第9卷 第1期
1987年1月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 9, No. 1
Jan., 1987

波导系统中电子注辐射过程的能量守恒关系*

宋文淼
(中国科学院电子学研究所)

提　　要

本文应用电磁场的算子理论求出了在任意截面的波导系统内，由电子注电流所激励的电磁场的公式．在这一公式中由单位功率流下的场代替了一般并矢格林函数中的归一化本征常数；这样，不但可以证明激励过程中的能量守恒关系，还可以比较方便地应用到各种实际的电子器件的互作用理论中去．

一、引　　言

电子注在各种电磁系统中的辐射理论是所有真空微波器件的理论基础．由于电磁场系统和电子注情况的多样性，产生了各种不同的电磁辐射和各类不同的电子器件．这些辐射过程尽管形式上各不相同，但其本质都是一样的，都是利用电磁场和电子注之间的相互作用．这种相互作用总是包含两方面的内容：一方面是电子注在电磁场作用下产生的群聚过程，另一方面是群聚了的电子注电流对电磁场的激励过程．把这两个过程结合在一起，就得到了一般的电子器件的工作方程组．求这一工作方程组的自洽解，就可以得到描述互作用过程的定量关系．

研究这些电子注辐射过程的定量关系的主要困难在于如何精确描述电子注电流对电磁场系统的激励过程．而电子注群聚过程的描述在物理上是比较简单的，只要求解电子注在高频电磁场和空间电荷场作用下的运动方程，然后把得到的电子注在时间和空间分布对给定的频率在时间上作傅里叶分析，就可得到对该频率的电子注电流在整个空间上的分布．但是电子注对场的激励的描述却要困难得多．早期的工作都是采用等效的集中参数电路和感应电流的方法[1-3]．这一方法有很多的局限性，一般的电磁系统无法找到合适的等效电路；即使对于象螺旋线那样简单的系统，应用等效电路和感应电流的方法仍有很大误差，在互作用的计算结果中不能满足能量守恒关系[4,5]．

目前各种电子器件(包括快波器件和自由电子激光)的互作用研究中都不再应用等效电路和感应电流的方法，而直接把能量守恒作为电子注电流对场激励的依据[6-8]．但是一般情况下，光靠能量守恒规律并不能确定相互作用的具体规则，这可以从文献[6]和[7]的

* 1985年3月13日收到，1985年5月30日修改定稿．

比较看出来．在这两篇文献中都采用能量守恒定律作为场激励的依据，但两者之间却有很大的差别．所以精确的场激励公式应该建立在电磁场理论本身，即麦克斯韦方程的基础上．但是由于实际器件中电磁系统比较复杂，要想从麦克斯韦方程组出发确定场激励方式的工作一直没有获得实际应用．

本文的目的就是利用电磁场的算子理论，给出任意截面的波导系统中，电子注电流对电场的激励公式；并证明这一公式本身就满足能量守恒定律．这一结果可以应用到螺旋线行波管的互作用理论中去，并得到和文献[9]相一致的结果．只要加以一定的修正，这一结果就可以用到各种更复杂的电子器件，包括各种快波器件的互作用理论中去．

二、波导系统中并矢格林函数的另一种表示方式

根据电磁场的算子理论[10]，由电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')$ 所激励的电场可以表示为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})=\left\langle\frac{1}{\lambda^2-k^2}\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}),\ \frac{1}{I_F}\langle\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}'),\ i\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\rangle_{R'}\right\rangle_\lambda, \tag{1}$$

这里所有的场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 对时间的变化都是 $e^{-i\omega t}$；k 为对应于角频率 ω 的波数：$k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$；$\boldsymbol{F}$ 为系统的本征函数；$\boldsymbol{\lambda}$ 为本征值．$\boldsymbol{R}$ 表示场空间而 $\boldsymbol{R}'$ 则表示源空间，$\langle-\rangle_{R'}$ 表示在源空间上的内积，它定义为：

$$\langle\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}'),\ i\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\rangle_{R'}=\iiint_{v'}\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}')\cdot(i\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}'))^*dv', \tag{2}$$

