第15卷 第3期　　电子科学学刊　　Vol. 15, No. 3
1993年5月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1993

对频域推进法的改进

彭仲秋
（电子科技大学二系，成都 610054）

摘要　频域推进法的基本技术是在递进的取样频率上用迭代法解离散化积分方程，并用基于误差最小化的外推法为迭代法产生初始解．把对比源截断法中的迭代公式修改后，可明显加速在低频的收敛．在复频域求解是加速迭代法收敛的有效途径，因为方程的性态在复频域得到改善．而且，解随频率的变化比在实频域平缓，用外推法能产生较精确的初始解．

关键词　瞬态电磁散射；积分方程；迭代法；外推法

1. 引言

基于积分方程计算物体的瞬态响应有两类基本方法，即时域法和频域法．时域法比频域法求解效率高，但由于按时间递进求解过程中误差逐渐积累，可能引起振荡形式的不稳定[1]．最近在文献[2]中提出一种频域推进法(marching-on-in-frequency method)，它兼有上述两种方法的优点，并且克服了它们的缺点．这种新方法实质上是一种改进的频域法． 基本技术是在递进的取样频率上用迭代法求解，并由前面若干频率上已计算好的解，借助一种基于误差最小化的外推法为迭代法产生初始解，使迭代很快收敛．

用迭代法解离散化的积分方程(矩阵方程)，在很多方面比用直接法(如高斯消去法)优越[3]．但是，迭代法的收敛性与方程的状态，即与积分算子离散化所得矩阵的条件数直接相关．当条件数很大时(如在散射体内谐振频率附近)收敛很慢 在各种迭代法中，共轭梯度法(CGM)的适用范围最广．但对某些特殊问题，对比源截断(CST)法[4]更有效．CST法在文献[5]中称为谱域迭代最小化法 (SIM)，其迭代求解步骤与 CGM 基本一致，主要区别在于变分函数的生成方式不同．

为提高频域推进法的计算效率，关键是加快迭代法的收敛速度．本文深入阐述两个加快收敛的措施：一是对 CST 法迭代公式的修改，另一个是在复频域迭代求解．后一措施能有效地克服内谐振的影响．在文献[2]中虽已提到上述两点，但未给出理论分析和实例．事实上，当时还没有充分认识在复频域求解的重要性．本文是对文献[2]的补充和发展．

2. CST 法迭代公式的修改

设待解的矩阵方程为

$$Ax = b \tag{1}$$

1992.01.27 收到，1992.05.29 定稿．

彭仲秋　男，1943年生，教授，从事电磁场与微波技术专业的研究，当前研究方向为瞬变电磁场、电磁散射和反演、阵列天线等．

其中 A 代表积分算子离散化后的方阵，称为系统矩阵，x 和 b 分别为解矢量和已知激励矢量。CST 适用于处理褶积型算子，即适用于解具有离散褶积结构的矩阵方程。此时矩阵与矢量的乘积可通过谱域量借助 FFT 完成。CST 法的关键技术是利用谱域迭代法构造一个近似逆算子，用来产生变分函数。设

$$r^{(n)} = Ax^{(n)} - b \tag{2}$$

是第 n 次迭代解 $x^{(n)}$ 的残差，则变分函数 $\phi^{(n)}$ 按下式产生：

$$\phi^{(n)} = F^{-1}\{\tilde{A}^{-1}\tilde{r}^{(n-1)}\} \tag{3}$$

其中 F^{-1} 代表取 Fourier 逆，$\tilde{A}$ 和 $\tilde{r}^{(n-1)}$ 分别为 A 和 $r^{(n-1)}$ 的 Fourier 变换。(3)式意味着

$$\tilde{r}^{(n-1)} = \tilde{A}\tilde{\phi}^{(n)} \tag{4}$$

(4)式表明，$\phi^{(n)}$ 代表“对比源”(contrast source)，$r^{(n-1)}$ 代表相应的“场”。利用 FFT 完成上述计算，M 元矢量 $r^{(n-1)}$ 需扩展成 $2M$ 元，得到的 $\phi^{(n)}$ 亦有 $2M$ 元。根据物理概念，对比源仅存在于散射体所在的空间，因此，$\phi^{(n)}$ 的后 M 个元素取为 0（故名为对比源截断法）。但是，在文献[4]的迭代公式中，$r^{(n-1)}$ 是通过补 0 元素扩成 $2M$ 元的，这相当于把场也“截断”了。数值计算表明，这样处理使得 CST 法在低频运用时收敛性很差。

