

## 基于 MUSIC 的阵列天线通道误差的盲估计算法

俄广西 蒋谷峰

(中国电子科技集团公司第十研究所 成都 610036)

**摘要** 基于特征值分解的高分辨率 DOA 估计算法, 在理想阵列条件下, 性能很好, 但是对噪声扰动和系统误差都很敏感, 噪声扰动和系统误差会严重恶化这一类算法的性能, 使其分辨率下降。该文提出一种基于 MUSIC 算法的盲估计方法, 它仅仅需要在阵列周围满足远场条件的地方布置一个 RF 信号源, 不需要知道信号源的方位角, 就可以精确估计阵列天线的通道误差。仿真结果证明, 这种方法行之有效, 而且效果比较理想。

**关键词** DOA, 阵列天线, 空间特征, 盲估计

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)04-0667-04

## The Blind Estimating Channel Error of Array Antenna Based on MUSIC

E Guang-xi Jiang Gu-feng

(China Electronics Technology Group Corporation No.10th Research Institute, Chengdu 610036, China)

**Abstract** The high-resolution eigenstructure-based DOA estimation methods, such as MUSIC algorithm, have an excellent performance in ideal cases. Their performance is susceptible to noise perturbation and array error and degrade significantly when array is with error. An blind calibration method MUSIC-based is present in this paper. It need only one RF signal generator placed in the far-field without knowledge of DOA of incidence signal. Computer simulations illustrate that the method is effective and the calibration result is perfect.

**Key words** DOA, Array antenna, Spatial signature, Blind estimation

### 1 引言

多媒体移动通信业务的增长提高了对通信系统数据传输速率的要求, 为此, 需要解决一些由于多径衰落、共信道干扰等原因引起的性能恶化问题。空分多址技术(SDMA)可以有效解决这个问题, 而 SDMA 技术的核心是阵列天线, 阵列天线的误差会严重影响 SDMA 技术的性能, 在雷达领域中也存在相同的问题。

基于特征值分解的高分辨率 DOA 估计算法, 如 MUSIC 算法, 在雷达, 声纳, 移动通信等领域有着广泛的应用。理论分析和试验证明, 这类算法在理想阵列条件下, 性能很好, 但是这类算法对噪声扰动和系统误差都很敏感。噪声扰动和系统误差会严重恶化这一类算法的性能, 使其分辨率下降。噪声扰动主要表现在小采样数目、低信噪比时, 这类算法存在一个门限, 当信噪比低于该门限时, 算法的分辨能力急剧下降。噪声扰动通常可以用加大采样数目来减少其影响。系统误差同样会对算法的性能造成很大影响。加大采样数目不能减小阵列的系统误差。目前提出了很多算法解决这个问题, 文献中可以看到, 现在主要有 3 类校正方法<sup>[1-4]</sup>。第一类是在待校正的阵列天线的远场放置一个信号源, 其方位角已知, 使用该信号源发射的信号对阵列天线进行校正。此类方法性能优越, 但是在实际环境中实施难度很大。第二类方

法需要两个 RF 信号源, 其方位角可以未知, 但是二者之间的角度差必须已知。该方法的缺点也是实施难度大。第三类是把校正信号用功分器分离成  $M$  路同相, 等幅度的信号, 直接注入各个阵元通道, 分析阵列的输出信号, 然后校正阵列天线的通道误差。这类方法可以有效解决通道传输误差问题, 但是提高了系统的硬件复杂度。

本文提出一种基于 MUSIC 算法的阵列天线通道误差的估计方法, 该算法首先确定信号源的真实方位角, 然后再计算阵列天线通道的幅度增益误差和相位误差。其优点是仅仅需要在阵列周围满足远场条件的地方布置一个 RF 信号源, 不需要测量信号源的方位角。仿真结果证明, 这种方法行之有效。

### 2 数据模型

对于理想情况下的天线阵列, 操作矢量为

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi d_{M-1} \sin \theta}{\lambda}} \right]^T \quad (1)$$