这里，“*”表示复数共轭；而$\langle-\rangle_\lambda$ 则表示在 λ 空间的本征展开：

$$\langle\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}),\ g(\lambda)\rangle_\lambda=\sum\!\!\!\!\!\!\int g^*(\lambda)\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R}), \tag{3}$$

这里对连续的 λ_i 用积分 $\int d\lambda_i$，而对离散的 λ_i 则用和式 $\sum\limits_{\lambda_i}$．I_F 为 $\boldsymbol{F}$ 的归一化常数．

现在我们讨论具有任意横截面的波导，这时本征函数可以表示为：

$$\boldsymbol{F}(\lambda,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)e^{ihz}, \tag{4}$$

这里横向本征值为 τ_{mn}，它是离散的；z 方向的本征值 h 是连续的．$\lambda^2=\tau_{mn}^2+h^2$．$\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)$ 表示 m、n 模的横向分布．这时归一化常数可以表示为：

$$I_F=\int_{-\infty}^{\infty}dh\iiint_v|\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)|^2e^{i(h-h')z}dv=2\pi\iint_s|\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)|^2ds, \tag{5}$$

对于任意截面的波导来说，本征函数的横向分布 $\boldsymbol{F}_{mn}$ 的解析形式一般很难得到，所以把(1)式作必要的修改使它成为更实用的公式是很有必要的．把本征函数、归一化常数和内积形式代入(1)式，得：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m,n}\frac{dh}{h^2+\tau_{mn}^2-k^2}\cdot\frac{1}{2\pi\iint\limits_s|\boldsymbol{F}_{mn}|^2ds}\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)e^{ihz}\iiint_{v'}\boldsymbol{F}_{mn}(x',y')e^{-ihz'}$$
$$\cdot i\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'. \tag{6}$$

对 $\boldsymbol{h}$ 进行围线积分，并把 $i\omega\mu_0$ 移到积分之外：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})=\sum_{m,n}\frac{-\omega\mu_0}{2\beta_{mn}\iint\limits_{s}|\boldsymbol{F}_{mn}|^2ds}\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)\iiint\limits_{v'}\boldsymbol{F}_{mn}(x',y')e^{i\beta_{mn}|z-z'|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv',\quad(7)$$

这里

$$\beta_{mn}^2=k^2-\tau_{mn}^2.\quad(8)$$

我们只考虑 $k>\tau_{mn}$ 的模式，因为只有这些模式的电磁场才和电子注电流进行能量交换．下面我们对系数进行化简．根据电磁场理论，波导中 mn 模式的波的行波功率流 P_{mn} 可以表示成群速度乘上单位长度的贮能，即：

$$P_{mn}=\frac{d\omega}{d\beta_{mn}}\iint\limits_{s}\varepsilon_0|\boldsymbol{F}_{mn}|^2ds.\quad(9)$$

从(8)式可以得到：

$$\frac{d\omega}{d\beta_{mn}}=c^2\frac{\beta_{mn}}{\omega}=\frac{\beta_{mn}}{\omega\mu_0\varepsilon_0}.\quad(10)$$

把(10)式代入(9)式，再代入(7)式得到：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})=-\sum_{mn}\frac{1}{2P_{mn}}\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)\iiint\limits_{v'}\boldsymbol{F}_{mn}(x',y')e^{i\beta_{mn}|z-z'|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'.\quad(11)$$

这样，我们可以把并矢格林函数写成：

$$\bar{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')=-\sum_{m,n}\frac{1}{2P_{mn}}\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)\boldsymbol{F}_{mn}(x',y')e^{i\beta_m|z-z'|},\quad(12)$$

并有：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})=\iiint\limits_{v'}\bar{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv.\quad(13)$$

