

## Turbo 码在最大比合并分集接收系统中的性能分析

张琳 秦家银

(中山大学信息科学与技术学院 广州 510275)

**摘要** 该文提出了 turbo 码在最大比合并分集接收无线通信系统中纠错性能的联合上界。基于误差积分函数的简化计算式,推导了分集接收的多路信道分别具有不同衰落特性时,成对差错概率的精确表达式。以瑞利衰落信道为例,对采用 turbo 码的分集接收无线系统的性能进行了数值计算和仿真。结果表明: turbo 码纠错性能联合上界数值计算式与仿真结果一致,可普遍用于信道衰落统计特性各不相同的分集接收系统。

**关键词** Turbo 码, 最大比合并分集接收, 衰落信道, 成对差错概率

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)09-1618-04

## Performance Analysis of Turbo Codes for Maximal Ratio Combining Receivers

Zhang Lin Qin Jia-yin

(School of Information Science and Technology, Guangzhou 510275, China)

**Abstract** Upper union bounds of turbo codes for maximal ratio combining (MRC) diversity systems are presented in this paper. The simplified expression of error integral function is used to derive the precise expressions of pairwise error probability for MRC receivers wherein the probabilities of slow fading multichannel come from different distribution families. The numerical analysis and simulations performed over Rayleigh channel demonstrate that the theoretical analysis conforms to the simulations. It is concluded that the derived expressions can be generally used for the performance estimation of MRC multichannel receivers with different fading statistics.

**Key words** Turbo codes, Maximal ratio combining reception, Fading channel, Pairwise error probability

### 1 引言

承载语音、图像、视频等多媒体和数据业务传输的无线信道,与有线信道相比,功率受限,传输频谱有限,且信号的传播存在植被、绕射和多径等干扰,传输环境较为复杂恶劣,信号的传输质量难以通过增加发送功率或是增加信道带宽等方式加以改善,因此,必须采用抗衰落及编码等技术,在不增加功率和不牺牲带宽的情况下,提高系统的效率和带宽利用率。

分集技术是行之有效的抗衰落措施之一。在分集无线通信系统中,同一信息分散在多个统计独立的多径衰落信道中传播,接收端选择两个或更多的信号进行合并,所提供的分集增益能有效提高系统的传输效率。目前分集技术主要包括最大比合并分集、等增益合并分集和选择分集,其中,最大比合并是最佳的线性分集合并技术<sup>[1]</sup>,已成为多载波码分多址(Multi-Carrier Code Division Multi Address, MC-CDMA)移动通信系统和超宽带无线通信系统抗衰落分集的主要实现手段<sup>[2,3]</sup>。

纠错编码技术是保证信息传输可靠性的有力措施。在分集增益的基础上,为分集系统提供额外的编码增益。1993年

Berrou等人提出的turbo码,具有逼近Shannon限的优越性能。大量仿真实验和理论分析结果表明,turbo码在低信噪比无线信道中,尽管译码时延较大,但纠错性能比传统的卷积码优异得多。turbo码已制定为第三代移动通信系统高速非实时数据信道的纠错编码标准,在MC-CDMA系统和超宽带无线通信系统中的应用也日益广泛<sup>[4]</sup>。

目前,turbo码在最大比合并分集接收系统中的性能分析还不完善。Kafle等人对turbo在MC-CDMA系统中的性能进行了分析<sup>[5]</sup>,但未能推导得到成对差错概率的精确表达式,只提出了纠错性能的近似联合上界。Ramesh等人<sup>[6]</sup>在Nakagami信道上,对turbo码在分集接收系统中的性能进行了分析。已有的性能分析主要存在的问题是:推导turbo码纠错性能联合上界时,均假定分集接收的多路信道具有相同的衰落统计特性。在实际无线通信系统中,多路信道沿不同的传播路径到达接收端,衰落特性未必相同。本文对turbo码在最大比合并分集接收系统(接收的多路信道的衰落特性可不同)中的性能进行了分析,推导并提出了成对差错概率的精确计算式和纠错性能的联合上界,并进行了数值分析和仿真对比。

