

记忆 MIMO 系统的容量

孙胜贤 童军 龚耀寰
(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘要: 本文考虑记忆多输入多输出 (MIMO) 无线通信系统的容量。在记忆 MIMO 信道分块瑞利衰落条件下, 利用多元随机分析和统计理论, 得到系统的信道容量的随机表达式。分析和模拟表明, 在收发天线数和数据帧长相同时, 记忆 MIMO 系统比非记忆 MIMO 系统具有更大的容量, 并且随记忆阶数的加大而增大。

关键词: 记忆 MIMO 系统, Wishart 矩阵, χ^2 分布, 信道容量

中图分类号: TN92, TN914 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)02-0226-04

Capacity of MIMO System with Memory

Sun Sheng-xian Tong Jun Gong Yao-huan
(Electronic Engineering College, UEST of China, Chengdu 610054, China)

Abstract This paper mainly deals with the capacity of MIMO system with memory. With assumption that MIMO channels with memory are independently Rayleigh and block-fading, a closed-form stochastic formula of the MIMO system with memory is derived with the stochastic analysis and multivariate statistical theory. The analysis and simulations show that, under the assumptions of same transceiver antenna number and perfectly receiving signal processing, the capacity of MIMO system with memory is higher than that without memory and increases as the number of memory increases.

Key words MIMO system with memory, Wishart matrix, χ^2 distribution, Channel capacity

1 引言

为了充分利用无线系统的资源, 适应下一代 3G、4G 高速无线通信的需要, MIMO 无线通信系统的工作越来越有现实意义。目前关于 MIMO 容量方面的工作一部分是考虑平衰落无记忆 MIMO 系统, 如文献[1]就得到了一个与系统信道实现有关的随机表达式; 另一部分是在发射端已知信道状态信息的注水算法(Water-filling)^[2]。对于记忆 MIMO 无线通信系统, 大量的工作集中在系统通过反馈, 发射端对信道状态信息已知的注水算法。虽然注水算法能够达到系统的最大通信容量, 但信道的反馈实质上降低了系统的通信容量, 它的另一个缺点是反馈的信息实际上也是经过信道衰落的信息, 这给反馈信息带来了很大的误差。这个误差的消除必须采用另外的办法来降低。这就额外增加了系统在信道估计时的处理复杂度和处理难度^[3-5]。另外, 对于记忆 MIMO 系统, 文献[6]在采用 OFDM 调制方式的假设下, 采用频带分割方式的局部频率无记忆化求得了系统信道容量的表示, 为宽带 MIMO 系统的容量提供了一个表达式。为了省去 MIMO 系统的反馈及 OFDM 调制的具体假设, 本文在发射端仅仅了

解信道满足分块瑞利衰落和信道的记忆阶数(长度)的假设下, 获得与具体调制格式无关的, 但与信道实现有关的容量的随机表达式, 并且通过分析得到在同等条件下(收发天线数和数据帧长), 记忆 MIMO 系统的容量比对应无记忆系统的容量更大, 并且随着记忆的加长而加大的结论。若考虑到信道相关的情况, 可用文献[3]的方法对信道矩阵分解, 具体此处不赘述。虽然记忆 MIMO 系统的容量具有比对应无记忆系统更大的容量, 但要获得这个容量, 必须增加系统的接收处理复杂度, 可行的方法包括空时均衡^[7]或空时频(STF)编码方法^[8], 具体将另文阐述。

2 部分定义及相关理论

本文小写黑体字母表示向量, 大写黑体表示矩阵, $(\cdot)^T, (\cdot)^H$ 表示转置和共轭转置, I_k 表示 $k \times k$ 的单位矩阵, $\det(\cdot), \text{tr}(\cdot)$ 分别表示矩阵的行列式和迹算子, χ_{2k}^2 表示 $2k$ 个自由度的 χ^2 分布。

定义 1^[9] $n \times m$ 维矩阵 G 是高斯(瑞利)矩阵。若矩阵每个元是具有相同均值 0 和方差 1 的复正态分布的随机元, 且任意元之间都相互独立, 则记为 $G_{nm}(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\Sigma = I_n \otimes I_m$, \otimes

表示 Kronecker 积。

定义 2^[9] 矩阵 A 是 Wishart 矩阵。若矩阵 A 具有形式 $A = GG^H$, G 是 $n \times m$ 高斯矩阵, 并且 A 是有 m 个自由度和方差矩阵 Σ 的 Wishart 分布, 则记为 $W_n(m, \Sigma)$, 下标 n 表示矩阵 G 的维数。

