

一种关于相参脉冲信号频率的最优估计算法¹

龚享铱 周良柱

(国防科技大学电子科学与工程学院信号处理研究室 长沙 410073)

摘要: 该文针对噪声干扰下的相参脉冲信号的频率估计问题, 提出了一种新的最优估计算法: 多级频率估计算法。这种算法是一种最优估计算法, 并具有正确概率高、计算量小等优点。通过仿真试验验证了算法的可行性、最优性。

关键词: 频率估计, 相参脉冲信号, 加权最小二乘估计

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)10-1594-07

New Optimum Algorithm for Frequency Estimation from Coherent Pulses

Gong Xiang-yi Zhou Liang-zhu

(School of Electronic Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defense Tech., Changsha 410073, China)

Abstract A new optimum algorithm is proposed for frequency estimation from a train of coherent pulses in additive Gaussian noise, named it as 'multi-stages frequency estimation algorithm'. It is shown to be a optimum algorithm with small computation and high corrective possibility. Simulations are given to support these conclusion.

Key words Frequency estimation, Coherent pulse signal, Weighted least square estimation

1 前言

利用接收信号的频率变化率的高精度测量值可以对辐射源进行定位, 其定位速度和定位精度优于传统的测向定位方法^[1]。通常是对频率的估计值进行差分得到频率变化率的估计值, 因此如何从信号中得到高精度的频率估计是这一类定位方法的关键技术。现有关于频率高精度估计的报道主要是针对连续波信号频率估计的研究。文献 [2] 列出了关于频率估计算法的文献, 文献 [3] 提出了针对频率估计算法的标准。但是接收信号经常是相参脉冲信号的形式, 比较小的占空比使得利用传统的频率估计算法很难得到高精度的频率估计。文献 [4] 证明了在高斯白噪声条件下, 利用谱估计方法可以得到频率的最优估计, 但是对于相参脉冲信号, 这种方法计算量太大, 又因为它将脉冲外的噪声信号作为信号的一部分进行考虑, 得到的频率估计并不是最优估计。文献 [5] 针对相参脉冲信号提出了 χ^2 检测的频率估计方法, 得到的频率估计并不是最优估计, 并且存在模糊问题, 其它未知参数的估计误差对频率估计存在影响。文献 [6,7] 提出了相位平均和相位加权平均的算法, 这种算法比较适用于相参脉冲信号形式, 在高斯白噪声和信噪比较高的情况下可以得到最优估计, 但是它要求对相位进行解模糊处理, 算法中存在多维的整数搜索, 因此计算量相当庞大。

本文提出了一种适用于相参脉冲信号的频率估计新算法: 多级频率估计算法, 它是一种频率最优估计算法, 具有计算量小、正确概率高等优点。

2 相参脉冲信号数学模型和克拉默-拉奥下界 (CRLB) 分析

辐射源发射的相参脉冲信号经接收器的带通滤波、下变频等处理得到中频信号, 对各个脉

¹ 2003-05-16 收到, 2003-08-28 改回

国防科技大学预研项目

冲宽度内进行采样得到：

$$z(n + Kp) = A_p e^{j(\phi_0 + (n + Kp)2\pi f \Delta)} + \varepsilon(n + Kp), \quad n = 0, 1, \dots, N_s - 1, \quad p = 0, 1, \dots, P - 1 \quad (1)$$

其中 Δ 为采样间隔 $\Delta = 1/f_s$ ， N_s 为每个脉冲内的采样数据的数目， P 为观测期间的脉冲个数， A_p 为第 p 个脉冲的幅度， ϕ_0 为整个观测期间恒定的初始相位， K 为脉冲周期 T_r 对应的采样数， f 为信号的频率，假设 ε 为复高斯白噪声，方差为 σ^2 。因为信号从辐射源到接收器只进行了单程传播，可以认为接收到的雷达相参脉冲信号的信噪比较高，一般在 30dB 左右^[5]。

对式 (1) 的各个脉冲的观测信号中提取含模糊的观测相位 $\phi_m(n + Kp)$ ，对应的值域为 $(-\pi, \pi]$ ，在信噪比较高的情况下测量值的表达式为

$$\phi_m(n + Kp) = (\phi_0 + (n + Kp)2\pi f \Delta + u(n + Kp)) \bmod 2\pi \quad (2)$$

