第 16 卷 第 2 期　　电子科学学刊　　Vol. 16, No. 2
1994 年 3 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar. 1994

非线性波动方程的一种近似解*

袁晓君　王光明　林为干
(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

提要　本文研究了对一类非线性波动一致有效的近似解. 结果表明,这类非线性波动方程的解可用 Airy 函数来近似. W.K.B 近似是本文近似在远离折射率转折点的一阶近似. 本文结果克服了 W.K.B 结果在转折点附近失效的缺点.

关键词　非线性波动方程,近似解, W.K.B 近似

1 引言

研究波在非均匀媒质中的传播时,例如光波在非均匀纤芯的光纤中的传播,电波在大气或地层中的传播,声波在海水中的传播等,经常会遇到非线性波动方程. 其特征表现为传播常数是位置的函数. 一般地求这类方程的解析解是困难的. 在满足高频近似时,通常用 W.K.B 法来求得其近似解. 但 W.K.B. 法并非一致有效. 当媒质折射率存在转折点时, W.K.B. 法在转折点失效. 为解决这个问题,通常的方法是分区求解而后用渐近匹配技术将各区解联系起来[1]. 这种方法在实际应用中是很不方便的,同时各区的界限也难以明确. 本文提出一种通用的变量替换,将一维非线性波动方程变换成可用标准可解的非线性波动方程来近似的形式,从而得到其一致有效的近似解. 本文以折射率存在单个转折点为例,得到其解的 Airy 函数近似[2],并讨论了该解与 W. K. B 近似的联系.

2 方程及其变换解法

我们研究的方程形式为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=k^2p(x)y, \tag{1}$$

其中设 k 为大参量以满足高频近似条件. 设变换 $y=y(t), x=x(t)$ 代入(1)可以得到

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{x''(t)}{x'(t)}\frac{dy}{dt}=k^2p(x)x'^2(t)y. \tag{2}$$

在此确定变换

$$t=k^2p(x)x'^2(t), \tag{3}$$

$$y=x'^{1/2}(t)w(t), \tag{4}$$

1992-12-07 收到, 1993-04-26 定稿
* 电科院基金资助课题
袁晓君　男, 1966 年生, 博士生.
王光明　男, 1964 年生, 博士生.
林为干　男, 1921 年生, 教授, 学部委员, 博士生导师, 现从事电磁理论、微波理论、微波网络、光波导理论和天线理论等研究和教学工作.

之所以取此变换是因为假定 $p(x)$ 仅有一个转折点. 将(3),(4)式代入(2)式可得

$$\frac{d^2w}{dt^2} - (s+t)w = 0. \tag{5}$$

在以上诸式中 $x'(t) = dx/dt$, $s = (1/4)(x''/x')^2 + (1/2)(x''/x')'$. 为进一步确定变换(3)式,设 $p(x)$ 有如下简单零点 x_0, 即

$$p(x)\begin{cases} >0, & x>x_0; \\ =0, & x=x_0; \\ <0, & x<x; \end{cases} \quad 且\ p'(x_0)=0.$$

由变换(3)式可得

$$\left.\begin{aligned} k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(x)}dx &= \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad x>x_0; \\ k\int_{x}^{x_0}\sqrt{-p(x)}dx &= \frac{2}{3}(-t)^{3/2}, \quad x<x_0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(6)式确定了从 x 到 t 的变换. 当 $x\to x_0$ 时,(6)式有

$$t = k^{2/3}[p'(x_0)]^{1/3}(x-x_0)+\cdots. \tag{7}$$

将(6),(7)式代入 s 的表达式,不难发现 $|s|$ 与 $|t|$ 相比是 $-k^{-4/3}$ 阶的小量,故 $|s| \ll |t|$是成立的. (5)式可以用 Airy 函数来近似,其解可表示为

$$w(t) = C_1A_i(t) + C_2B_i(t), \tag{8}$$

式中 $A_i(t), B_i(t)$ 是第一、二类 Airy 函数, C_1, C_2 是待定常数. 将(8)式代入(4)式并利用(3)式可得

$$y(x) = (1/\sqrt{k})\cdot(t(x)/p(x))^{1/4}[C_1A_i(t(x)) + C_2B_i(t(x))], \tag{9}$$

这便是我们求得的(1)式的近似解形式, 式中 $t(x)$ 由(6), (7)式确定. (9)式在转折点 $x=x_0$ 附近的有效性是显而易见的.