式中  $M$  为阵列的阵元数目, 以第一个阵元为参考,  $d_{M-1}$  为第  $M$  个阵元与第一个阵元之间的距离,  $\theta$  为信号的到达角,  $\lambda$  为信号载波的波长。小尺寸等间距直线阵列的阵元间距通常取  $d = \lambda/2$ 。

当存在误差时,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(\theta) &= \mathbf{A}\mathbf{a}(\theta) \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1, e^{-j\frac{2\pi d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi d_{M-1} \sin \theta}{\lambda}} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \rho_1 e^{j\phi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_M e^{j\phi_M} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 1, e^{-j\frac{2\pi d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi d_{M-1} \sin \theta}{\lambda}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\rho_k$  为第  $k$  个通道的幅度增益,  $\phi_k$  为第  $k$  个通道的相移,  $k=1,2,\dots,M$ 。

假定到达阵列天线的信号有  $L$  个, 对应的入射角为  $\{\theta_1 \dots \theta_L\}$ , 记

$$\mathbf{a}'(\theta) = [a_1, \dots, a_M]^T \quad (3)$$

构造入射信号向量如下:

$$\mathbf{S} = [s_1(t) \ \dots \ s_L(t)]^T \quad (4)$$

阵列流形为

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{a}'(\theta_1) \ \dots \ \mathbf{a}'(\theta_L)] \quad (5)$$

则

$$a_k = \rho_k e^{j\phi_k} e^{-j\frac{2\pi d_{k-1} \sin \theta}{\lambda}} \quad (6)$$

阵列接收到的信号为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}'\mathbf{S} + \mathbf{n}(t) \quad (7)$$

其协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \\ &= E\{[\mathbf{A}'\mathbf{S} + \mathbf{n}(t)][\mathbf{A}'\mathbf{S} + \mathbf{n}(t)]^H\} \\ &= \mathbf{A}'E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{A}'^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中,  $\sigma_n^2$  为噪声的方差,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

$\mathbf{R}_{xx}$  的特征向量矩阵  $\mathbf{U}$  可以分为信号子空间  $\mathbf{U}_s$  和噪声子空间  $\mathbf{U}_n$  两部分, 以信号到达方向  $\theta_i$  为变量的操作矢量与噪声子空间之间的距离为

$$d(\theta_i) = \frac{\mathbf{a}(\theta_i)^H \mathbf{a}(\theta_i)}{\mathbf{a}(\theta_i)^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta_i)} \quad (9)$$

在理想情况下, 阵列无误差, 此时  $\mathbf{a}(\theta_i)$  与噪声子空间之间的距离最大, 即

$$d(\theta_i) = \max(d(\theta)) \quad (10)$$

当存在阵列误差时, 误差的相位分量将导致谱峰偏移, 幅度分量主要会导致谱的高度变化。由式(8)可以看出,  $\mathbf{R}_{xx}$  发生了变化, 噪声子空间也将相应变化。这将会对基于子空间的 DOA 估计算法产生影响。

对  $\mathbf{R}_{xx}$  进行特征值分解, 对应于最大特征值的特征向量记为  $\mathbf{u}_{\max}$ 。当只有一个信号源工作时, 此时信号源相对阵列天线的角度为  $\theta_i$ , 亦即阵列接收信号的 DOA, 此时有

$$\mathbf{u}_{\max} = \mathbf{a}'(\theta_i) \quad (11)$$

记

$$\mathbf{u}_{\max} = [u_1, \dots, u_M]^T \quad (12)$$

则由式(3)、式(11)、式(12)可得

$$u_k = \rho_k e^{j\phi_k} e^{-j\frac{2\pi d_{k-1} \sin \theta_i}{\lambda}} \quad (13)$$