其中 $u(n) = \text{Im} \left[\frac{\varepsilon(n)}{A_p} e^{-j(\phi_0 + 2\pi n f \Delta)} \right]$ ，可以看出 $u(n)$ 为实的零均值高斯白噪声，方差为 $\sigma^2 / (2A_p^2)$ 。

与文献 [4] 推导连续波信号采样的初始相位和频率估计的 CRLB 的过程类似，可以得到关于式 (1) 中频率估计的 CRLB 为

$$\text{var}(\hat{f}) \geq \frac{6\sigma^2}{(2\pi\Delta)^2 N_s P (N_s^2 - 1 + 12C) \bar{A}} \quad (3)$$

其中参数 \bar{A} , C 分别为

$$\bar{A} = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} A_p, \quad C = \sum_{p=0}^{P-1} K^2 p^2 A_p \left/ \sum_{p=0}^{P-1} A_p - \left[\sum_{p=0}^{P-1} Kp A_p \right] \right/ \left[\sum_{p=0}^{P-1} A_p \right]^2$$

3 相位解模糊和频率估计的联合处理^[7]

将式 (2) 改写为矢量形式：

$$\phi_0 \mathbf{1} + n 2\pi f \Delta + 2\pi \mathbf{L} + \mathbf{u} = \varphi_m \quad (4)$$

其中 \mathbf{u} 为相位噪声矢量， $\mathbf{1}$ 为全 1 矢量， \mathbf{n} , \mathbf{L} 分别对应信号的采样序号和相位模糊值构成的矢量。可以采用加权最小二乘的方法得到信号的初始相位、频率和模糊值的估计：

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{f} \\ \hat{\mathbf{L}} \end{bmatrix} = \arg \min_{\phi_0, f, \mathbf{L}} [\varphi_m + 2\pi \mathbf{L} - n 2\pi f \Delta - \phi_0 \mathbf{1}]^T \mathbf{W} [\varphi_m + 2\pi \mathbf{L} - n 2\pi f \Delta - \phi_0 \mathbf{1}] \quad (5)$$

当测量的相位经过正确的解模糊处理，即模糊值 \mathbf{L} 给定时，信号的频率和初始相位的加权最小二乘解为

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{f} \end{bmatrix} = ([\mathbf{1}, 2\pi \Delta \mathbf{n}]^T \mathbf{W} [\mathbf{1}, 2\pi \Delta \mathbf{n}])^{-1} [\mathbf{1}, 2\pi \Delta \mathbf{n}]^T \mathbf{W} (\varphi_m + 2\pi \mathbf{L}) \quad (6)$$

在高斯噪声的情况下，选择 $\mathbf{W} = (\text{var}(\mathbf{u}))^{-1}$ ，式 (5)、式 (6) 为最大似然估计，同时为最优估计。将式 (6) 的结果代入式 (5)，可以得到

$$\hat{\mathbf{L}} = \arg \min_{\mathbf{L}} (\varphi_m + 2\pi \mathbf{L})^T \mathbf{\Pi}_{[\mathbf{1}, 2\pi \Delta \mathbf{n}]}^\perp (\varphi_m + 2\pi \mathbf{L}) \quad (7)$$

其中 $\Pi_{[1, 2\pi\Delta n]}^\perp$ 为 $[1, 2\pi\Delta n]$ 关于加权矩阵 W 的正交补投影矩阵:

$$\Pi_{[1, 2\pi\Delta n]}^\perp = W - W[1, 2\pi\Delta n]([1, 2\pi\Delta n]^T W [1, 2\pi\Delta n])^{-1} [1, 2\pi\Delta n]^T W$$

在保证对相位解模糊处理正确概率比较高的情况下, 式 (5) 关于频率、初始相位和模糊值的最优估计变成了两步估计, 即式 (7) 的模糊值估计, 式 (6) 的初始相位和频率估计. 从式 (5)~(7) 可以得到: 相位解模糊和频率估计联合处理的方法的关键为式 (7) 中关于相位解模糊的处理, 其中需要进行多维的整数搜索处理, 计算量相当庞大.

