

MPSK 信号的最大似然 SNR 估计方法

许 华 郑 辉

(西南电子电信技术研究所重点实验室 成都 610041)

摘 要: 该文利用最大似然准则分别推导了对于 MPSK 信号的数据辅助 SNR 估计方法、判决指向 SNR 估计方法和一种新的盲信噪比估计方法。文章对这些算法的性能进行了分析和计算机仿真, 并与其它一些 SNR 估计算法进行了比较。分析和仿真的结果显示数据辅助的 SNR 方法性能优越, 很好地符合了信噪比估计性能下限 (CRLB)。判决指向算法性能依赖于判决的准确程度, 在高信噪比时性能较好; 而在低信噪比条件时, 特别是小于 0dB 以后其估计有较大偏差。新的盲 SNR 估计算法对于 BPSK 信号具有估计范围广、精度高和复杂度小的特点, 但是当 M 增加时性能会明显下降。

关键词: 最大似然准则, 信噪比估计, MPSK 信号, 判决指向

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)04-0527-05

On the Maximum-Likelihood SNR Estimation Algorithm for MPSK Signals

Xu Hua Zheng Hui

(The Key Laboratory of Southwest Inst. of Electron. & Telecom. Tech., Chengdu 610041, China)

Abstract The data-aided (DA) Signal-to-Noise Ratio (SNR) estimation algorithm, Decision-Directed (DD) SNR estimation algorithm and a new blind SNR estimation algorithm for MPSK signals are presented in this paper with maximum-likelihood principle. The detail performance analysis, computer simulation and performance comparing with other SNR estimation algorithms are completed. The analysis and simulation results show that the DA algorithm has a perfect performance and as good as the performance lower bounds. The performance of DD algorithm depends directly on the accuracy of decision, so it is good when the SNR is high. But when the SNR is low and, especially, less than 0dB, the estimation has relatively great bias. The new blind SNR estimation algorithm has broad estimation range, good performance and low computational complexity for $M=2$ (BPSK), but the performance degrades while M is increasing.

Key words Maximum-likelihood principle, SNR estimation, MPSK signals, Decision-Directed(DD)

1 前言

信噪比估计是信道估计的一个重要组成部分, 它对于蜂窝和卫星通信系统来说是非常重要的, 一方面通过信噪比估计可以自适应地采用更有效的解调算法来提高解调性能; 另一方面信噪比估计提供了切换、功率控制和信道分配算法所需的信道质量信息。现在已有许多文献对信噪比估计的问题进行了研究。文献[1]得到 4 种不同的针对 QPSK 的信噪比估计方法, 并进行了性能比较; 文献[2]提出了 QPSK 信号在加性高斯白噪声信道基于“均值/方差”的盲信噪比估计方法和在慢衰落信道有训练序列的数据辅助信噪比估计方法; 文献[3]总结了前人研究的多种信噪比估计方法并进行了性能比较; 但对于盲信噪比估计问题, 文献[3]的算法和文献[1,2]给出的算法一样都没有解决在低信噪比时估计偏差较大的问

题。文献[4]从发送信号幅度的最大似然估计出发, 得到了一种 BPSK 信号在低信噪比时的低偏差迭代算法, 这种算法需要进行约 10 次迭代, 是一种对最大似然估计的迭代逼近, 同样这种思想也被作者应用到了通用的 MPSK 信号当中^[5]。文献[6]利用两个二阶统计量的比值, 即 $z = E(y^2) / [E(|y|)]^2$, 推导了其信噪比的关系, 然后利用多项式近似这种关系得到了一种在估计区间内准确的 BPSK 盲信噪比估计方法。另外利用对实部和虚部的分别考虑, 可以方便地从以上算法中得到对于 QPSK 信号的信噪比估计算法, 但对于更高阶的 PSK 信号就很难处理了。在文献[6]工作的基础上, Ramesh 等人利用相同的分析方法得到了 BPSK 信号在通用的 Nakagami 衰落信道的信噪比估计方法^[7], 还利用高阶统计量的相似处理, 即 $z = [E(y^2)]^2 / E(y^4)$, 得到了有分集接收的衰落信道中 BPSK 信号的信噪比估计方法^[8]。