经数值试验发现，把 M 元的 $r^{(n-1)}$ 按偶对称扩成 $2M$ 元，能得到接近“截断”的 $\phi^{(n)}$。根据文献[4]中的分析，此时迭代接近收敛。这一修改使 CST 法在低频时的慢收敛得到根本克服。例如，宽度为 $L = 0.03\lambda_0$（λ_0 为波长）的无限长导电带，TM 平面波激励。把 L 等分成 $M = 32$ 段，用矩量法解问题的积分方程。以 0 作为初始解，用 CST 法解结果的矩阵方程。采用“截断”形式(补 0)的 $r^{(n-1)}$，迭代 32 次仍未收敛；而采用偶对称扩展的 $r^{(n-1)}$，只需 5 次迭代即收敛(按 $\|r^{(n)}\|/\|b\| < 10^{-3}$)。当频率较高时($L/\lambda_0 \geqslant 0.5$)，数值结果表明，补 0 扩展法与偶对称扩展法导致 CST 法的收敛率基本一致，均可少于 5 次迭代达收敛要求。在低频 $r^{(n-1)}$ 采用偶对称扩展能改进收敛率，是由于在 $L/\lambda_0 \ll 1$ 条件下，在 $2L$ 范围内场分布接近均匀。

3. 在复频域求解

（1）*用外推法产生初始解*　　在频域推进法中，迭代法的初始解 $x^{(0)}(s_n)$($s_n = \beta + jn\Delta\omega$)是用前面若干频率上的结果 $x(s_{n-k})$ ($k = 1, 2, \cdots, k$)外推产生的，即

$$x^{(0)}(s_n) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(s_{n-k}) \tag{5}$$

系数 α_k 的选择是使初始解的残差 $r^{(0)}$ 的均方值最小。经数值试验得出 $K = 3$ 能产生最好结果[2]。传统的频域法是在递进的实频率 $\omega_n = n\Delta\omega$($n = 0, 1, \cdots, N-1$)上计算频域解，经 Fourier 逆变换得时域解。这相当于在复 s 平面沿 $\beta = 0$ 路径推进求解。但是，根据奇点展开法的分析结果[6]，良导电体的复谐振频率(自然频率)在 s 平面上分布在左半平面($\beta < 0$)，第一层自然频率紧靠虚轴 $\beta = 0$。因此，沿 $\beta = 0$ 路径求解，在靠近复谐振频率时解随频率变化剧烈。改为沿 $\beta > 0$ 路径(在复频域)，解随频率的变化则较为平缓。图 1 是细圆柱导电线天线中点电流的实部和虚部随频率的变化。天线长 1.5m，半径为 3mm（与文献[2]中第 3 节算例相同)。显然，沿 $\beta > 0$ 路径比沿 $\beta = 0$ 路径应用外推法能产生更好的初始解。

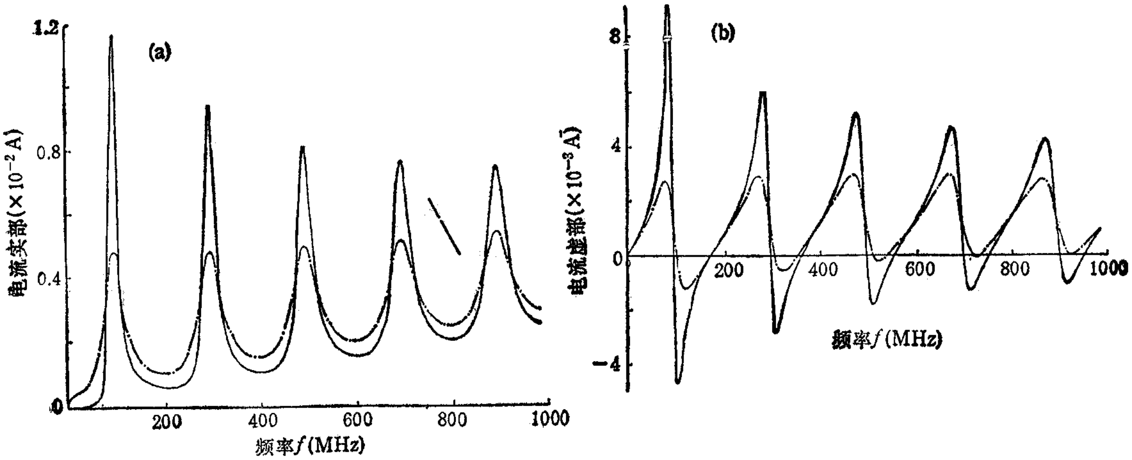

图 1 中点电流实、虚部随频率的变化

实线: $\beta=0$, 点划线: $\beta/c_0=0.3$ (c_0 为光速)