4 多级频率估计算法

如果已知频率分布在一定的范围之内, 就可以减少式 (7) 解模糊时的搜索次数, 甚至可以不用进行搜索就可以解模糊. 基于这种思想, 我们将整个观测到的脉冲信号分成若干个小段进行频率估计, 在此基础上, 对更长段进行相位解模糊处理并进行频率估计, 最终对整个数据段进行频率估计, 我们称之为多级频率估计算法. 下面介绍算法的步骤, 并对各步进行说明:

- (1) 观测信号对各个脉冲的幅度进行估计, 并且在各个脉冲内对观测相位进行解模糊处理.
- (2) 各个脉冲范围内对信号的频率进行估计, 并综合各个脉冲的频率估计, 分析估计误差和噪声方差.

(3) 根据上一次频率估计的精度将整个观测数据分成等长度的 Q 段, 每段数据含有 P' 个脉冲, 在各段内对相位进行解模糊处理和频率估计, 并综合各段的频率估计, 分析估计精度.

- (4) 重复第 (3) 步, 直到 $P' = P$, 得到最终的频率估计值.

第 (1) 步根据接收的信号 $z(n + Kp)$ 估计各个脉冲中信号的幅度 A_p , 容易得到各个脉冲信号幅度 A_p 的最大似然估计为

$$\hat{A}_p = \sum_{n=0}^{N_s-1} |z(n + Kp)| / N_s \tag{8}$$

经过脉冲内相位解模糊处理的第 p 个脉冲内的相位数学模型可以表示为

$$\phi_p(n) = \phi_p^t(0) + 2\pi f n \Delta + u(n), \quad n = 0, \dots, N_s - 1, \quad p = 0, 1, \dots, P - 1 \tag{9}$$

其中 $\phi_p^t(0)$ 表示第 p 个脉冲初始相位的真实值.

在第 (2) 步中, 因为式 (4) 中的相位噪声为高斯白噪声, 其马尔可夫估计等价于最小二乘估计, 容易得到各个脉冲的频率的最小二乘估计和估计方差为

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_{p,ls} &= \frac{6}{2\pi\Delta N_s(N_s^2 - 1)} \sum_{n=0}^{N_s-1} (2n - N_s + 1)\phi_p(n) \\ \text{var}(\hat{f}_{p,ls}) &= \frac{6\sigma^2}{(2\pi)^2 A_p^2 \Delta^2 N_s(N_s^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

定义变量 $g_p = 2\pi\Delta A_p \hat{f}_{p,ls} \sqrt{N_s(N_s^2 - 1)}/6$, 可见其服从高斯分布, 并且方差为 σ^2 . 因此可以定义修正的样本方差为噪声方差的估计值:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{P-1} \sum_{p=0}^{P-1} (g_p - \bar{g})^2 \tag{11}$$

其中 $\bar{g} = \sum_{p=0}^{P-1} g_p$. 记 $\bar{f}_{ls} = \sum_{p=0}^{P-1} \hat{f}_{p,ls}$, 将 $\hat{\sigma}^2, \hat{A}_p$ 分别代替 σ^2, A_p , 可以得到第 (2) 步的频率估计和频率估计精度为

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{ls} &= \frac{6}{2\pi\Delta PN_s(N_s^2 - 1)} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{N_s-1} (2n - N_s + 1)\phi_p(n) \\ \hat{\sigma}_{\bar{f}}^2 &= \frac{1}{P^2} \sum_{p=0}^{P-1} \frac{6\hat{\sigma}^2}{(2\pi)^2 P \hat{A}_p^2 \Delta^2 N_s (N_s^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在第 (3) 步中, P' 的选择与前一次频率估计的精度 $\hat{\sigma}_{\bar{f}}^2$ 和解相位模糊的正确概率 α 相关. 利用前一步得到的频率估计值对第 q 段信号中的第 i 个脉冲中的相位解模糊公式为

$$\phi_q(n + Ki) = \phi_{q,i}(n) + 2k_{q,i}\pi, \quad i = 0, 1, \dots, P' - 1 \quad (13)$$