本文同样从接收 MPSK 信号模值的最大似然估计出发, 给出 MPSK 信号的一种数据辅助信噪比估计方法 (DAML) 和判决指向信噪比估计算法 (DDML) 估计算法, 然后通过使用 M 次方去调制的方法, 得到了一种新的盲信噪比估计算法。本文还对各种算法的性能进行了分析和仿真。本文第 2 节介绍算法的推导, 第 3 节介绍仿真结果和性能分析, 第 4 节给出了结论。

2 最大似然信噪比估计算法

假设系统均衡和同步的剩余误差足够小, 对信噪比估计造成的影响可以忽略, 并且系统有 Nyquist 成型和完美的定时同步, 这样匹配滤波器在时刻 k 输出的符号率抽样信号可以表示为

$$r_k = a_k + n_k, \quad k=1, 2, \dots, L \quad (1)$$

其中 a_k 为真实的星座信号, n_k 为零均值的复高斯白噪声, 其实部和虚部的方差都为 σ^2 , L 是观察数据的长度。由于 $E|r_k|^2 = E|a_k|^2 + E|n_k|^2 = E|a_k|^2 + 2\sigma^2$, 需要估计的信噪比表示为

$$\text{SNR} = \frac{E|a_k|^2}{E|n_k|^2} = \frac{E|a_k|^2}{E|r_k|^2 - E|a_k|^2} \quad (2)$$

对于 MPSK 信号来说, a_k 随机等概率的取值 $a^i = Ae^{j(2\pi i)/M}$, $i=0, \dots, M-1$, 那么式(2)可表示为

$$\text{SNR} = \frac{A^2}{E|r_k|^2 - A^2} \quad (3)$$

对于式(3), 我们只需从观察值 r_k 中估计出 A 值就可以得到信噪比。实际应用中, 式(3)中求均值的项要用求时间平均值来代替。

2.1 数据辅助和判决指向信噪比估计算法

按照最大似然准则可以得到,

$$p(r_k | A) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|r_k - a_k|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

那么, 假定发送数据序列已知, 那么对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln p(r | A) &= \sum_{k=0}^{L-1} \ln p(r_k | A) = C + \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{2\sigma^2} |r_k - a_k|^2 \\ &= C + \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{2\sigma^2} (|r_k|^2 + A^2 - 2A \operatorname{Re}(r_k e^{j(2\pi i)/M})) \end{aligned} \quad (5)$$

符号 C 为式中与 A 无关项。为求式(5)中使对数似然函数取最大值的 A 值, 对式(5)求偏导并使之等于 0, 得

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{L-1} \operatorname{Re}(r_k e^{j(2\pi i)/M}) \quad (6)$$

将式(6)代入式(3)即得到 SNR 的估计值, 这种算法我们称为数据辅助最大似然 (DAML) 算法。当发送的数据为未知时, 则可以利用判决值来代替式(6)中的真实值, 得到

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{L-1} \operatorname{Re}(r_k e^{j(2\pi i)/M}) \quad (7)$$

将式(7)代入式(3)得到 SNR 的估计值, 将这种算法称为判决指向最大似然 (DDML) 算法。一种简单的硬判决规则可以这样处理: (1) 将两个相邻星座信号角度值的中间值作为每一个判决区域的分界线, 划分判决区域; (2) 当信号落到其中的一个判决区域时, 区域对应的星座信号角度值就是判决值, 即判决区域包含的星座信号的角度值为判决值。

2.2 一种新的盲信噪比估计算法

可以看出 DD 类算法需要判决过程, 而正是判决过程导致了低信噪比条件下, 性能的激烈下降。显然我们可以通过 M 次方的处理来去掉接收信号的相位调制, 从而避开了判决的过程。令

$$r'_k = r_k^M = A^M + n'_k = A' + n'_k \quad (8)$$

并假设经 M 次方处理后的噪声项 n'_k 近似符合复高斯白噪声条件 (对这个假设条件的分析见附录 A)。则

$$p(r'_k | A') = \frac{1}{2\pi\sigma'^2} \exp\left(-\frac{|r'_k - A'|^2}{2\sigma'^2}\right) \quad (9)$$

那么通过与上面相似的处理可得

$$A' = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \operatorname{Re}(r'_k) \quad (10)$$