现在，并矢格林函数直接由单位功率流下的场型来表示，而不再用归一化的本征函数．这一并矢格林函数形式应用于电子注辐射问题有两个突出的优点：(1) 在物理上，由这一并矢格林函数的形式可以直接证明辐射过程中的能量守恒关系．(2) 在工程上，这一表示形式特别有用，因为在实际的电子器件中由于电路是复杂的，所以很难求得 $\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)$ 的解析形式，因而也很难求出归一化积分常数 I_F．但是很多实际问题中，我们对 $\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)$ 的具体形式并不感兴趣，感兴趣的只是与电子注相互作用的区域中的某一特定方向的场，而这一场与功率流的关系却可以通过对实际电路的测量或者通过一些近似的方法来计算．这样就可以使得并矢格林函数的方法在电子器件的理论中得到实际的应用．

三、能量守恒关系的证明

在文献[8]和[9]中已经证明：在电子注与电磁波的相互作用中，只要电子注电流激励电磁场的公式是满足能量守恒的，则整个相互作用过程也一定满足能量守恒，因为在电子的运动方程中能量守恒关系是容易得到满足的．现在我们来证明(11)式所确定的激励方程是满足能量守恒关系的．这种能量守恒关系对于各次模式中的直波和返波是分别满足的，所以我们只需考虑某一模式的直波就行了．其他模式以及返波中的能量守恒关系

可以同样证明．为了简化起见下面去掉对 m 和 n 的和式和下标，并令 $z>z'$，这时 z 处的场只有直波场，(11)式可以简化为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})=-\frac{1}{2P}\boldsymbol{F}(x,y)e^{i\beta z}\iiint_{v}\boldsymbol{F}(x',y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'. \tag{14}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ 也可以分解为横向和纵向分布：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{E}(x,y)e^{i\beta z}$，所以(14)式改变为：

$$\boldsymbol{E}(x,y)=-\frac{1}{2P}\boldsymbol{F}(x,y)\iiint_{v'}\boldsymbol{F}(x',y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'. \tag{15}$$

这时场的辐射功率 P_{rf} 可以表示为：

$$P_{rf}=\frac{d\omega}{d\beta}\iint_{s}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}(x,y)|^2ds. \tag{16}$$

把(15)式代入(16)式，并应用(9)式得：

$$P_{rf}=\frac{1}{P}\left|\frac{1}{2}\iiint_{v'}\boldsymbol{F}(x',y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'\right|^2, \tag{17}$$

而电子注对场所作的功率 P_b 为：

$$P_b=-\frac{1}{2}\iiint_{v'}\boldsymbol{E}(x',y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'. \tag{18}$$

代入(15)式，同样可得到：

$$P_b=\frac{1}{P}\left|\frac{1}{2}\iiint_{v'}\boldsymbol{F}(x',y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'\right|^2. \tag{19}$$

从(19)式和(17)式得到 $P_b=P_{rf}$，即辐射功率等于电子注所交给电场的功率．从电子注的运动方程中可以得到电子注对电场所作的功率等于电子注所减少的动能功率． 这样，整个辐射过程的能量守恒就表现为电子注的动能和辐射场能之和守恒．

四、切仑科夫辐射中的能量守恒问题

现在我们把电子注电流对场的激励形式应用到电子注对均匀的只有单一的慢波模式的传输系统的辐射问题中去，这种情况在物理上相当于切仑科夫辐射而在电子器件中则相应于忽略了所有高次空间谐波，只考虑基波时的行波或返波器件．如果我们只考虑直波的相互作用，并假定电子注只有 z 方向的运动；最后假定电子注的截面积是小的，在这截面上电场可以近似地看作不变．在上述假定下电子注和波的相互作用就和一维的螺旋线行波管模型相一致． 虽然有很多文献[1,2,9]讨论过这一问题，但还没有一篇文献用严格的场理论来处理这一类电子注的辐射问题．现在我们就用(14)式来计算场的激励．为了便于比较，我们采用与文献[9]相一致的归一化参量．用 E_z 代替 E，用 F_z 代替 F．注意按前面的定义，F_z 应表示流过功率流为 P 时，电子注所在位置的轴向电场，P 与 F_z 的关系为[9]：

$$P=\frac{|F_z|^2}{2Z_0\beta}, \tag{20}$$

这里 Z_0 为互作用阻抗，它可以通过冷测或解析方法求得．电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')$ 为：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') = \hat{z} J_z(z, \varphi)/S, \tag{21}$$