### 2 基于turbo码的最大比合并分集接收系统模型

分集技术利用多个独立的多径信道传送同一信息,以提高接收端的瞬时信噪比和平均信噪比。同一信息可根据空

2005-09-30 收到, 2006-02-06 改回  
国家自然科学基金重点项目(90304011)和广东省博士启动基金(5300707)资助课题

间、极化、角度、频率和时间等分散到多个统计独立的衰落无线信道中,接收端获得多个不相关的信号后,进行合并处理,为无线通信系统提供分集增益。

合并分集接收系统的模型如图 1 所示。数据信息  $d_k$  的发送信号  $s_k(t)$ , 经  $L$  路信道传输后, 到达接收端。图 1 中,  $l=1,2,\dots,L$  表示信道编号;  $\alpha_{k,l}e^{j\theta_{k,l}}$  表示各分路信道承受的乘性衰落;  $n_{k,l}(t)$  表示各分路信道传播中存在的加性噪声;  $w_{k,l}$  表示最大比合并的加权因子。最大比合并分集接收系统对多路信号进行同相加权合并, 权重是由各支路信号所对应的信号功率与噪声功率的比值所决定的, 输出信噪比等于各路信噪比之和。通常, 权重系数  $w_{k,l} = \alpha_{k,l}^2$  [7]。合路信号经 turbo 译码判决后, 输出比特  $d'_k$ 。假设分集系统接收端对接收信号进行理想相关解调, 则发送信号经慢衰落信道传送后, 接收端信号  $r_{k,l}$  为

$$r_{k,l} = s_k \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l}^2 + \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} n_{k,l} \quad (1)$$

分集通信系统中, 发送和接收天线之间无线信道的统计特性可根据是否存在视距传播、是否位于对流层等传播环境, 分别用 Rayleigh、Rice 或 Nakagami 分布表征, 其相应的概率分布  $f(\alpha_{k,l})$ , 请参考文献[7]。

### 3 Turbo码纠错性能的联合上界

本文对 turbo 码性能的理论分析基于以下假设: (1)理想相关检测, 即理想的时间和相位同步; (2)对接收信息进行最大似然(Maximum Likelihood, ML)译码。

Turbo码编码器对信息序列添加冗余校验序列, 输出码字由信息比特和校验比特级联而成。不失一般性, 假设向无线信道发送全零码字, 则turbo码纠错性能的联合上界为[8]

$$\bar{P}_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^N \sum_{i=1}^K \sum_{d_1} \sum_{d_2} \frac{i}{K} \binom{K}{i} p(d_1|i) p(d_2|i) P_2(d) \quad (2)$$

式中  $\binom{K}{i}$  是比特数为  $K$  的码字构成的输入码组中, 汉明重量为  $i$  的输入码字数;  $N$  表示编码器输出码字包含的比特数;  $p(d|i)$  是码重为  $i$  的输入码字产生码重为  $d$  的输出码字的条件概率, 取决于编码器的状态转移函数。该概率由编码器

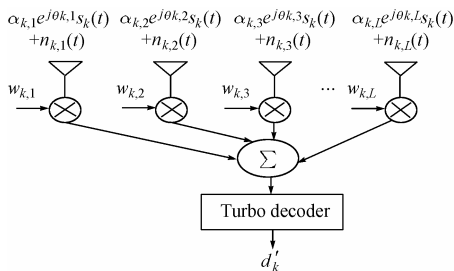


图 1 基于 turbo 码的最大比合并分集接收系统模型  
Fig.1 System model of turbo coded maximal ratio combining diversity receiver

结构决定:

$$p(d_j|i) = t(l_c, i, d_j) / \binom{K}{i}, \quad j=1,2 \quad (3)$$

式中, 参量  $l_c$  表示turbo码路径长度,  $t(l_c, i, d_j)$  取决于编码器的转移函数, 表示长度为  $l_c$ 、输入重量为  $i$ 、输出重量为  $d$  的总路径数。

$P_2(d)$  是码字  $c_0$  被误判为码字  $c_j$  ( $c_j$  与  $c_0$  之间的距离为  $d$ ) 的成对差错概率, 也可记作  $P(c_0 \rightarrow c_j)$ 。从式(2)和式(3)可以看出, 给定turbo码编码器的结构和编码规则, 则只要确定成对差错概率  $P_2(d)$ , 则turbo码纠错性能的联合上界即可得到。

#### 3.1 成对差错概率

成对差错概率可根据条件成对差错概率  $P(c_0 \rightarrow c_j|\alpha)$  对衰落幅度求均得到。在充分交织的衰落信道中,  $c_0$  误判为与之距离  $d$  的码字  $c_j$  的条件成对差错概率为

$$P(c_0 \rightarrow c_j|\alpha) = P\left\{ \frac{P(r|c_d)}{P(r|c_0)} > 1 \right\} = Q\left( \sqrt{h \frac{2RE_b}{N_0} \sum_{v=1}^d \alpha_{MRC,v}} \right) \quad (4)$$

