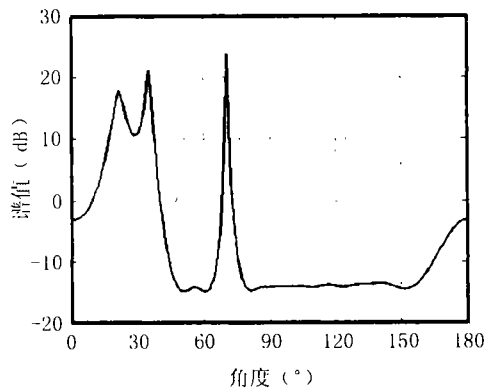


图 1 信号波达方向估计

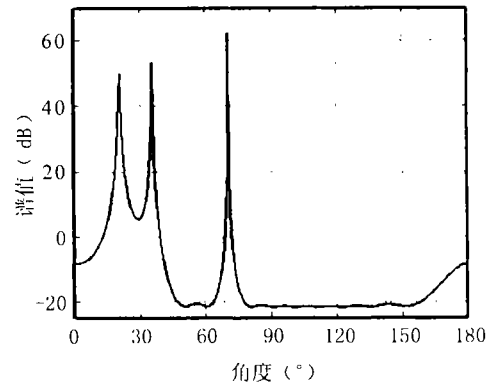


图 2 标准 MUSIC 估计 DOA

由于 PAST 的算法在某些非平稳情况下也具有一定的稳定性, 所以可以使用本文算法对混合矩阵时变特性进行跟踪。考虑一个  $2 \times 2$  的混合矩阵:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1(t)) & \cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \sin(\theta_2(t)) \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  为时间函数。用两个独立信源作为输入, 并利用独立矢量基对  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  进行跟踪估计。当  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  服从正弦函数, 遗忘因子取 0.95 时, 图 3 为跟踪过程。又如  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  为两阶梯函数时, 角度跟踪结果如图 4 所示。图 3 中  $M(2)$  和  $M(4)$  表示的是实际混合矩阵  $\mathbf{M}$  的  $\sin(\theta_1(t))$  和  $\sin(\theta_2(t))$  项,  $M'(2)$  和  $M'(4)$  和学习所得相应项的结果。图 4 表示  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  的实际变化和对角度值的跟踪结果。图 4 中  $M(1)$  和  $M(2)$  表示实际变换曲线,  $M'(1)$  和  $M'(2)$  表示跟踪结果。

从图 3 及图 4 可以看出: 本算法可跟踪原信道的变化, 但是当两系数变化有交点时, 由于混合矩阵的秩发生了变化, 从而使跟踪有一个较大的变化 (参见图 3), 这一变化反映了重新学习时的变化。

## 7 结束语

本文改进了一种更新独立矢量基的算法, 并将其应用于波达方向估计。实验结果表明, 本算法不仅可以估计波达方向, 而且可以跟踪变化的信道。有必要指出, 本文的工作将独立分量分析这一盲信源分离方法与阵列信号处理中的波达方向估计建立了联系。据我们所知, 这一联系在文献中尚未见到过有关报导。

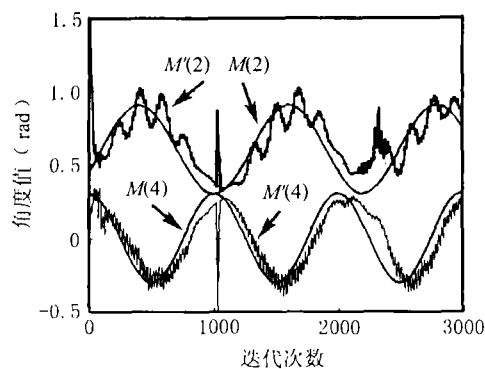


图3 跟踪正弦变化

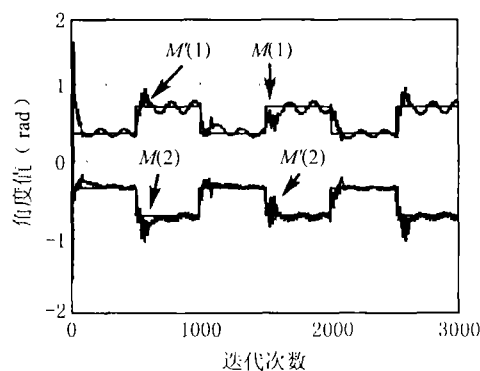


图4 跟踪阶梯变化

## 参 考 文 献

- [1] S. Amari, A. Cichocki, H. H. Yang, A new learning algorithm for blind source separation, In G. Tesauro, M. C. Mozer, & M. E. Hasselmo (Eds.), *Advances in Neural Information Processing*, Cambridge, MA: MIT Press, 1996, 757-763.
- [2] A. Bell, T. Sejnowski, An information maximization approach to blind separation and blind deconvolution, *Neural Computation*, 1995, 7(6), 1129-1159.
- [3] P. Comon, Independent component analysis, A new concept? *Signal Processing*, 1994, 36(3), 287-314.
- [4] R. Everson, S. Roberts, Independent component analysis: a flexible nonlinearity and decorrelating manifold approach, *Neural Computation*, 1999, 11(7), 1957-1983.
- [5] C. Jutten, J. Herault, Blind separation of sources, part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture, *Signal Processing*, 1991, 24(1), 1-10.
- [6] J. Karhunen, J. Joutsensalo, Representation and separation of signals using nonlinear PCA type learning, *Neural Networks*, 1994, 7(1), 113-127.
- [7] D. Mackay, *Maximum likelihood and covariant algorithms for independent component analysis*, Tech. Rep., Cambridge, 1996.
- [8] S. Amari, Natural gradient works efficiently in learning, *Neural Computation*, 1998, 10(1), 251-276.
- [9] J. Karhunen, P. Pajunen, E. Oja, The nonlinear PCA criterion in blind source separation: Relations with other approaches, *Neurocomputing*, 1998, 22(1), 5-20.
- [10] B. Yang, Projection approximation subspace tracking, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, SP-43(1), 95-107.
- [11] 张贤达, *现代信号处理*, 北京, 清华大学出版社, 1995, 第4章.
- [12] J. Karhunen, P. Pajunen, Blind source separation using least-squares type adaptive algorithms, *ICASSP'97, Munich, Germany, April 21-24, 1997*, 3361-3364.

## ESTIMATION DIRECTION OF ANGLE BASED ON INDEPENDENT VECTOR BASIS

Li Xiaojun    Zhang Xianda    Bao Zheng

(*Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

**Abstract** Independent component analysis aims to find a linearly transformation to coordinates in which the data are maximally statistical independent. In the method, by using the independent vector basis, the mixed signal will be decomposed to the independent components. Under some conditions, it is equivalent to the blind source separation. In this paper, the independent vector basis can be got by using the nonlinear minimizing mean square criterion. It can estimate the DOA of ULA by using the character of the independent vector basis.

**Key words** Blind source separation, Independent component analysis, Independent vector basis, Direction of angle

李小军: 男, 1971 年生, 博士生, 研究方向为盲信号处理, 阵列信号处理等.

张贤达: 男, 1946 年生, 西安电子科技大学特聘教授(教育部“长江学者奖励计划”), 博士生导师, 并任清华大学教授和博士生导师, 研究方向为信号处理及其在雷达和通信中的应用.

保 铮: 男, 1927 年生, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师. 研究方向为信号处理和雷达系统.