对式(13)两端取模, 可得幅度增益的估计为

$$\rho_k = |u_k| \quad (14)$$

则幅度增益的误差为

$$\Delta \rho_k = 20 \log(\rho_k) \quad (15)$$

由式(13)又得

$$\angle u_k = \phi_k - \frac{2\pi d_{k-1} \sin \theta_i}{\lambda} \quad (16)$$

则相位误差的估计为

$$\phi_k = \angle u_k + \frac{2\pi d_{k-1} \sin \theta_i}{\lambda} \quad (17)$$

由式(17)可以看出, 阵列天线通道误差的估计精度依赖于入射信号的 DOA 测量精度, 当入射信号的 DOA 测量存在误差时, 通道相位误差的估计也将偏离实际的误差。

### 3 盲估计的基础

当只有一个信号入射到阵列天线(存在通道误差)时, 其 DOA 记为  $\theta_i$ ,  $\mathbf{a}'(\theta_i)$  在噪声子空间上的投影最大。

$$\frac{1}{\mathbf{a}'(\theta_i)^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}'(\theta_i)} = \max_{\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)} \left( \frac{1}{\mathbf{a}'(\theta)^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}'(\theta)} \right) \quad (18)$$

但是在搜索 MUSIC 谱峰时使用的是没有误差的操作矢量  $\mathbf{a}(\theta)$ , 记 MUSIC 谱峰对应的角度为  $\theta_i + \Delta \theta_i$ , 则有

$$\frac{1}{\mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta_i)^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta_i)} = \max_{\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)} \left( \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \right) \quad (19)$$

比较式(18)和式(19)可知:  $\mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta_i)$  在  $\mathbf{a}'(\theta_i)$  的投影最大, 即

$$\mathbf{a}'(\theta_i)^H \mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta_i) = \max_{\Delta \theta \in (0, 360^\circ)} \left( \mathbf{a}'(\theta_i)^H \mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta) \right) \quad (20)$$

根据式(18)和式(19)有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(\theta_i)^H \mathbf{a}(\theta_i + \Delta \theta_i) &= \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi d \sin \theta_i}{\lambda}} & \dots & e^{j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_i}{\lambda}} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \mathbf{A}^H \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi d \sin(\theta_i + \Delta \theta_i)}{\lambda}} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin(\theta_i + \Delta \theta_i)}{\lambda}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M A_k e^{j\frac{2(k-1)\pi d}{\lambda} [\sin(\theta_i) - \sin(\theta_i + \Delta \theta_i)]} \\ &= \sum_{k=1}^M A_k e^{-j\frac{2(k-1)\pi d}{\lambda} \sin \frac{\Delta \theta_i}{2} \cos \left( \theta_i + \frac{\Delta \theta_i}{2} \right)} \end{aligned} \quad (21)$$

从大量的仿真试验中可以得到:当只有一个信号入射到阵列天线时,采用 MUSIC 算法估计的 DOA 的误差一般都比较小( $\Delta\theta \leq 3^\circ$ )。在实际应用中,入射信号的入射角一般都不大于  $60^\circ$ , 因此当入射信号的 DOA 低于  $60^\circ$  时有

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \ll \cos \left( \theta + \frac{\Delta\theta}{2} \right) \quad (22)$$

$$\mathbf{a}'(\theta)^H \mathbf{a}(\theta + \Delta\theta) \approx \sum_{k=1}^M A_k e^{-j \frac{2(k-1)\pi d}{\lambda} \sin \frac{\Delta\theta}{2}} \quad (23)$$

由式(23)可以看到,  $\mathbf{a}'(\theta)^H \mathbf{a}(\theta + \Delta\theta)$  取得极值的因素只与阵列天线的通道误差以及信号入射角的估计偏差  $\Delta\theta$  有关,与信号的入射角基本无关。也就是说,  $\Delta\theta$  只与通道误差有关,通道误差决定了  $\Delta\theta$ 。由此可以得出一个结论:当单信号入射时,不同入射角的信号的 DOA 估计偏差相同。这个结论是我们后面论述的正确估计入射信号的 DOA 的基础。