于是 $\hat{A} = \sqrt[M]{A'}$, 将 \hat{A} 带入到(3)式, 即可得到信噪比的估计值 (为了确保 M 次方根符号里的值为正, 我们在实际应用中令 $\hat{A} = \sqrt[M]{|A'|}$)。

3 仿真结果及分析

下面使用 Monte Carlo 方法对本文提出的信噪比估计算法的估计性能进行了计算机仿真。一个好的估计算法应一方面是无偏的 (或者具有很低的估计偏差), 另一方面应具有小的估计方差。标准差是方差的平方根, 它可以更直观地显示估计性能。我们将估计的标准差定义为

$$\text{SD} = \sqrt{E[(\hat{\text{SNR}} - \text{SNR})^2]} \quad (11)$$

这里 $\hat{\text{SNR}}$ 为信噪比的估计值, $\sqrt{\quad}$ 表示求平方根。根据标准差的定义, 参考的克拉米罗下限为文献[9]导出的在复信道条件下数据辅助 (CRLB-DA) 和非数据辅助 (CRLB-NDA) 形式的平方根。

3.1 对于 BPSK 信号的仿真情况

文献[3]提出的最大似然的迭代逼近算法称为算法 1, 设定幅度范围 [0.0001, 0.999], 迭代次数为 15 次。文献[6]提出的算法称为算法 2。由于文献[6]中原算法设定的可估计范围太窄 (0-6dB), 我们将其多项式近似的范围变大到 (-5-12dB), 使用下面的 5 阶多项式进行近似, 近似的精度非常高:

$$\lambda = 10^4(-0.41292958452235 \times z^5 + 2.66418532072905 \times z^4 - 6.86724072350538 \times z^3 + 8.84039993634297 \times z^2 - 5.68658561155135 \times z + 1.464045795143920) \quad (12)$$

从图 1, 图 2 可以看出, DDML 在高信噪比时工作得很好, 但是在低信噪比时 (信噪比小于 5dB 时), 由于判决错误逐渐增多, 估计是有偏的且性能较差; ADML 性能非常好, 是有数据辅助条件下的一种最优信噪比估计, 它不但是无偏的而且方差性能很好地符合了克拉米罗下限 (CRLB)^[9]。新的盲信噪比估计算法不但对高信噪比的估计没有范围的限制, 而且对低信噪比的估计可以到 -20dB, 当观察数据足够长时, 能够达到非常高的估计精确。如, 观察符号数为 5000 时, 估计的均值在整个显示范围[-20dB, 30dB]上基本与实际信噪比重合; 而其 -10dB 的估计标准差小于 0.5; -20dB 的估计标准差小于 4dB。L=1000 时, 均值在小于信噪比 -15dB 时稍有偏移, SNR=-10dB 的估计标准差小于 2.5, SNR=-20dB 时的标准差小于 5.5dB; 即使当 L=100 时, 其估计偏差(均值)要比算法 1 和算法 2 在 L=1000 时好得多。我们也发现其它两种算法在很高的信噪比时 (SNR>20dB) 估计反而出现偏差, 其可有效估计的范围约为[-10, 20dB], 而新算法的有效估计范围为[-20dB, ∞]。