式中  $\alpha_{MRC,v}$  表示合并分集后系统的信道增益; 码字  $c_0$  和  $c_j$  的  $d$  个不同的比特分别用  $(1,2,\dots,d)$  表示;  $R$  表示码速;  $h$  与无线通信系统采用的调制方式有关, 若系统采用相关二进制相移键控, 则  $h=1$ ; 若分集系统基于相关正交二进制频移键控, 则  $h=0.5$ ;  $Q(x)$  是误差积分函数:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (5)$$

在最大比合并分集系统中, 接收信号经加权、同相合并后, 合成信道增益  $\alpha_{MRC,v}$  由下式确定[9]:

$$a_{MRC,v} = \sum_{l=1}^{L_r} a_{v,l}^2 \quad (6)$$

式(6)中:  $L_r \leq L_p$  是分集合并接收机合并的实际路径数。成对差错概率是  $P(c_0 \rightarrow c_j|\alpha)$  的均值, 即

$$P_2(d) = P(c_0 \rightarrow c_j) = E\left[ P(c_0 \rightarrow c_j|\alpha) \right] = E\left[ Q\left( \sqrt{h \frac{2RE_b}{N_0} \sum_{v=1}^d \alpha_{MRC,v}} \right) \right] \quad (7)$$

计算式(7)的传统方法是令  $\eta = \sum_{v=1}^d \alpha_{MRC,v}$  [9], 若已知  $\eta$  的统计分布特性, 则  $P(c_0 \rightarrow c_j)$  的多维求均过程可转化为对  $\eta$  的一维求均得到, 即:

$$P_2(d) = \int_0^{+\infty} Q\left( \sqrt{h \frac{2RE_b}{N_0} \eta} \right) f_{\eta}(\eta) d\eta \quad (8)$$

然而, 在分集接收系统中, 多路分集信道的衰落幅度未必具有相同的统计特性, 即使统计特性相同, 也未必有相同的平均功率, 这就使得  $f_{\eta}(\eta)$  的评估变得非常困难, 在传输条件恶劣的信道中, 根本不可能得到  $f_{\eta}(\eta)$ 。本文基于式(6)和式(7), 在独立衰落无线通信系统中, 采用下式计算成对差

错概率:

$$P_2(d) = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{\frac{2R h E_b}{N_0} \sum_{v=1}^d \alpha_{\text{MRC},v}}\right) \times f_{\alpha_{\text{MRC},1}}(\alpha_{\text{MRC},1}) \cdots f_{\alpha_{\text{MRC},d}}(\alpha_{\text{MRC},d}) d\alpha_{\text{MRC},1} \cdots d\alpha_{\text{MRC},d} \quad (9)$$

运用  $Q(x)$  的另一计算式<sup>[8]</sup>:

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-x^2/(2\sin^2\phi)} d\phi \quad (10)$$

可得

$$P_2(d) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{v=1}^d \left[ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{hRE_b}{N_0 \sin^2\phi} \alpha_{\text{MRC},v}\right) \cdot f_{\alpha_{\text{MRC},v}}(\alpha_{\text{MRC},v}) d\alpha_{\text{MRC},v} \right] d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{v=1}^d I_v d\phi \quad (11)$$

式中  $I_v = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{hRE_b}{N_0 \sin^2\phi} \alpha_{\text{MRC},v}\right) f_{\alpha_{\text{MRC},v}}(\alpha_{\text{MRC},v}) d\alpha_{\text{MRC},v}$ 。

将式(6)代入上式, 则  $I_v$  是  $\alpha_{v,l}$  的  $L_r$  维积分

$$I_v = \prod_{l=1}^{L_r} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{hRE_b}{N_0 \sin^2\phi} \sum_{l=1}^{L_r} \alpha_{v,l}^2\right) f_{\alpha_{v,l}}(\alpha_{v,l}) d\alpha_{v,l} = \prod_{l=1}^{L_r} J_{v,l}(\phi) \quad (12)$$

式中  $J_{v,l}(\phi) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{hRE_b}{N_0 \sin^2\phi} \alpha_{v,l}^2\right) f_{\alpha_{v,l}}(\alpha_{v,l}) d\alpha_{v,l}$ 。将式