定理 1^[9] 若 $m \times m$ 维随机矩阵 A_1, A_2, \dots, A_r 是相互独立的, 分布为 $W_m(n_i, \Sigma)$, $i = 1, \dots, r$, 则矩阵 $\sum_{i=1}^r A_i$ 是 $W_m(n, \Sigma)$, 其中 $n = \sum_{i=1}^r n_i$ 。

定理 2^[9] 矩阵 A 是 $W_n(m, \Sigma)$ 分布的 Wishart 矩阵, 当且仅当 $m \geq n$ 时, A 有概率 1 正定。

定理 3^[9] 矩阵 A 是 $W_n(m, \Sigma)$ 。若 $m \geq n$, 则 $\frac{\det(A)}{\det(\Sigma)}$ 有分布为 $\prod_{i=1}^n \chi_{m-i+1}^2$, 其中 $\chi_{m-i+1}^2, i = 1, \dots, m$ 是独立的 χ^2 分布随机变量。特别的, 若 $\Sigma = I$, 则有 $\det(A) = \prod_{i=1}^n \chi_{m-i+1}^2$ 。

定义 3 以四元组 (m, n, L, K) 为参数的矩阵 H 为 $(K + L) \times K$ 块的局部高斯块分块的 Toeplitz 矩阵,

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & H^0 & \ddots & \vdots \\ H^L & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H^L & \dots & H^0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & H^L \end{pmatrix}, \text{ 其中 } m, n \text{ 分别表示 } L+1 \text{ 个相互}$$

独立的高斯矩阵 H^0, H^1, \dots, H^L 的行数和列数, K 是 H 的块的列数。

引理 1 对有参数为 (m, n, L, K) 的矩阵 H , 如定义 3 所述, 则 $B = HH^H$ 具有分块对角形 $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{L+K})$, 每个 $B_i, i = 1, 2, \dots, L+K$ 是 Wishart 矩阵。若 $K < L+1$, 其中

$$B_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j H^{i-1} (H^{i-1})^H, & K \geq j \geq 1 \\ \sum_{i=j-K+1}^j H^{i-1} (H^{i-1})^H, & L \geq j > K \\ \sum_{i=j}^{L+K} H^{i-k} (H^{i-k})^H, & L+K \geq j > L \end{cases} \quad (1)$$

证明 当 $K < L+1$ 时, H 可分块表示为

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H^{K-1} & \dots & H^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H^L & \dots & H^{L-K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & H^L \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第1行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第K行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第L+1行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第L+K行} \end{matrix}$$

再利用分块矩阵的乘积及 H^0, H^1, \dots, H^L 的高斯特性, 并利用定理 1, 可得结论。

证毕

引理 2 对有参数为 (m, n, L, K) 的矩阵 H , 如定义 3 所述, 若 $K = L+1$, 则 $B = HH^H$ 具有分块对角形 $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{L+K})$, 且每个 $B_i, i = 1, 2, \dots, L+K$ 是 Wishart 矩阵, 其中

$$B_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j H^{i-1} (H^{i-1})^H, & K \geq j \geq 1 \\ \sum_{i=j}^{L+K} H^{i-k} (H^{i-k})^H, & K+L \geq j > K \end{cases} \quad (2)$$

证明 当 $K = L+1$ 时, H 可分块表示为

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H^L & \dots & H^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & H^L \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第1行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第K=L+1行, 后略.} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第L+K行} \end{matrix} \text{ 证毕}$$

引理 3 对有参数为 (m, n, L, K) 的矩阵 H , 如定义 3 所述, 若 $K > L-1$, 则 $B = HH^H$ 具有分块对角形 $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{L+K})$, 且每个 $B_i, i = 1, 2, \dots, L+K$ 是 Wishart 矩阵, 其中

$$B_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j H^{i-1} (H^{i-1})^H, & L+1 \geq j \geq 1 \\ \sum_{i=j-K+1}^j H^{i-1} (H^{i-1})^H, & K-1 \geq j > L+1 \\ \sum_{i=j}^{L+K} H^{i-k} (H^{i-k})^H, & L+K \geq j > K \end{cases} \quad (3)$$

证明 当 $K > L+1$ 时, H 可分块表示为

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ H^L & \dots & H^0 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & H^L & \dots & H^0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & H^L \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第1行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第L+1行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第K行} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第L+K行} \end{matrix}, \text{ 后略. 证毕}$$

