非线性轴向不均匀自聚焦光纤轴对称场的变分解*

洪德明　　陈智浩
（福建师范大学物理系　福州　350007）

摘要　本文用变分法求出了非线性轴向不均匀自聚焦光纤轴对称场的解析解．对于线性情形，变分解与其他文献的结果相同．

关键词　梯度折射率光纤，非线性光纤，自聚焦光纤，变分法

1 引言

折射率分布为

$$n_0^2(r,z)=n_0^2(1-A(z)r^2) \tag{1}$$

的光纤叫做轴向不均匀自聚焦光纤，其中 n_0 是光纤中心折射率，$A(z)$ 是与轴向 z 有关的量，$A(z)r^2\ll 1$．与文献[1]中所用介电常数的符号的关系为

$$K=n_0^2(r,z),\ K_0=n_0^2,\ K_2(z)=n_0^2A(z). \tag{2}$$

文献［2—4］研究了这种光纤中轴对称场的解析解．他们根据下列波动方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k^2n_0^2(r,z)\phi=0 \tag{3}$$

求解，式中 k 是真空中波数．文献[1]认为，当 ϕ 代表径向或角向电场时，轴对称场应满足下列波动方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{\phi}{r^2}+k^2n_0^2(r,z)\phi=0. \tag{4}$$

在(4)式中含有 $-\phi/r^2$ 项．当光束在近轴时，这一项不能忽略．

随着非线性纤维光学的迅猛发展，与功率有关的光纤非线性波动现象的研究，最近获得了很大的进展．文献[5]研究了强光在轴向均匀(即 $A(z)$ 与 z 无关)自聚焦光纤中的传播．作者之一在文献[6]中已初步证明，其近场光强分布类似 $(r/\omega)\exp(-r^2/\omega^2)$($\omega$是光环半径)的分布，但是，还没有解决为什么足够大的入射光功率会戏剧性地改变自聚焦光纤中传播的模数．因此进一步研究这种具有非线性(与光强有关)效应的自聚焦光纤的光束传播，具有一定的意义．

1994-01-11 收到，1994-06-22 定稿
* 福建省自然科学基金资助项目
洪德明　男，1942年生，讲师，长期从事物理基础理论课教学．
陈智浩　男，1962年生，付教授，现从事光纤与集成光学研究．

本文的目标就是要寻找下列非线性波动方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\psi}{r^2}+k^2n^2\psi=0, \tag{5}$$

$$n^2=n_0^2(r,z)+\alpha|\psi|^2, \tag{6}$$

$$\alpha=n_0^2n_2c\varepsilon_0$$

的解，式中 n_2 是光纤克尔 (Kerr) 非线性系数(单位是 m^2/W)，c 是真空中光速，ε_0 是真空中介电常数。当不考虑光克尔效应或这种效应可以略去不计时，即 $\alpha=0$，(6)式就简化为(1)式。(5)式也退化到(4)式。

2 (5)式的变分解

根据变分原理，(5)式可用如下变分问题表述：

$$\delta J=\delta\int_0^\infty\int_0^\infty L\left(\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial r},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z=0, \tag{7}$$

$$L=\left\{-\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2-\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2+k^2n_0^2[1-A(z)r^2]|\psi|^2-\frac{|\psi|^2}{r^2}+\frac{1}{2}k^2\alpha|\psi|^4\right\}r. \tag{8}$$

这样，原始方程(5)式可由如下 Euler-Lagrange 方程[7]

$$\frac{\partial L}{\partial\psi^*}-\frac{\partial^2L}{\partial z\partial\psi_z^*}+\frac{\partial^2L}{\partial r\partial\psi_r^*}-\frac{\partial L}{\partial\psi^*}=0 \tag{9}$$

导出，式中 $\psi_z=\partial\psi/\partial z$，$\psi_r=\partial\psi/\partial r$。考虑到 $\alpha=0$ 时，(5)式的解应与文献[1]中的解一致，试探解可假设为

$$\psi=A_0(r,z)\exp[-ikn_0S(r,z)-ikn_0z], \tag{10}$$

$$A_0(r,z)=\frac{c_1}{p+1}\frac{r}{f^2}L_p^{(1)}\left(\frac{r^2}{a^2f^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2f^2}\right), \tag{11}$$

$$S(r,z)=\frac{r^2}{2}\beta(z)+\Phi(z), \tag{12}$$

c_1 是待定常数，$p=0,1,2,\cdots$，$L_p^{(1)}$ 是广义拉盖尔 (Laguerre) 多项式，a 是初始光斑尺寸。 由于 $A(z)$ 是 z 的缓变函数，且 $A(z)r^2\ll 1$，所以 A_0 和 S 都是 z 的缓变实函数。于是在下面计算中，把 $(\partial A_0/\partial z)^2$ 和 $(\partial S/\partial z)^2$ 略去。$f(z)$，$\beta(z)$，$\Phi(z)$ 是待求的实函数。