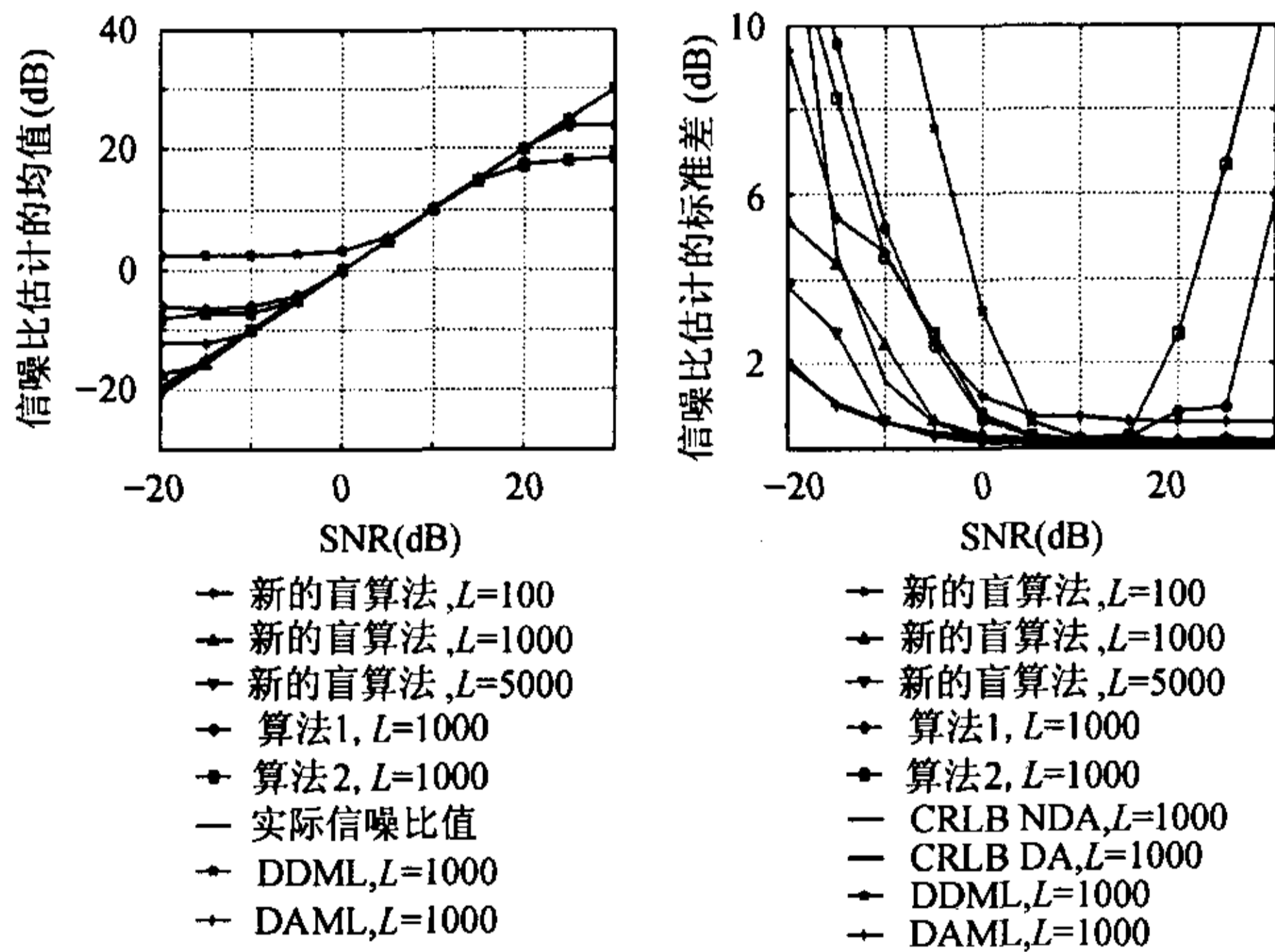


图 1 BPSK 信噪比估计的均值 图 2 BPSK 信噪比估计的标准差

3.2 对于 QPSK 信号的仿真情况

文献[5]提出的逼近算法称为算法 3, 设定幅度范围 [0.0001, 0.999], 迭代次数为 15 次。另外我们对文献[6]的方法进行了推广, 使之可以用到 QPSK 信号, 即将 QPSK 信号分为同相和正交的部分分别按照 BPSK 的方法处理, 然后利用下式将两部分合并, 再进行估计。

$$\hat{z} \approx \frac{\bar{r}_{k-1}^2}{|\bar{r}_{k-1}|^2} \approx \frac{\bar{r}_{k-Q}^2}{|\bar{r}_{k-Q}|^2} \approx \frac{\bar{r}_{k-1}^2 + \bar{r}_{k-Q}^2}{|\bar{r}_{k-1}|^2 + |\bar{r}_{k-Q}|^2} \quad (13)$$