引理 4 若 $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则 $\prod_{i=1}^n \lambda_i$ 最大的充要条件是 $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)$ 最大。

证明 利用凸优化理论的 K-T 条件或拉格朗日乘子法^[10], 结论易证, 后略。

证毕

3 记忆 MIMO 系统的容量

考虑采用 n_t 个发射天线, n_r 个接收天线的记忆 MIMO 系统, 并设各天线间最大记忆阶数(可分辨的多径数)为

$L+1$, 数据帧长为 K 的系统, 输入输出关系的符号率采样复基带表示为

$$y = \sqrt{\rho} Hx + \eta \quad (4)$$

其中输出帧向量 $y = [y(1)^T, \dots, y(K)^T, \dots, y(K+L)^T]^T$, $y(i) = [y_1(i), \dots, y_{n_r}(i)]^T$, $i = 1, \dots, K+L$, 加性噪声帧向量 $\eta = [\eta(1)^T, \dots, \eta(K)^T, \dots, \eta(K+L)^T]^T$, $\eta(i) = [\eta_1(i), \dots, \eta_{n_r}(i)]^T$, $i = 1, \dots, K+L$, 输入数据帧向量 $x = [x(1)^T, \dots, x(K)^T]^T$, $x(i) = [x_1(i), \dots, x_{n_t}(i)]^T$, $i = 1, \dots, K$, ρ 是各接收天线平均信噪比 (SNR), H 是记忆 MIMO 系统的信道矩阵, 设收、发阵列的天线间距充分大使得各信道不相关, H 有形式为

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & H^0 & \ddots & \vdots \\ H^L & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H^L & \dots & H^0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & H^L \end{pmatrix}, \quad H^i, \quad i = 0, 1, \dots, L \text{ 是 } n_r \times n_t \text{ 的}$$

相互独立同分布 0 均值和单位方差的复高斯矩阵^[3,4,6], 则输入输出的互信息^[1,10]为

$$I(x; (y, H)) = \log_2 \det(I_{(K+L)n_r} + \rho HSH^H) \quad (5)$$

另外考虑到发射总功率的限制, 故系统目标为

$$\max_x I(x; (y, H)), \quad \text{s.t. } \text{tr}(S_i) = 1, \quad i = 1, \dots, K \quad (6)$$

其中 $S_i = E\{x(i)x(i)^H\}$, $i = 1, \dots, K$.

对非负定矩阵 A , 若 A 的特征值为 $\lambda_i(A)$, 则

$$\det(I + A) = \prod_i (1 + \lambda_i(A)) \quad (7)$$

及行列式性质 (设矩阵符合条件)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (8)$$

$$\det(I + AB) = \det(I + BA) \quad (9)$$

并利用引理 4 及式 (8), 得式 (6) 的优化解, 在下式取得优化解时, 得

$$\max_x \det(S)\det(B), \quad \text{s.t. } \text{tr}(S_i) = 1, \quad i = 1, \dots, K \quad (10)$$

其中

$$B = \begin{cases} HH^H, & (K+L)n_r \leq Kn_t \\ H^H H, & (K+L)n_r > Kn_t \end{cases} \quad (11)$$

进一步, 由发射信号与信道实现的独立性, 式 (10) 的优化解在下式取得优化解时, 有

$$\max_x \det(S), \quad \text{s.t. } \text{tr}(S_i) = 1, \quad i = 1, \dots, K \quad (12)$$

由正定矩阵的性质, 当且仅当 S 是对角矩阵时 $\det(S)$ 最大, 并利用引理 4, 式 (6) 的优化解为

$$S = (1/n_t)I_{Kn_t} \quad (13)$$

亦即发射信号是相互独立的高斯信号时, 系统的容量最大为

$$\log_2 \det(I_{\text{rank}(B)} + (\rho/n_t)B) \quad (14)$$

其中 B 如式 (11) 所定义, $\text{rank}(B)$ 表示矩阵 B 的秩. 由式 (9), 定理 3 及引理 1-3, 可得容量的上界为

$$C = \begin{cases} 2 \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2(jn-i+1)}^2 \right) \\ \quad + (L-K) \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2(Kn-i+1)}^2 \right), & K < L+1 \\ 2 \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2(jn-i+1)}^2 \right) \\ \quad + \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2((L+1)n-i+1)}^2 \right), & K = L+1 \\ 2 \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2(jn-i+1)}^2 \right) \\ \quad + (K-L) \sum_{i=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2((L+1)n-i+1)}^2 \right), & K > L+1 \end{cases} \quad (15)$$

其中 $l = \min(n_t, n_r)$, $n = \max(n_t, n_r)$.