(12)代入到式(11)中, 可得成对差错概率:

$$P_2(d) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{v=1}^d \prod_{l=1}^{L_r} J_{v,l}(\phi) d\phi \quad (13)$$

根据各分集信道的统计特性, 可推得  $J_{v,l}(\phi)$ 。以 Nakagami 信道为例, 可推导出  $J_{v,l}(\phi)$  为

$$J_{v,l}(\phi) = \left(1 + \frac{h}{m_l \sin^2\phi} \frac{\sigma^2 RE_b}{N_0}\right)^{-m_l} \quad (14)$$

根据式(13)和式(14), 可以看到, 给定工作功率、码速和调制方式, 则积分  $J_{v,l}(\phi)$  只与变量  $\phi$  有关, 对  $\phi$  进行一维定积分即可得到成对差错概率, 避免了  $L_r$  重积分及  $\eta$  统计概率分布的推算。并且, 若分集接收的多路信道衰落特性各不相同, 则只是  $J_{v,l}(\phi)$  不同, 不需改变该式的计算规则, 因而, 该成对差错概率的计算式具有普遍意义。

### 3.2 Turbo码纠错性能联合上界

根据式(2)和式(13), 码速为 1/3 的 turbo 码在最大比合并分集接收系统中的纠错性能联合上界为

$$\bar{P}_b \leq \frac{1}{\pi} \sum_{d=d_{\min}}^N \sum_{i=1}^K \sum_{d_1} \sum_{d_2} \frac{i}{K} \binom{K}{i} p(d_1|i) p(d_2|i) \cdot \int_0^{\pi/2} \prod_{v=1}^d \prod_{l=1}^{L_r} J_{v,l}(\phi) d\phi \quad (15)$$

基于式(15)的 turbo 码性能分析式具有通用性, 可适用于具有不同衰落统计特性的独立多路信道。该式与文献[5]和文

献[6]相比, 本文不仅推导得到了成对差错概率的精确表达式, 而且所得结果符合实际通信系统, 即允许分集接收的多路信道具有不同的衰落特性。

## 4 数值分析及仿真结果

本文对 turbo 码在最大比合并分集系统中的性能进行了数值分析和仿真。为了与 Kafle 等人分析结果<sup>[10]</sup>进行比对, 假设最大比分集接收多路信道的统计特性相同, 均为平坦 Rayleigh 慢衰落, 最大比合并分集系统采用二进制相移键控调制方式, 即  $h=1$ , 分集接收的多径信道的有效路径数  $L_r=2$ ; turbo 编码器由生成多项式为 (1, 13/11, 15/11) 的卷积码并行级联而成, 码速为  $R=1/3$ , 校验比特序列的  $d_1=d_2=10$ , 并采用均匀交织器。

首先, 本文将式(15)的数值分析结果与 Kafle 等人提出的近似分析式<sup>[5]</sup>进行了比较, 并与仿真结果进行了比对。如图 2 所示, 与文献[5]相比, 本文提出的 turbo 码纠错性能联合上界, 在高信噪比处, 更逼近仿真性能。此外, 随着信噪比的增加, turbo 码纠错性能的联合上界逼近仿真结果。若选用交织性能更好的交织器, 则可获得更好的 turbo 码联合性能界。图 2 中的理论分析表明, 在采用 turbo 编码的最大比合并分集系统中, 存在差错平台, 即当信噪比大于约 4.6dB 时, 随着信噪比的增加, 误码率的改善程度减弱。

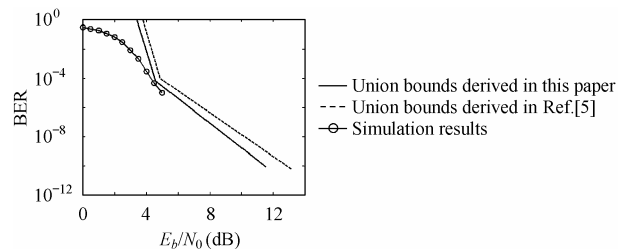


图 2 与文献[5]的近似结果及仿真比对,  $K=200, L_r=2$

Fig.2 Comparisons of our accurate union bounds, approximate union bounds derived in Ref.[5] and simulation results,  $K=200, L_r=2$