这里 S 为注截面积，J_z 为高频电子注电流[2]

$$J_z = \frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(z,\varphi_0)} d\varphi_0, \tag{22}$$

这里 φ 为电子到达 z 点的相位，φ_0 为初始相位，I_0 为直流电流．把(20)、(21)、(22)式代入(14)式，得到

$$E_z = \frac{Z_0 I_0 \beta^2}{2\pi}\int_0^z e^{i\beta z'} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(z,\varphi_0)} d\varphi_0 dz'. \tag{23}$$

再采用下面的归一化变量，即归一化距离：

$$y = \frac{c\omega}{u_0} z; \tag{24}$$

归一化“波变量”：

$$A = \frac{C}{Z_0 I_0 \beta} E_z; \tag{25}$$

和非同步参量 b 有关的关系式：

$$\beta = \frac{\omega}{u_0}(1 + bc); \tag{26}$$

(23)式就变为：

$$A(y) = \int_0^y e^{i\beta z'} \left[\frac{1+bc}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(y',\varphi_0)} d\varphi_0\right] dy'. \tag{27}$$

由于这里只考虑直波，波只向一个方向传输．(27) 式的积分方程与下面的微分方程式等价：

$$\frac{dA(y)}{dy} = \left\{\frac{1+bc}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(y,\varphi_0)} d\varphi_0\right\} \cdot e^{i\frac{1+bc}{c}y}. \tag{28}$$

(28)式与文献[9]中所用的公式只是在形式上稍有差别，实质上是一样的．

从上面结果可以看出对于最简单的系统，即只有一个自由度的情况，应用场激励的公式和应用能量守恒方法得到的结果是一致的．但是对于较复杂的系统，从场激励公式应该可以求得精确解，而单靠能量守恒关系显然无法确定其激励的精确公式．

五、结　　论

应用算子理论得到的电子注电流对场的激励公式在研究电子注的辐射问题时是非常有用的． 它使得电子器件中的电子辐射问题的解可以建立在严格的场理论的基础之上．虽然本文所讨论的问题只是对波导系统，但其基本方法可以推广到更复杂的系统中去，例如周期性传输系统或带有输入和输出耦合器的谐振系统．最基本点在于使并矢格林函数与一定的功率流相联系，有了这种修正的并矢格林函数形式就可以比较方便地求出电子注电流的辐射功率来．这样的方法可望用来研究各种微波管的相互作用过程，以期达到更高的设计精度，更可以用来分析各种快波器件和自由电子激光等新型器件中的电子注辐射过程．

参 考 文 献

[1] J. E. Pierce, Travelling-Wave Tubes, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1950.
[2] J. E. Rowe, Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena, Academic Press, 1965.
[3] G. S. Kino et al., Proc. Sixth Int. Conf. on Microwave and Optical Generation and Amplification, pp. 49—53, 1966.
[4] 电子管设计手册编委会，行波管非线性相互作用理论和计算，1976.
[5] 宋文淼，电子学通讯，**3**(1980)，119.
[6] J. R. Vaughan et al., *IEEE Trans. on ED.* **ED-22**(1975), 880.
[7] D. J. Connolly et a., *ibid.*, **ED-24**(1977), 27.
[8] 宋文淼，李镇淮，电子学报，1984年，第3期，第25页
[9] 宋文淼，刘湧铨，吴静贤，电子科学学刊，**7**(1985)，123.
[10] 宋文淼，电子科学学刊，**8**(1986)，8.

THE ENERGY CONSERVATION IN THE PROCESS OF ELECTRON BEAM RADIATION IN A WAVEGUIDE SYSTEM

Song Wenmiao

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

The equation of electric field radiated by the current f electron beam in a waveguide with arbitrary cross-section is derived. In this equation, the ordinany dyadic Green's function is replaced by the modified one in which the eigenfield is normalized by the power flow. By this equation, the energy conservation in the radiation process can be proved. This equation can be used to compute the interaction of the actual electron devices.