(2) 矩阵性态的改善 从沿 $\beta=0$ 路径(实频域)改为沿 $\beta>0$ 路径(复频域)求解的重要性,还在于能有效地改善系统矩阵的性态,因而能加快收敛. 矩阵 A 性态的标志是条件数 c, c 值越大病态越严重. A 的谱条件数为

$$c=(\lambda_{\max}/\lambda_{\min})^{1/2} \tag{6}$$

其中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别是合成矩阵 $A^{+}A$(A^{+} 是 A 的共轭转置)的最大和最小本征值. 如果 A 是对称的,则 c 等于 A 的最大与最小本征值之比. 因此 c 取决于本征值的分散程度.本征值分布越集中, c 越小. 矩阵本征值的分布可利用著名的 Gerschgorin 定理[7]估计.

Gerschgorin 定理指出: 矩阵 A 的每个本征值 λ 都落在至少一个以对角线元素 a_{rr} 为圆心、以第 r 行的非对角线元素的绝对值之和为半径的圆盘内(称为 Gerschgorin 圆盘),即

$$|\lambda-a_{rr}|\leqslant\sum_{j\neq r}|a_{rj}| \tag{7}$$

对于解电磁散射的积分方程,矩阵元 a_{ij} 对应格林函数在子域(单元)的积分. 通常, 对角线元素 a_{rr} 对应自单元的积分,且 a_{rr} 不随 r 变化. 非对角线元素 $a_{ij}(i\neq j)$ 可用格林函数的值与单元尺寸的乘积估值. 三维问题的格林函数含指数因子 $\exp(-jkR)$,其中 R 代表场点至源点的距离, $k=-js/c_0=\omega/c_0-j\beta/c_0$($c_0$ 为光速). 二维问题的格林函数为零阶汉克尔函数, 其渐近式也含因子 $\exp(-jkR)$. 因此, $|a_{ij}|(i\neq j)$ 近似与指数因子 $\exp(-\beta R/c_0)$成正比. 显然,随 β 值的增大, $|a_{ij}|(i\neq j)$减小, Gerschgorin 圆盘的半径亦随之减小,矩阵 A 的本征值分布趋于集中. 这证明了 A 的条件数 c 随 β 值增大而减小. 但 β 值不能过大,否则,由复频域解经 Laplace 逆变换求时域解时,因子 $\exp(\beta t)$ 将使 FFT 运算的结果误差明显放大. 经验表明, $\beta T\leqslant 3$ 能得到满意的时域结果, T 是所关心的时间区间的上限. 若计算中采用双精度, $\beta T\leqslant 10$ 是允许的.

(3) 典型计算结果 考虑一横截面为半圆周的无限长导电柱, 电极化脉冲波垂直开口面入射,如图 2 所示. 这是与文献[2]中第 4 节类似的算例, 有关的积分方程公式和离散化处理已在文献[2]中详述.假设圆周半径为 5m,矩量法求解中半圆周被等分 $M=$

32 段，结果的矩阵方程用 CST 法求解.

图 3 是 CST 法达收敛的迭代次数随频率的变化. 图 3(a)和 3(b) 是在各取样频率上取 0 为初始解，图 3(a) 对应 $\beta=0$，图 3(b)对应 $\beta/c_0=0.02$. 可以看出，以 0 为初始解在实频域迭代求解，在谐振频率附近的宽范围内都不能经 32 次迭代达收敛. 仍以 0 为初始解改在复频域迭代求解，在各频率(包括谐振频率附近)迭代法的收敛性都得到明显改进. 图 3(c)和 3(d) 是采用(5)式的外推法($K=3$)产生初始解，图 3(c)对应 $\beta=0$，图 3(d)对应 $\beta/c_0=0.02$. 由图 3(c)看到，用外推法产生初始解使得在绝大部分频率上迭代 1—3 次即达收敛. 但在高频区谐振频率附近仍不能经 32 次迭代达收敛. 只有在复频域求解，才能在谐振频率附近用