为与常规无记忆 MIMO 系统作公正的比较, 定义单位发射的容量为

$$\bar{C} = C/(Kn_t) \quad (16)$$

由 χ_{2l}^2 分布的随机变量的统计特性, $\forall L > 0$, 有 $\bar{C} > \bar{C}$, 其中 \bar{C} 为文献 [1] 对应天线系统的容量, 故在相同收发天线和完备的接收处理的条件下, 分块瑞利衰落记忆 MIMO 系统比瑞利衰落无记忆 MIMO 系统具有更大的容量. 另外, 为说明信道记忆阶数的影响, 由式 (15), 在一般通信情况下 $K \gg L+1$, 当 L 变化为 $L+1$ 时, 系统容量的变化量的均值为

$$\sum_{i=1}^L E \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{n_t} x_{2((L+1)n-i+1)}^2 \right) \right\} \quad (17)$$

从式 (17) 可见, 若记忆阶数 L 增大, 则系统容量增大. 类似对 $K < L+1$, $K = L+1$ 的情况分析, 都有相同的结论. 值得注意的是: 信道的记忆阶数是信道的固有特征 (但与接收端有关系, 如采样频率), 并且, 系统容量的加大是以系统复杂度作代价的. 另外, 如文献 [3-5], 若考虑接收数据的文献 [3,4] 截断 (去掉接收的最后发射时刻 K 后的记忆部分) 且 $K \gg L+1$ 的情况, 也有类似的结论, 但系统容量稍有降低.

4 模拟结果

虽然式 (15) 是相互独立的随机变量的和, 可采用卷积方法来求得随机变量和的具体分布, 但当 K, L 比较大时, 采用卷积方法来求出界概率实际上有很大的困难, 因此在文献 [1] 中的在不同出界概率时系统的容量必须采用近似方法,

已超出本文的范围, 此处不再赘述。为了求得 C 的一个较方便的近似统计特性, 本文采用一般广泛采用的系统遍历容量作为统计标准。在模拟中, 为比较分块瑞利衰落记忆 MIMO 系统的记忆阶数 L 对系统容量的影响, 采用式 (16) 作为系统的单位容量。图 1 是系统采用不同四元组 (2, 2, 8, 8), (2, 2, 8, 64), (2, 2, 8, 256) 和 (4, 4, 8, 8), (4, 4, 8, 64) 和 (4, 4, 8, 256) 的系统容量均值与信噪比的对照图。可见, 当系统收发天线和信道记忆阶数固定时, 数据帧长越大, 单位遍历容量越小。另外, 当发射总功率恒定, 系统的发射天线越多, 单位遍历容量就越小, 因为每个发射天线的发射功率都变小了。图 2 是 (4, 6, 4, 128), (4, 6, 8, 128), (4, 6, 16, 128) 和 (6, 4, 4, 128), (6, 4, 8, 128), (6, 4, 16, 128) 的情况。可见, 在相同的收发天线数和数据帧长时, MIMO 系统的记忆阶数越高, 容量就越大。