这里 I, Q 分别表示同相和正交分量。那么由文献[6]扩展得到的对 QPSK 的信噪比估计算法称为算法 4, 使用式(12)为

近似多项式。

从图 3, 图 4 可以看出, 对 QPSK 的信噪比估计 DDML 和 DAML 表现出了与对 BPSK 估计一样的性能特点。而新的盲估计算法由于对 QPSK 信号需要做 4 次方的运算, 4 次方处理引入的噪声代价和假设噪声条件为 AWGN 的误差都要比 2 次方处理大得多, 所以新算法对 QPSK 的估计性能要比 BPSK 差。从仿真得到的估计性能比较图可以看出, 新的算法在高信噪比时性能依然较好, 估计范围没有限制; 低信噪比时性能相对比算法 3 和算法 4 差, L=5000 的水平等于算法 3 在 L=1000 的水平。但是总体来说新算法在高信噪比时没有限制, 在低信噪比时比 DD 算法要好。随着观察数据的变长, 其性能逐步变好, 说明新算法对于高阶 MPSK 信号的缺点可以通过增加观察数据的长度来减轻。

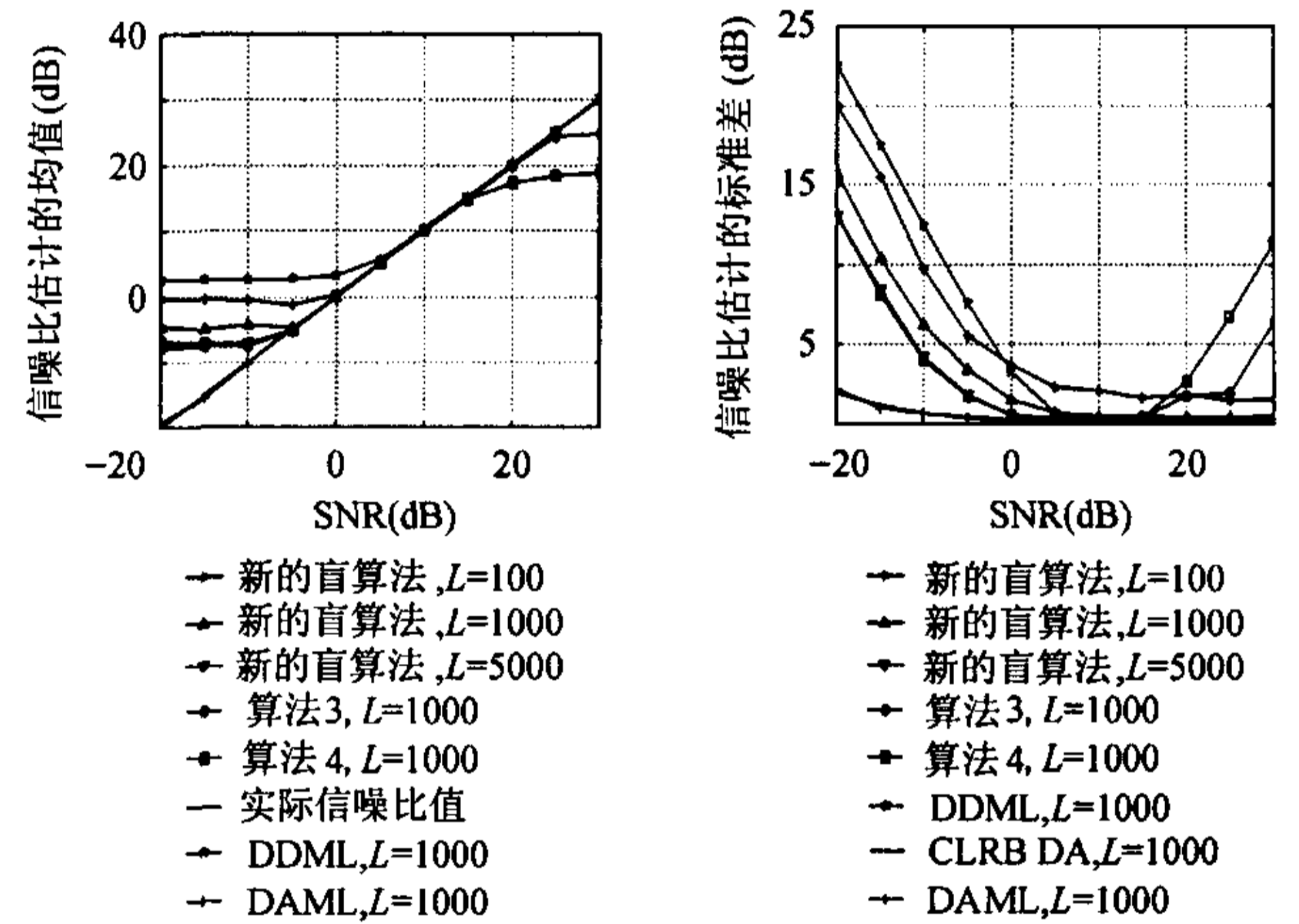


图 3 QPSK 信噪比估计的均值 图 4 QPSK 信噪比估计的标准差

通过以上仿真结果可知: 对于 BPSK 信号, 文献[4]提出估计越准确)。其原因是: 基于二阶统计量的算法^[6]需要进行多项式的近似, 而多项式可近似的最大范围完全由信号的统计特性决定, 所以该算法可估计的信噪比范围是有限的; 文献[4]算法的可估计范围从理论上讲可以做到无限制, 它由迭代的幅度初值 (最大值和最小值) 和迭代次数决定, 但实际应用中由于迭代处理的精确有限, 而信噪比越高要求的处理精度越高, 所以当信噪比大于某一值后, 信噪比越高估计的偏差反而越大。新算法虽然进行了二次方处理, 这种非线性处理会引入噪声代价, 但是新算法表现出的性能却相当优越, 甚至在信噪比小于 -15dB 时比非数据辅助的信噪比估计的下限还要好。其原因有: (1) 对 BPSK 信号的估计是从复信道上考虑的, 直观上由于信号的复表示形式可同时利用实部和虚部 (即同相和正交部分) 的信息, 其利用的信息是实表示形式的两倍, 所以估计的性能要好。文献[3, 9]分别给出了 BPSK 信号在实信道和复信道的信噪比估计下限, 而在复信道的信噪比估计下限要比实信道的低, 这从另一个方面