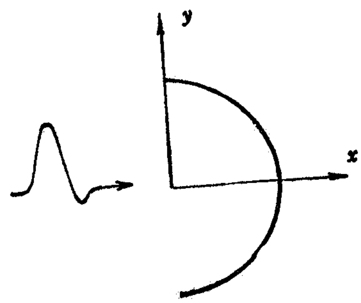

图 2　导电柱横截面

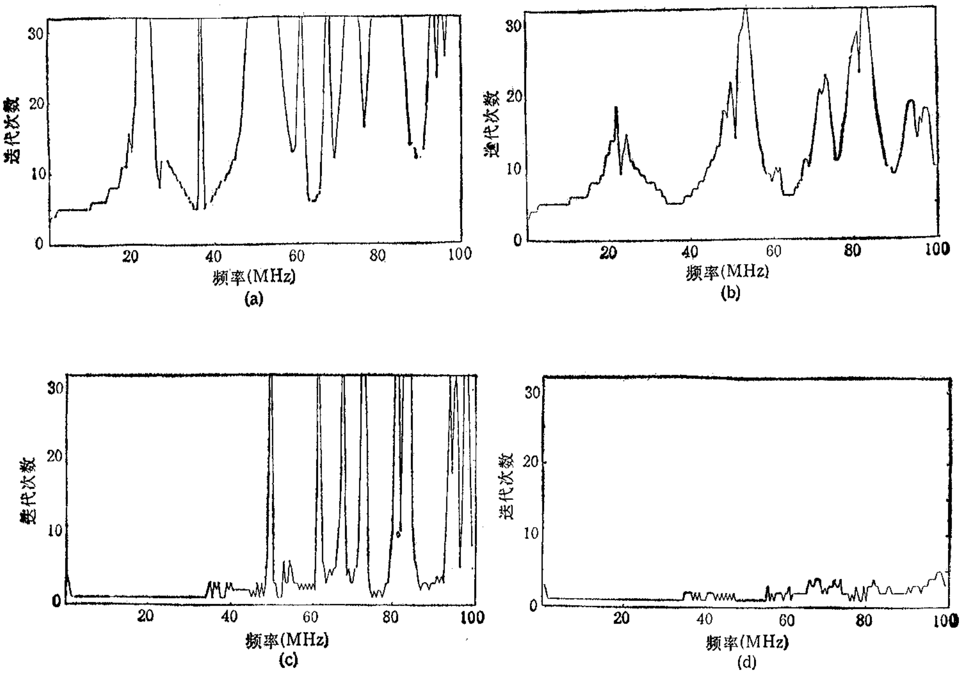

图 3　CST 法收敛的迭代次数随频率的变化
半圆周横截面的导电柱，半径 5m，$M=32$，频率步长 $\Delta f=0.48824$MHz
(a) 0 初始解，$\beta=0$；(b) 0 初始解，$\beta/c_0=0.02$；(c) 外推法，$\beta=0$；
(d) 外推法，$\beta/c_0=0.02$.

外推法产生好的初始解(图 3(d))，从而基本上克服内谐振的影响. 用 CGM 处理整圆柱的瞬态散射，得到了与图 3 类似的收敛性结果. 对于有限长导线以及矩形谐振腔之类的谐振导电体，在复频域迭代推进求解，同样能明显地改进在谐振频率附近的收敛性.

总之，在复频域迭代求解，与采用基于误差最小化的外推法生成初始解相结合，使频域推进法成为解瞬态电磁散射积分方程的精确而有效的方法.

参 考 文 献

[1] A. G. Tijhuis et al., *J. of Electromagnetic Waves and Applications*, 3(1989)6, 485—511.
[2] A. G. Tijhuis, Z. Q. Peng, *IEE Proc.-H*, 138(1991)4, 347—355.
[3] C. H. Chan, R. Mittra, *Radio Science*, 22(1987)5, 929—934.
[4] P. M. van den Berg, *Electromagnetics*, 5(1985)2—3, 237—262.
[5] R. Mittra, C. H. Chan, *Electromagnetics*, 5(1985)2—3, 123—126.
[6] 彭仲秋,瞬变电磁场,高等教育出版社,北京,1989年,第六章.
[7] 曹志浩等,矩阵计算和方程求根,高等教育出版社,北京,1984年,第二章.

IMPROVEMENT ON MARCHING-ON-IN-FREQUENCY METHOD

Peng Zhongqiu

(University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract The basic idea of marching-on-in-frequency method is that the discretized integral equation is solved by using one of the iterative approaches, and the initial estimates are produced by using an extrapolation scheme based on error minimization. The iteration formula in the CST is corrected, which increases the convergence rate considerably at lower frequencies. It is important for convergence that the iteration is carried out in complex-frequency domain, because the matrix condition is improved and more accurate initial estimate can be obtained from the smoothly varying solutions in complex-frequency domain.

Key words Transient electromagnetic scattering; Integral equation; Iterative method; Extrapolation;