其中 $k_{q,i}$ 为模糊数, 可以根据前一步频率估计值得到:

$$k_{q,i} = \text{round} \left[\sum_{i=0}^{N_s-1} [\phi_{q,0}(n) + 2\pi\bar{f}_{ls}\Delta Ki - \phi_{q,i}(n)] / (2\pi N_s) \right], \quad i = 1, \dots, P' - 1 \quad (14)$$

其中 $\text{round}(x)$ 为离 x 最近的整数, \bar{f}_{ls} 为前一步频率估计的结果, $\phi_{q,0}(n)$ 和 $\phi_{q,i}(n)$ 分别是第一个脉冲和第 $i + 1$ 个脉冲内第 $n + 1$ 个采样信号的相位 (已经过第一步在脉冲内解模糊处理). 在信噪比较高的情况下, 当选择

$$P' = \left\lfloor \frac{1}{2\sqrt{2\hat{\sigma}_{\bar{f}}^2} \text{inverfc}(1 - \alpha) K \Delta} \right\rfloor + 1 \quad (15)$$

使得由式 (14) 得到的模糊数为实际模糊数, 即 $k_{q,i} = k_{q,i}^t$ 的概率大于 α , 式 (15) 中 $\hat{\sigma}_{\bar{f}}^2$ 为前一次频率估计的精度, $\text{inverfc}(\cdot)$ 为误差函数 $\text{erfc}(\cdot)$ 的反函数, $\lfloor x \rfloor$ 对 x 下取整. 与第 (2) 步相似, 对于每段数据进行最小二乘估计, 并将各段频率估计值的平均值作为这一步的频率估计值, 得到频率估计值和频率估计精度为

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{ls} &= \frac{6}{2\pi\Delta P' Q N_s (N_s^2 + K^2 P'^2 - K^2 - 1)} \\ &\quad \times \sum_{q=0}^{Q-1} \left[2 \sum_{p=0}^{P'-1} \sum_{n=0}^{N_s-1} (n + Kp)\phi_q(n + Kp) \right. \\ &\quad \left. - (KP' + N_s - K - 1) \sum_{p=0}^{P'-1} \sum_{n=0}^{N_s-1} \phi_q(n + Kp) \right] \\ \hat{\sigma}_{\bar{f}}^2 &= \frac{1}{Q^2} \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{6\hat{\sigma}^2}{(2\pi)^2 \bar{A}_q \Delta^2 N_s P' (N_s^2 + K^2 P'^2 - K^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $\bar{A}_q = \frac{1}{P'} \sum_{p=0}^{P'-1} \hat{A}_q$. 依此类推, 重复第 (3) 步使得解模糊的数据长度逐步增大, 最终达到出现 $P' \geq P$, 选取 $P' = P, Q = 1$, 并对整个观测期间的各个脉冲的相位进行解模糊处理.

若每一级相位解模糊正确的概率为 α ，则经过 M 级相位解模糊处理和频率估计，总的正确概率为 α^M ，一般情况下，若选取 $\alpha = 0.99999$ ，后面的仿真表明只要经过 3 ~ 5 级频率估计就可以得到最终的频率估计，总的正确概率 α^M 还是相当高的，所以，可以认为最终得到的频率估计值总是正确的频率估计值。

在利用第 3 节的方法进行频率估计中，式 (7) 需要进行 P 维的整数搜索，如果每一维进行 I 次搜索，一共要进行 I^P 次搜索，当 $P \geq 10$ 时，计算量相当大。多级频率估计算法的计算量主要集中在各级的频率估计和相位解模糊处理上，算法中不存在搜索计算的问题。从式 (13)~式 (16) 可以看出，每一级频率估计需要 $5P \cdot N_s$ 次左右乘法计算， $4P \cdot N_s$ 次左右的加法计算。因此经过 3 ~ 5 级的频率估计的计算量为 $O(10P \cdot N_s)$ 次乘法和 $O(10P \cdot N_s)$ 次加法，可以看出多级频率估计的运算量是比较小的。