证明了在复信道处理 BPSK 信号的好处。(2) 二次方的处理后, 模估计等于对一个确定信号的估计, 即相当于是有数据辅助的模估计, 从文献[4, 5]的分析可以看出由于使用了不同的似然函数, 数据辅助的估计性能下限要比非数据辅助的估计性能下限低得多。我们将一个非数据辅助的幅度估计问题变换成了一个数据辅助的估计, 那么估计时使用的是数据辅助的似然函数, 所以估计性能又有相当大的提高。(3) 通过附录 A 可以看出二次方处理引入的噪声代价及假设二次方后的噪声项为 AWGN 引入的误差相对不大。

4 结论

基于最大似然准则得到的数据辅助信噪比估计算法 (DAML) 性能非常好, 是有数据辅助条件下的一种最优信噪比估计; 它不但是无偏的而且方差性能很好地符合克拉米罗下限 (CRLB)^[9]。基于最大似然准则的判决指向算法 (DDML) 实际上指出了现有的许多“均值/方差”方法的实质, 对于 BPSK 和 QPSK 信号“均值/方差”的方法都需要判决的过程, 对于更高阶的 MPSK 信号“均值/方差”的方法难以处理, 而 DDML 却能很方便的处理。

新的盲估计算法, 在对 BPSK 信号进行估计时性能非常优越, 与现有的其它算法相比, 该算法具有可估计的范围宽、估计的精度高的特点。但是当对 MPSK ($M \geq 4$) 信号进行估计时, 由于进行 M 次方非线性处理的影响, 所以性能有明显的下降。但是这种影响可以通过增加观察数据的长度来减轻, 并且新的盲估计算法计算复杂度小, 只有一次复数 M 次方处理, 当载波相位同步采用 V-V 算法^[10]时这部分还可以共用。

附录 A

假设 M 次方处理后的噪声项 n'_k 符合复高斯白噪声条件是不精确的, 那么到底误差有多大? 由于 M 次方的非线性处理很难在整体上对噪声信号进行数学上的精确分析, 所以我们首先只是对二次方处理进行了简单分析, 然后使用仿真显示了这种处理上的误差。对接收信号进行二次方处理后的信号为

$$r'_k = r_k^2 = A^2 + (2a_k n_k + n_k^2) = A^2 + n'_k \quad (\text{A1})$$

那么噪声项的均值为

$$\begin{aligned} E[n'_k] &= E[2a_k n_k + n_k^2] \\ &= E[2a_{kI} n_{kI} - 2a_{kQ} n_{kQ} + 2a_{kI} n_{kQ} i \\ &\quad + 2a_{kQ} n_{kI} i + n_{kI}^2 - n_{kQ}^2 + 2n_{kI} n_{kQ} i] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