图 3 所示为 3 种交织长度(即 3 种码组长度)时, turbo 码在系统中的性能。从图 3 中可以看到, 数值计算结果与物理机理一致。随着交织长度的增加, 系统传输信息的相关性进一步减弱, 码重分布得到改善, 因而 turbo 码的纠错性能随交织长度增强。

图 4 所示为有效路径数  $L_r$  分别是 2, 3 和 4 的最大合并比分集接收系统中, turbo 码纠错性能的联合上界。由图 4 可见, 随着分集增益的增加, 多径衰落得到有效克服, 系统性能有所改善。

## 5 结束语

本文对 turbo 码在最大比合并分集接收系统中的性能进行了分析, 提出了纠错性能联合上界的理论计算式。所推导的联合上界可适用于衰落特性各不相同的多路信道接收系统, 理论分析具有通用性。以 Rayleigh 衰落信道为例, 对 turbo 码在最大比合并分集接收系统中的性能进行了数值分析和仿真。推导的理论上界与 Kafle 等人提出的理论上界相比,

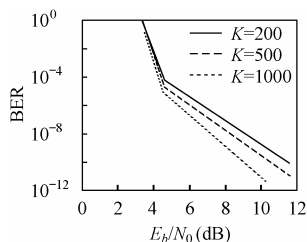


图 3 Turbo 码在最大合并比  
分集系统中的性能  
K=200, 500, 1000  
Fig.3 Performances of turbo  
codes in maximal ratio combining  
diversity systems,  
K=200, 500, 1000

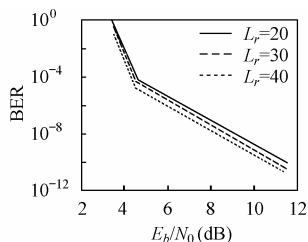


图 4 不同有效路径下 turbo  
码的纠错性能, K=200  
Fig.4 Upper union bounds for  
turbo coded systems with  
different effective branch  
numbers, K=200

更逼近仿真结果, 说明了纠错性能联合上界计算式的有效性。此外, 数值分析结果表明, 增加交织长度和有效路径数, 可改善最大比合并分集接收系统的性能, 该结论与增加交织长度和有效路径数可改善无线通信系统性能这一物理机理相一致。本文所提出的 turbo 码在最大比合并分集接收系统中的纠错性能联合上界理论分析式, 主要的特点是: 联合上界的计算基于精确的成对差错概率, 且不必假设所有信道衰落状态均相同, 因此, 对实际无线通信系统性能的评估更为精确, 具有良好的通用性, 理论分析式具有普遍意义。

### 参 考 文 献

[1] Durisi G, Benedetto S. Performance of coherent and noncoherent receivers for UWB communications. *IEEE International Conference on Communications, Paris, 2004*, vol.6: 3429–3433.  
[2] 黎海涛, 张靖, 陆建华. 多径多用户环境下超宽带脉冲无线通

信系统性能. *电子与信息学报*, 2003, 25(11): 1564–1569.  
[3] 孙毅, 赵建平, 吴伟陵. 衰落信道下 Turbo 码在宽带 CDMA 系统中的应用研究. *电子学报*, 1999, 27(11A): 46–49.  
[4] Juntti M, Vehkaperä M, Leinonen J, et al.. MIMO MC-CDMA communications for future cellular systems. *IEEE Communications Magazine*, 2005, 43(2): 118–124.  
[5] Kafle P L, Sesay A B. Performance analysis of multicarrier CDMA systems with parallel and serial concatenated coding in fading channels. *IEE Proc.-Commun.*, 2004, 151(2): 113–122.  
[6] Ramesh A, Chockalingam A, Milstein L B. Bounds on the performance of turbo codes on Nakagami fading channels with diversity combining, *Globecom'01, San Antonio, 2001*, vol.2: 25–29.  
[7] Stüber G L 著, 斐昌幸, 聂敏, 岳安军译. *移动通信原理*. 北京: 电子工业出版社, 2004, 第六章第 2 节.  
[8] Benedetto S, Montorsi G. Unveiling turbo codes: Some results on parallel concatenated coding schemes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1996, 42(2): 409–429.  
[9] Simon M K, Alouini M. A unified approach to the performance analysis of digital communication over generalized fading channels. *Proc. IEEE*, 1998, 86(9): 1860–1877.  
[10] Goldsmith A, Alouini M S. A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels. <http://systems.stanford.edu>.

张 琳: 女, 1976 年生, 讲师, 博士, 研究方向为信道编译码。  
秦家银: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为无线通信。