3 本结果与 W.K.B 结果的关系

(1) 式的 W.K.B 近似解形式为[1]

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}}\left[C_1'\exp\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(x)}\,dx\right) + C_2'\exp\left(-k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(x)}\,dx\right)\right], \quad p(x)>0; \tag{10}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}}\left[C_1'\cos\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{-p(x)}dx\right) + C_2'\sin\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{-p(x)}dx\right)\right], \quad p(x)<0. \tag{11}$$

在 $p(x)=0$ 时,上两式失效,必须用其他形式. 为得到(9)式与(10),(11)式的关系, 我们考虑两种情况:

(1) t 为大的正量时, $A_i(t), B_i(t)$ 的一阶近似为[3]

$$A_i(t) = t^{-1/4}\exp(x), \tag{12}$$

$$B_i(t) = t^{-1/4}\exp(-x)/2, \tag{13}$$

式中 $x=(2/3)t^{3/2}$. 将(12),(13)式代入(9)式,并利用关系式(6)式可以得到.

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}}\left[C_1\exp\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(x)}dx\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}C_2\exp\left(-k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(x)}dx\right)\right]. \tag{14}$$

可见(14)式与(11)式等效.

(2) t 为负的大量时, $A_i(t),B_i(t)$ 的一阶近似为

$$A_i(t)=(-t)^{-1/4}\cos(x+\pi/4)+(-t)^{-1/4}\sin(x+\pi/4), \tag{15}$$
$$B_i(t)=(-t)^{-1/4}\sin(x+\pi/4)-(-t)^{-1/4}\cos(x+\pi/4), \tag{16}$$

式中 $x=(2/3)t^{3/2}$. 将(16),(17)式代入(9)式,并利用关系(6)式不难得到

$$y(x)=1/\sqrt[4]{p(x)}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(C_1+C_2)\cos\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{-p(x)}\,dx\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{2}(C_2-C_1)\sin\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{-p(x)}dx\right)\right]. \tag{17}$$

由于待定常数的任意性,(17)式与(11)式是等效的. 由此可见 W.K.B 法得到的结果实际上是现在方法得到结果在远离 $p(x)=0$ 处的一阶近似. 因此(9)式比 W.K.B 结果更为精确,形式也更简洁. 其优越性是显而易见的.

4 应用举例

(9)式在实际应用中是方便的,其形式与一般波动方程解的形式相似,因此用于初始问题或本征值问题都一样方便. 为说明这一方法的有效性,我们用他来求解如下初始问题,并将其结果与数值法求得的结果进行比较.