噪声项的方差为

$$\begin{aligned} E[|n'_k|^2] &= E[(2a_k n_k + n_k^2)(2a_k n_k + n_k^2)^*] \\ &= E[4a_{kI}^2 n_{kI}^2 + 4a_{kQ}^2 n_{kQ}^2 + 4a_{kI}^2 n_{kQ}^2 \\ &\quad + 4a_{kQ}^2 n_{kI}^2 + n_{kI}^4 + n_{kQ}^4 + 2n_{kI}^2 n_{kQ}^2] \\ &= 8A^2 \sigma^2 + 8\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

而其实部和虚部的方差分别为

$$E[\text{Re}(n'_k)] = 4A^2 \sigma^2 + 4\sigma^4 \quad (\text{A4})$$

$$E[\text{Im}(n'_k)] = 4A^2 \sigma^2 + 4\sigma^4 \quad (\text{A5})$$

分析证明了二次方处理后的噪声项, 是均值为零, 实部和虚部的方差都为 $4A^2 \sigma^2 + 4\sigma^4$ 的复过程。从噪声信号的方差与信号功率比较来看, 经过二次方处理后信噪比显著地降低了 (至少降低了 6dB, 而且原始信噪比越低, 二次方后信噪比下降越大)。下面的仿真显示了在噪声项为 AWGN 的假设条件下, 对 ML 模估计和 BPSK 信号二次方处理后的 ML 模估计及 QPSK 信号四次方处理后的 ML 模估计的性能比较 (如图 5, 6)。