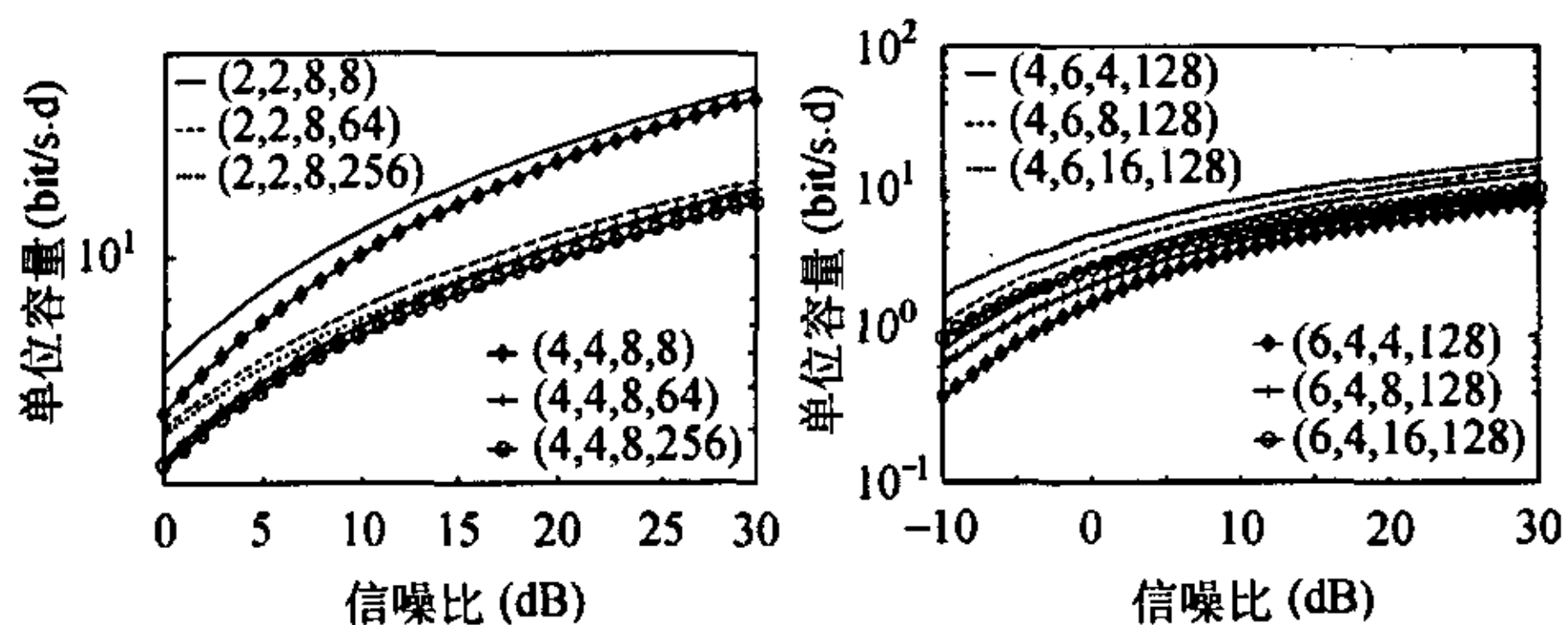


图 1 收发天线数固定, 信道记忆阶数恒定, 不同数据帧长的系统单位遍历容量与信噪比对照图

图 2 收发天线数互调, 相同数据帧长, 不同信道记忆阶数的系统单位遍历容量与信噪比对照图

5 结论

本文利用多元随机分析和优化理论, 详细的分析了分块瑞利衰落记忆 MIMO 系统的信道容量, 得到系统容量上界的一个随机表达式, 并通过模拟证明了, 在相同收发天线数和数据帧长时, 记忆 MIMO 系统的容量大于对应的无记忆 MIMO 系统的容量, 并且信道容量随信道记忆的阶数的增高而增大。

参考文献

- [1] Foschini G J, Gans M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antenna. *Wireless Personal Communications*, 1998, (6): 311 - 335.
- [2] Emre Telatar. Capacity of multi-antenna Gaussian channels. *Euro. Trans. Telecom.*, 1999, (10): 585 - 595.
- [3] Raleigh G, Cioffi J M. Spatio-temporal coding for wireless communication. *IEEE Trans. on Communications*, 1998, 46(3): 357 - 366.
- [4] Hirt W, Massey J L. Capacity of the discrete-time Gaussian channel with intersymbol interference. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1988, 34(3): 380 - 388.
- [5] Bliss D W, Forsythe K W, Hero A O, et al.. Enviromental issues for MIMO capacity. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(9): 2128 - 2142.
- [6] Helmut Bölcskei, David Gesbert, Paulraj A J. On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. on Communications*, 2002, 50(2): 225 - 234.
- [7] Petersen B R, Falconer D D. Suppression of adjacent-channel, cochannel, and intersymbol interference by equalizers and linear combiners. *IEEE Trans. on Communications*, 1994, 42(12): 3109 - 3118.
- [8] Liu Zhiqiang, Xin Yan, Giannakis G B. Space-time-frequency coded OFDM over Frequency-selective fading channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50 (10): 2465 - 2476.
- [9] Muirhead Robb J. Aspects of Multivariate Statistical Theory. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1982, Chapter 2.
- [10] Donald A Pierre. Optimization Theory with Applications. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1969, Chapter 6.
- [11] Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1982, Chapter 7.

孙胜贤: 男, 1972 年生, 博士生, 主要从事自适应信号处理及阵列信号处理研究。

童 军: 男, 1981 年生, 硕士生, 主要从事自适应信号处理及空时通信技术研究。

龚耀寰: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事自适应信号处理、智能天线及编码技术研究。