#### 4 盲估计

假定有两个入射角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ) 的窄带信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$ , 当这两个信号分前后两次单独入射到存在通道误差的阵列天线时,采用 MUSIC 算法估计的入射角分别为  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$ , 根据前面的分析有

$$\theta_1 - \hat{\theta}_1 = \theta_2 - \hat{\theta}_2 \quad (24)$$

当只有信号  $s_n(t)$  ( $n=1, 2$ ) 入射到阵列天线时,根据其 DOA 估计值  $\hat{\theta}_n$  计算阵列天线的通道相位误差。第  $k$  个通道的相位误差估计为

$$\hat{\phi}_{nk}(\hat{\theta}_n) = \angle(u_{sn}(k)) + \frac{2\pi(k-1)d}{\lambda} \sin \hat{\theta}_n, \quad n=1, 2 \quad (25)$$

式(25)中,  $u_{sn}(k)$  为信号  $s_n(t)$  入射时,阵列输出信号的协方差矩阵的最大特征值对应的特征矢量的第  $k$  个元素。 $\hat{\phi}_{nk}(\hat{\theta}_n)$  表示根据第  $n$  个入射信号的 DOA 计算得到的阵列天线第  $k$  个阵元通道的相位误差估计。

只有当信号的入射角估计值  $\hat{\theta}_n$  与信号的真实入射角  $\theta_n$  相等时阵列天线的通道相位误差才能准确估计。

定义两个自变量域,以阵列天线的入射信号的入射角估计值  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  为中心,以  $\delta$  为半径向两侧扩展,得到两个 DOA 估值域空间  $[\hat{\theta}_1 - \delta, \hat{\theta}_1 + \delta]$  和  $[\hat{\theta}_2 - \delta, \hat{\theta}_2 + \delta]$ , 然后以此为自变量域。令

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(l) &= \hat{\theta}_1 + l\varepsilon \quad \left( l = -\frac{\delta}{\varepsilon}, \dots, \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \\ \psi_2(l) &= \hat{\theta}_2 + l\varepsilon \quad \left( l = -\frac{\delta}{\varepsilon}, \dots, \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

定义一个目标函数  $\xi(l)$ :

$$\xi(l) = \sum_{k=1}^M \left| \hat{\phi}_{1k}(\psi_1(l)) - \hat{\phi}_{2k}(\psi_2(l)) \right|^2 \quad (27)$$

当  $\left. \begin{aligned} \psi_1(l) &= \theta_1 \\ \psi_2(l) &= \theta_2 \end{aligned} \right\}$  时,

$$\begin{aligned} \xi(l) &= \sum_{k=1}^M \left| \hat{\phi}_{1k}(\psi_1(l)) - \hat{\phi}_{2k}(\psi_2(l)) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^M \left| \hat{\phi}_{1k}(\theta_1) - \hat{\phi}_{2k}(\theta_2) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^M \left| \phi_k - \phi_k \right|^2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

因此,当  $\left. \begin{aligned} \psi_1(l) &= \theta_1 \\ \psi_2(l) &= \theta_2 \end{aligned} \right\}$  时,也就是说,当这两个自变量取值和

两个入射信号的 DOA:  $\theta_1$  和  $\theta_2$  相等时,  $\xi(l)$  取得极小值。所以,只要搜索函数  $\xi(l)$  的极小值,其极小值对应的自变量记为  $l_{\min}$ , 则有  $\left. \begin{aligned} \psi_1(l_{\min}) &= \theta_1 \\ \psi_2(l_{\min}) &= \theta_2 \end{aligned} \right\}$ , 就可以得到两个入射信号

$s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的真实 DOA。然后根据式(15),式(17)计算通道相位误差和幅度误差。