5 仿真试验

设采样速率为 $f_s = 100\text{MHz}$ ，脉冲重复频率 $\text{PRF} = 20\text{kHz}$ ，脉冲宽度 $\tau = 0.25\mu\text{s}$ ，峰值点的信号幅度归一化为 1，噪声方差 $\sigma^2 = -30\text{dB}$ ，中频信号的频率 $f = 21.74678\text{MHz}$ ，每一级正确解相位模糊的概率 $P_c = 0.999999$ 。假设其幅度变化为高斯函数波形，半功率点的时间宽度为 0.012s，即观测时间 $t = 0.012\text{s}$ 。在以上的条件下都进行 50 次独立的仿真试验，所有的仿真试验进行了 4 级频率估计就得到了最终的频率估计值，图 1 为各级估计中的频率估计的误差值，从图中可以看出，第一级估计是在脉冲内进行频率估计，频率估计的误差为千赫数量级，随着估计级数的增大，频率估计的误差迅速减小，最后的频率估计误差达到了 0.01Hz 数量级。

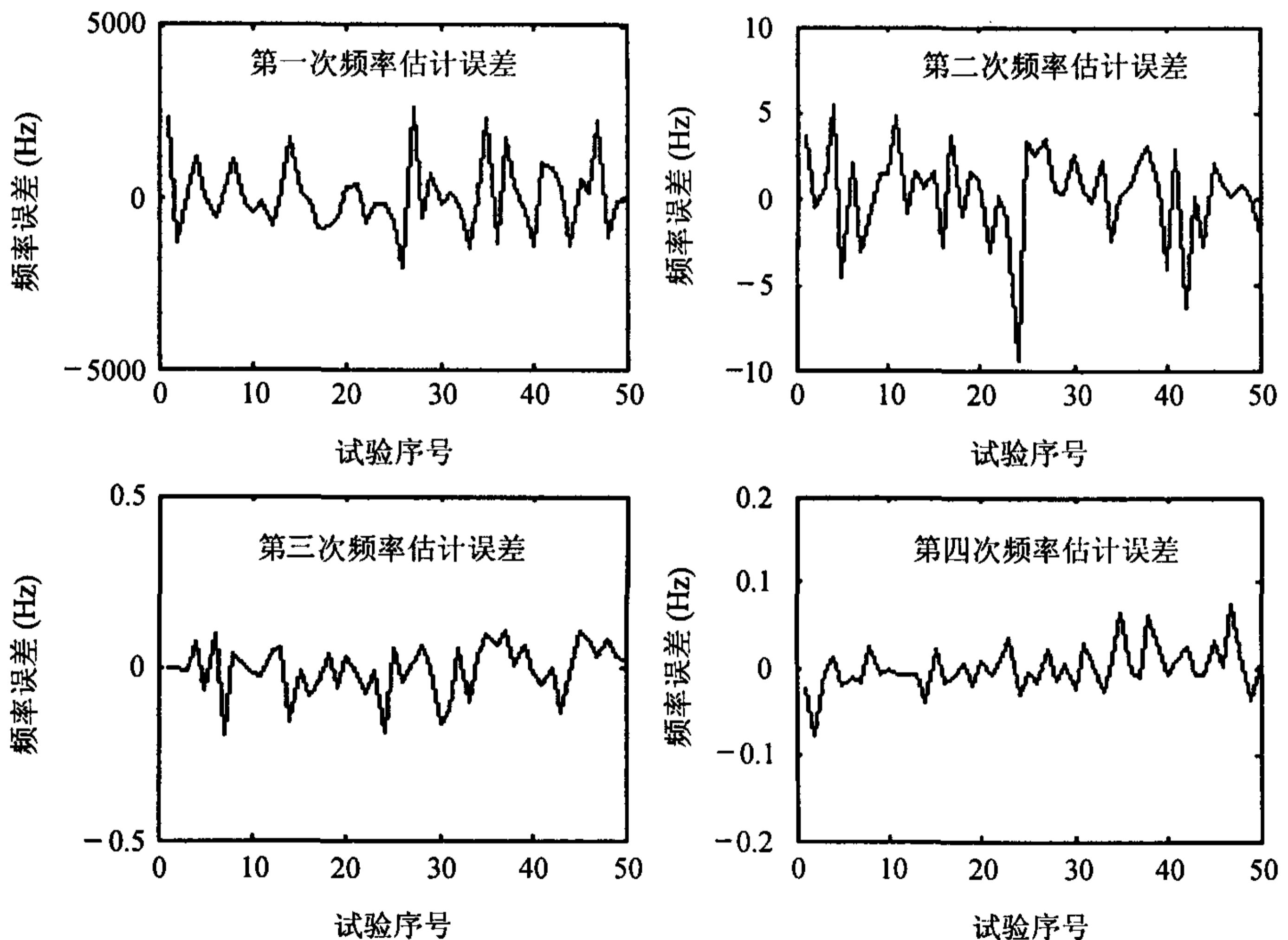


图 1 多级频率估计算法中各级频率估计误差

下面通过仿真分析这种频率估计级数与噪声方差和正确解模糊概率的关系。在保证其它参数不变的情况下，分别改变噪声的方差为 -20dB, -25dB, -30dB, -35dB, -40dB，同时改变每一级相位解模糊处理的正确概率为 0.9, 0.99, 0.9999, 0.999999，对每一种情况通过 50 次的试验，计算得到频率估计的平均级数如表 1 所示。从表 1 可以看出，在大多数的情况下，只要进

行 3 ~ 4 级频率估计就可以达到最终的频率估计，而相位解模糊的正确概率和信号的噪声方差对频率估计的级数影响并不很大，所以一般情况下可以选择比较大的相位解模糊正确概率进行多级频率估计，最终可以得到比较高的相位解模糊概率，而不过多增加估计算法的运算量。