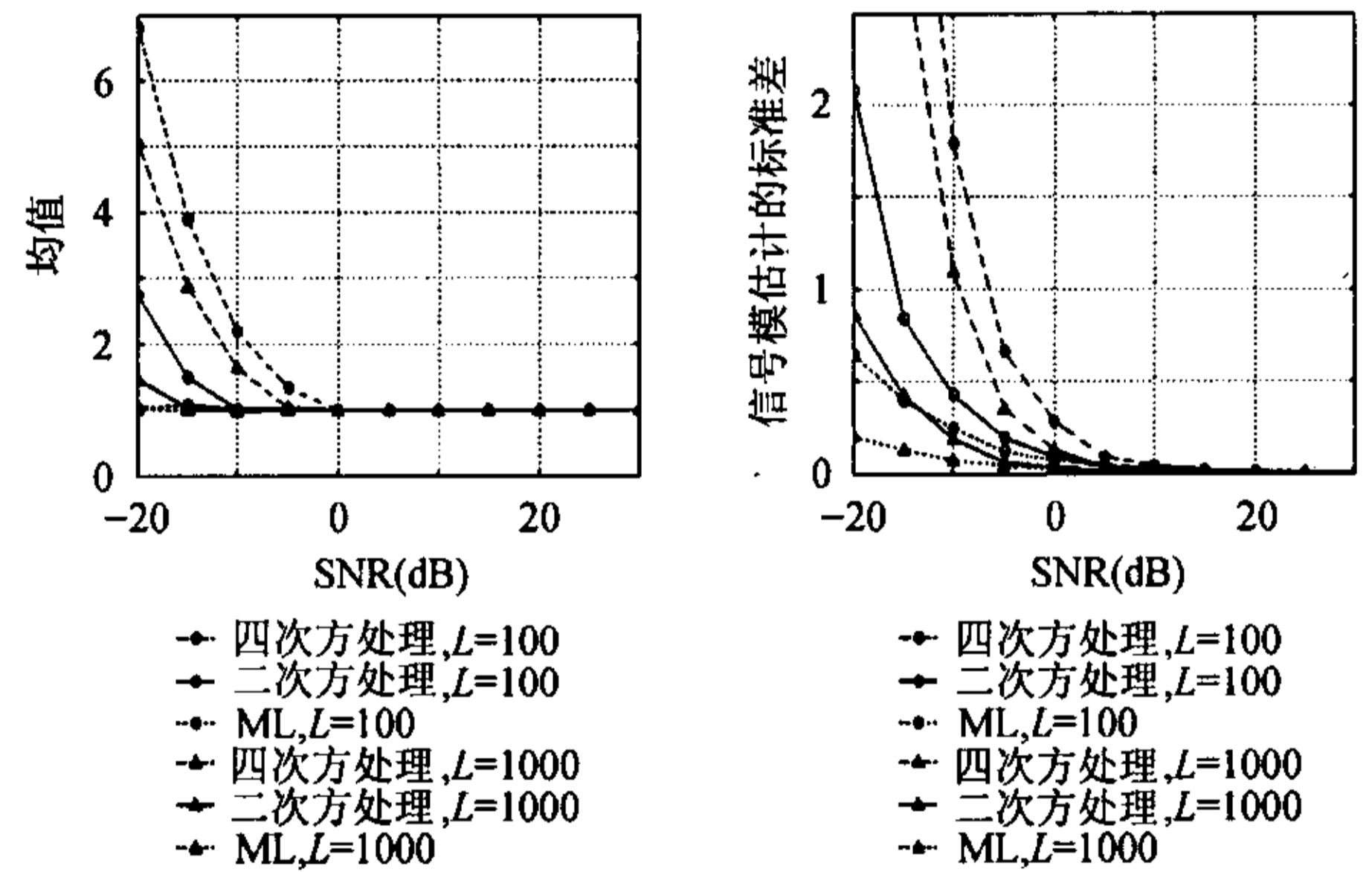


图 5 ML 模估计和进行了二次方处理和四次方处理的 ML 模估计的均值比较

图 6 ML 模估计和进行了二次方处理和四次方处理的 ML 模估计的标准差比较

仿真的性能曲线图显示, 通过 M 次方处理后的 ML 模估计与单纯的 ML 模估计相比引入了一定的误差, 并且 M 越大误差越大。这种误差的产生有两个方面的原因: 一是假设噪声条件的不准确; 另一个是 M 次方处理引入了噪声代价。进一步从图中可以看出对于二次方处理的 BPSK 信号, 相对于单纯的最大似然模估计其均值和标准差的恶化程度比较小, 并且随着观察数据符号的增多, 性能逐渐趋于单纯 ML 模估计的性能; 而对于 QPSK 信号的四次方处理, 在低信噪比时模估计性能已经严重恶化。

参考文献

- [1] Beaulieu N C, Toms A S, Pauluzzi D R. Comparison of four SNR estimators for QPSK modulations. *IEEE Commun. Letters*, 2000, 4(1): 43 - 45.

- [2] Shin Dong-Joon, Sung Wonjin, Kim In-Kyung. Simple SNR estimation methods for QPSK modulated short bursts. Proc. IEEE Globalcom, San Antonio, Texas, USA, 2001: 3644 – 3647.
- [3] Pauluzzi D R, Beaulieu N C. A comparison of SNR estimation techniques for the AWGN channel. *IEEE Trans. on Commun.*, 2000, 48(10): 1681 – 1691.
- [4] Li B, Difazio R, Zeira A. A low bias algorithm to estimate negative SNRs in an AWGN channel. *IEEE Commun. Letters*, 2002, 6(11): 469 – 471.
- [5] Li B, Difazio R, Zeira A, Pietraski P J. New results on SNR estimation of MPSK modulated signals. Proc. IEEE PRIMC, Beijing, China, 2003: 2373 – 2377.
- [6] Summer T A, Wilson S G. SNR mismatch and online estimation in Turbo decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 1998, 46(4): 421 – 423.
- [7] Ramesh A, Chockalingam A, Milstein L B. SNR estimation in generalized fading channels and its application to turbo decoding. Proc. IEEE ICC, Helsinki, Finland, 2001: 1094 – 1098.
- [8] Ramesh A, Chockalingam A, Milstein L B. SNR estimation in Nakagami-m fading with diversity combining and its application to Turbo decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 2002, 50(11): 1719 – 1724.
- [9] Alagha N S. Cramer-Rao bounds of SNR estimates for BPSK and QPSK modulated signals. *IEEE Commun. Letters*, 2001, 5(1): 10 – 12.
- [10] Viterbi A J, Viterbi A M. Nonlinear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmission. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1983, 29(7): 543 – 551.

许 华: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向: 盲信号处理技术、短时突发解调技术.

郑 辉: 男, 1957 年生, 高级工程师、博士生导师, 研究方向: 多媒体通信、盲信号处理、移动通信技术.