#### 5 仿真

仿真中,我们采用 8 元等间距直线阵,阵元间距为半波长。在天线阵列的周围放置了一个信号源,与阵列之间的距离满足远场条件,信号的信噪比为 20dB。信号源移动前后的方位角分别为:  $-10^\circ$ ,  $20^\circ$ , 采集数据的快拍数为 400, 利用以上方法进行计算。表 1 为设定的阵列天线各通道的幅度增益误差和相位误差。表 2 为采用本算法计算得到的幅度增益误差和相位误差。图 1 为  $\delta=0.2$  时  $\xi$  与信号源移动前的 DOA 估计值的关系图。图 2 为  $\delta=0.5$  时  $\xi$  与信号源移动前的 DOA 估计值的关系图。图 3 为对阵列通道误差校正前计算的信号源移动后的 MUSIC 谱,图中谱峰对应的 DOA 为  $20.4^\circ$ 。图 4 为对阵列通道误差校正后计算的信号源移动后的 MUSIC 谱,图中谱峰对应的 DOA 为  $20^\circ$ 。

#### 6 结束语

本文提出一种盲估计算法,在不增加系统复杂度的情况下,使用该算法可以有效估计阵列天线各通道的幅度和相位误差。由仿真结果可以看出,该算法性能良好。当用于蜂窝通信时,参考信号源可以用相邻小区的基站代替,工作时快速切换相邻的两个小区的基站信号以代替上面所述的移动信号源,在通信间隔时间内校正,不影响蜂窝的正常通信。

表 1 阵列天线通道的实际误差

K	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta\rho_k$ (dB)	0.00	3.32	-2.15	2.12	1.58	-1.10	3.75	-1.13
$\phi_k$ ( $^\circ$ )	0.00	12.00	-16.00	8.00	-2.00	15.00	-4.00	-11.00

表2 采用本算法估计的阵列天线通道误差

$K$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta\hat{\rho}_k$ (dB)	0.00	3.32	-2.15	2.12	1.58	-1.10	3.75	-1.13
$\hat{\phi}_k$ (°)	0.0000	12.0322	-15.9542	8.0079	-1.9998	15.0223	-3.9493	-10.9551

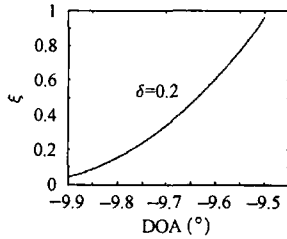


图1 信号源移动前的 DOA 估计与目标函数的关系曲线

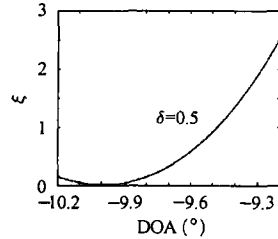


图2 信号源移动前的 DOA 估计与目标函数的关系曲线

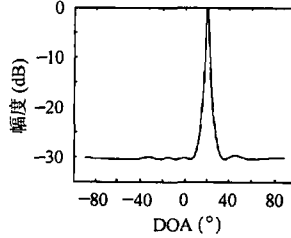


图3 对阵列通道误差校正前入射信号 DOA 估计

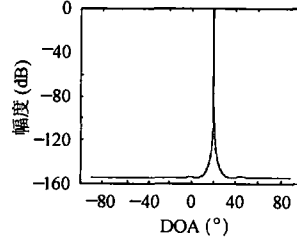


图4 对阵列通道误差校正后入射信号的 DOA 估计

## 参考文献

- [1] Tsoulos G, McGeehan J, Beach M. Space division multiple access (SDMA) field trials- part2: calibration and linearity issues. *IEEE Proc, Radar, Sonar Navig.*, 1998, 145(1):124-131.
- [2] Miura R, Matsumoto Y. A calibration method for DBF receiving array antenna by using maximal-ratio-combining weights. *IEICE Tech. Rep.*, 1997, A.97-96.
- [3] Paulraj A, Kailath T. Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with unknown sensor gain and phase. in *Proc. IEEE ICASSP'85*, 1985: 640-643.
- [4] Weiss A J, Friedlander B. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainty. *Circuits, System & Signal Processing*, 1990, 9(3): 271-300.

俄广西: 男, 1972 年生, 博士, 研究方向为阵列信号处理.

蒋谷峰: 男, 1971 年生, 工程师, 研究方向为信号处理.