表 1 频率估计的平均级数与噪声方差和正确概率的关系

P_c	噪声方差				
	-20dB	-25dB	-30dB	-35dB	-40dB
0.9	4.00	3.12	3.00	3.00	3.00
0.99	4.00	4.00	3.94	3.00	3.00
0.9999	4.00	4.00	4.00	3.26	3.00
0.999999	4.00	4.00	4.00	4.00	3.00

从前面的分析中可以看出，利用多级频率估计算法得到的频率估计为最优估计，即频率估计的方差能够达到 CRLB，以下将通过不同的仿真试验验证这个结论，并且分析噪声方差、观测时间、脉冲宽度等不同参数对多级频率估计的影响。

在保持其它参数不变的情况下，逐步将信号噪声方差从 -10dB 减小到 -40dB，对不同的信号噪声方差都分别通过独立的 25 次仿真试验，图 2 绘出了在脉冲宽度分别为 $0.15\mu s$ 和 $0.30\mu s$ 的情况下多级频率估计方差的统计曲线，同时给出了式 (3) 对应的 CRLB。从图中可以看出，多级频率估计的方差与 CRLB 一致；随着噪声方差的减小，多级频率估计的方差值变小。

在保证其它的参数不变的情况下，改变信号观测时间的长度，使之从 0.004s 增加到 0.02s，一共进行 25 次仿真试验，图 3 绘出了在脉冲宽度分别为 $0.15\mu s$ 和 $0.30\mu s$ 的情况下多级频率估计方差的统计曲线，同时给出了式 (3) 对应的 CRLB。从图可以看出，多级频率估计得到的估计方差和 CRLB 一致，随着观测时间的增加，频率估计的方差迅速减小。从图 2、图 3 还可以看出，如果增大脉冲的宽度，可以减小频率估计的方差。