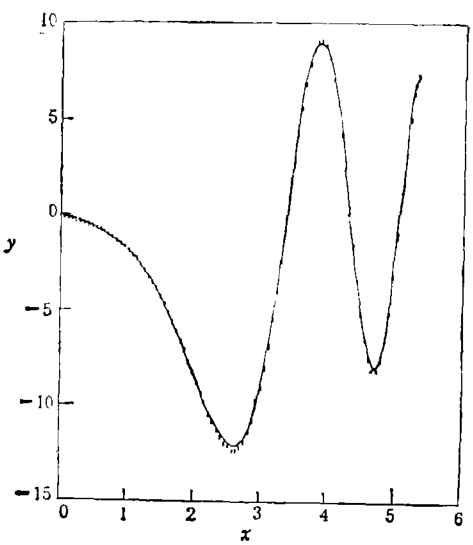

图 1 近似计算结果与数值结果的比较

---近似值 —数值结果

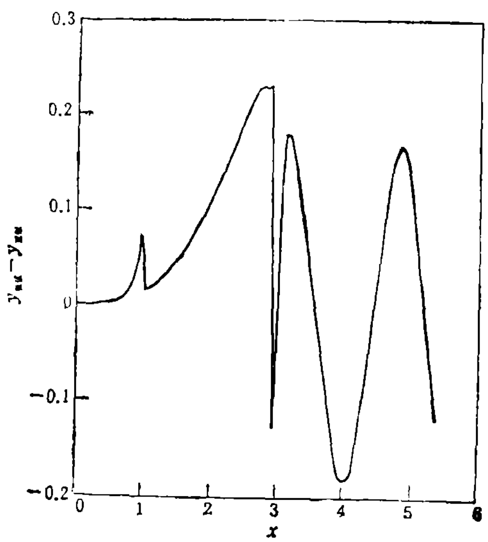

图 2 数值结果与近似结果之差

$$\begin{cases} d^2y/dx^2 + (x^2 - 4)y = 0, & (18) \\ y(0) = 0, & (19) \\ y'(0) = -1. & (20) \end{cases}$$

由第 2 节的结果可得变换

$$t(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \cdot \begin{cases} \left[\int_2^x \sqrt{x^2 - 4}\, dx\right]^{2/3} \\ -\left[\int_x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx\right]^{2/3} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \cdot \begin{cases} \left(x \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2\ln \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)^{2/3} \\ -\left(\pi - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} - 2\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{2/3}. \end{cases} \tag{21}$$

将(9)式代入(19)、(20)式可得待定常数 C_1, C_2 为

$$C_1 = -(t(0)/p(0))^{1/4} B_i(t(0)), \tag{22}$$

$$C_2 = (t(0)/p(0))^{1/4} A_i(t(0)). \tag{23}$$

利用(9),(22),(23)，(21)式求得的结果与用四阶 Runge Kutta 法求得的结果分别用点和线的形式绘于图 1，可见两者的结果是一致的。其误差绘于图 2。图 2 中的两个高峰是 Airy 函数在近似时的精度造成的，与本方法的误差无关，即 Airy 函数值计算得准确。本方法的误差仅与近似(8)式有关。

5 结论

本文研究了对一类非线性波动方程一致有效的近似解法。这个方法的精度和有效性都优于 W.K.B 法。实际上更一般的 Sturm-Liouville 方程通过适当的变换也可以变成(1)式的形式[3]，因此本文研究的近似解法具有普遍意义。值得指出的是本文的变换(3)式的形式可以根据 $p(x)$ 的特性而选定。在本文中假定 $p(x)$ 仅有一个转折点，我们选 Airy 函数作近似的基函数是恰当的。当有两个转折点时，我们可选用抛物柱函数或埃尔米特多项式作近似的基函数。这时(3)式左边可取为 $t^2 + \nu$。

参 考 文 献

[1] Chew W C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. Van Nostrand Reinhold, 1990, Chap. 2.
[2] Goyal I C, Gallawa R L. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1991, 5(6): 623—636.
[3] Fock V A. Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems. Pergmon Press, 1965, 379—384.

AN APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR WAVE EQUATION

Yuan Xiaojun Wang Guangming Lin Weigan
(Applied Physics Institute, Univerity of Electronic Science and Technologoy of China. Chengdu 610054)

Abstract A uniformly valid approximate solution of a kind of nonlinear wave equations is studied, the research results indicate that the solution of this kind of equatiors can be represented by Airy function approximately. The usually used W. K. B. approximation is the first order approximation of the present result in the region far away from the turning point of refractivity. At the turning point of refractivity, the present result is still valid.

Key words Nonlinear wave equation, Approximate solution, W. K. B. approximation