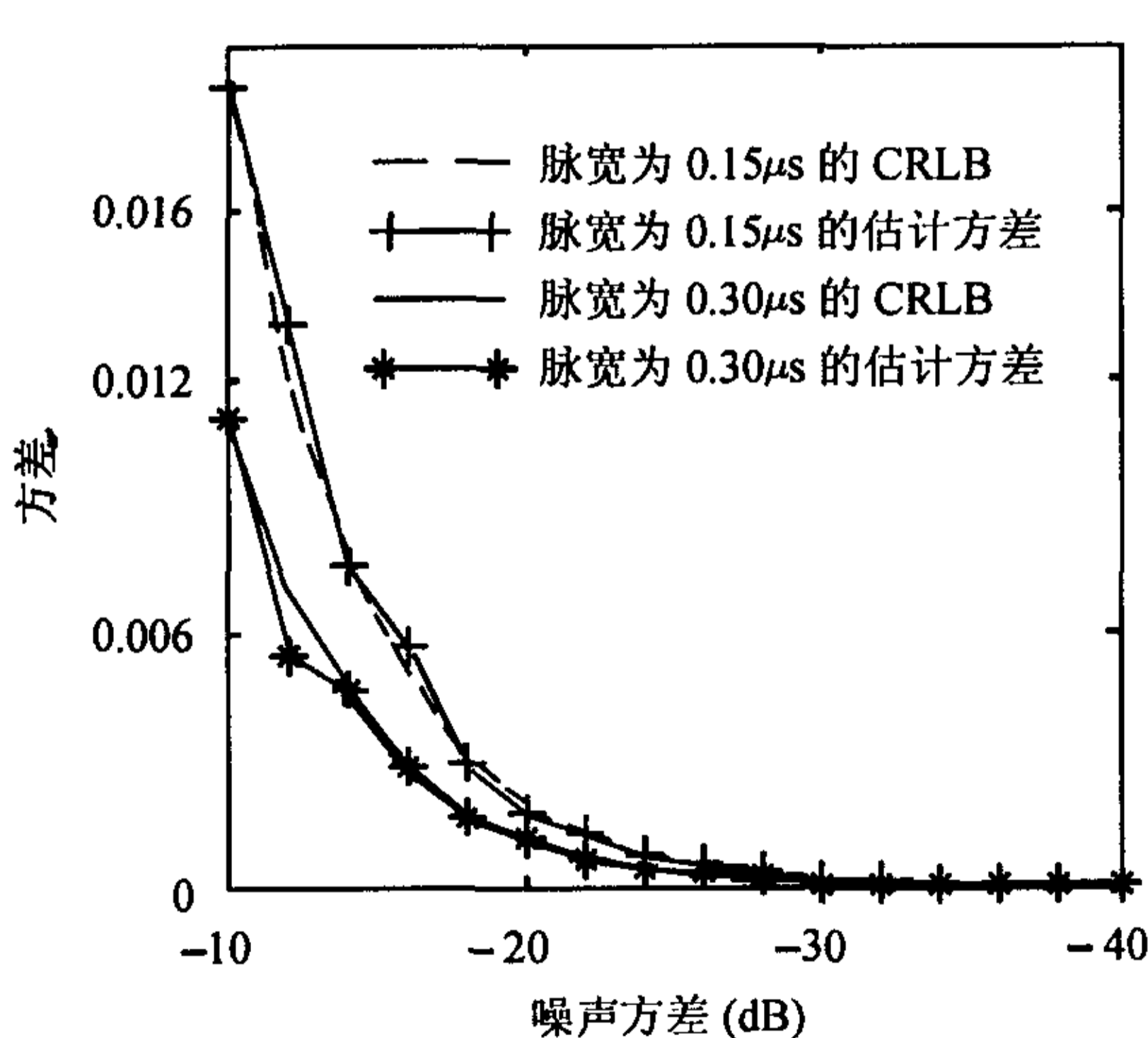


图 2 噪声方差对频率估计误差影响

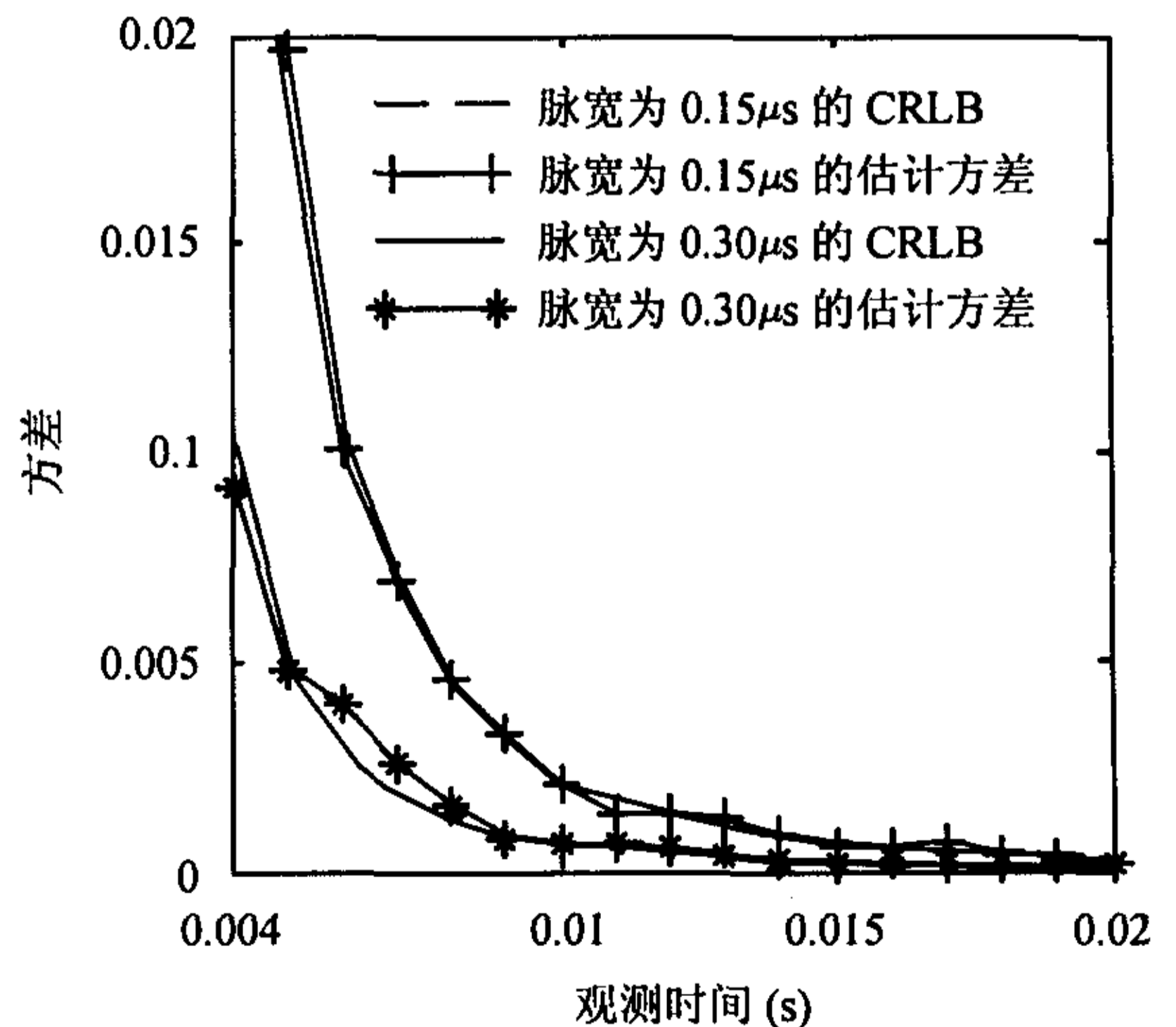


图 3 观测时间对于频率估计方差影响

6 结束语

本文针对相参脉冲信号提出了多级频率估计算法，说明了这种算法是一种最优估计算法，并且具有正确概率高、计算量小等优点。通过仿真试验验证了多级频率估计算法对相参脉冲信号进行频率估计的可行性，并且可以得到高精度的频率估计值，其估计值的方差与 CRLB 一致。

得出了正确估计概率和噪声方差对算法的级数要求不敏感的结论, 从而为选取大的正确概率进行多级频率估计提供了依据.

参 考 文 献

- [1] Torrieri D J. Statistical theory of passive location systems, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1984, 20(2): 183-198.
- [2] Stocia P. List of references on spectral line analysis. *Signal Processing*, 1993, 31(3): 329-340.
- [3] IEEE Standard for Digitizing Waveform Recorders, 1994.
- [4] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1974, 20(5): 591-598.
- [5] Becker K. New algorithm for frequency estimation from short coherent pulses of a sinusoidal signal. *IEE Proc.-F*, 1990, 137(4): 283-288.
- [6] Kay S M. A fast and accurate single frequency estimation. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37(2): 1987-1990.
- [7] Völcker B, Händel P. Frequency estimation from proper sets of correlations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(4): 791-802.

龚享铤: 男, 1973年生, 博士生, 研究方向为现代信号处理、单站无源定位技术.

周良柱: 男, 1952年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理.