若记

$$\langle L\rangle=\int_0^\infty L\mathrm{d}r=-k^2n_0^2c_1^2a^6f^2\left[\beta^2+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}+A(z)\right]-\frac{c_1^2a^2}{f^2}+\frac{h_pk^2\alpha c_1^4a^6}{f^2}-\frac{k^2n_0^2c_1^2a^4}{p+1}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}, \tag{13}$$

式中

$$h_p=\frac{1}{4(1+p)^4}\int_0^\infty x^2\exp(-2x)[L_p^{(1)}(x)]^4\mathrm{d}x, \tag{14}$$

$$(h_0=1/16,\ h_1=5/512,\ h_2=5/1536,\cdots,)$$

则变分方程(7)式就简化为

$$\delta\int_0^\infty\langle L\rangle(\beta,\beta',f,c_1,\Phi')\mathrm{d}z=0, \tag{15}$$

式中 $\beta'=\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}z$，$\Phi'=\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}z$。于是从 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta\langle L\rangle}{\delta\beta}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\beta'}\right)-\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\beta}=0 \tag{16}$$

可得

$$\beta=(1/f)(\mathrm{d}f/\mathrm{d}z). \tag{17}$$

从 $\delta\langle L\rangle/(\delta f)=0$ 得

$$\beta^2+\beta'+A(z)=1/(k^2n_0^2a^4f^4)-h_p\alpha c_1^2/(n_0^2f^4). \tag{18}$$

从 $\delta\langle L\rangle/(\delta c_1)=0$ 得

$$\beta^2+\beta'+A(z)+\frac{1}{k^2n_0^2a^4f^4}-\frac{2h_p\alpha c_1^2}{n_0^2f^4}+\frac{\Phi'}{(p+1)a^2f^2}=0. \tag{19}$$

利用 $\beta^2+\beta'=(1/f)(\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}z^2)$，并代入(18)式，得

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+A(z)=\frac{1}{k^2n_0^2a^4f^4}-\frac{h_p\alpha c_1^2}{n_0^2f^4}. \tag{20}$$

同样可得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}=(-2+3h_pk^2\alpha c_1^2a^4)\frac{p+1}{k^2n_0^2a^2f^2}. \tag{21}$$

当 $\alpha=0$ 时，(20)，(21)式退化为文献[1]中 f 和 Φ 所满足的方程。

于是在非线性介质波导中，存在下列由 p 来标记的模

$$\psi=\psi_p=\frac{c_1}{p+1}\frac{r}{f^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2a^2f^2}-ikn_0\left[z+\frac{r^2}{2f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+\int(-2+3h_pk^2\alpha c_1^2a^4)\frac{p+1}{k^2n_0^2a^2f^2}\mathrm{d}z\right]\right\}L_p^{(1)}\left(\frac{r^2}{a^2f^2}\right),$$
$$(p=0,1,2,\cdots). \tag{22}$$

由边界条件

$$z=0,\ f=1;\ z=0,\ \beta(0)=(1/f)(\mathrm{d}f/\mathrm{d}z)=R^{-1} \tag{23}$$

可确定(20)，(21)式的解。R 为 $z=0$ 处波前的曲率半径。

3 讨论

很明显，当 $\alpha=0$，即克尔效应不存在时，(20)—(22)式的解就退化为文献[1]的解。

若用光功率 $P=\pi n_0c\varepsilon_0\int_0^\infty|\psi|^2r\mathrm{d}r$ 来表示 c_1，则(20)，(21)式可改写成

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+A(z)=\frac{1}{k^2n_0^2a^4f^4}\left(1-\frac{P}{P_c}\right), \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}=-\frac{2(p+1)}{k^2n_0^2a^2f^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{P}{P_c}\right), \tag{25}$$

$$P_c=P_{co}/[16h_p(p+1)], \tag{26}$$

$$P_{co}=2\lambda^2/(\pi n_0n_2). \tag{27}$$

需要指出的是，当 $p=0$，即最低阶模时，$P_c=P_{co}$，这与文献[6]的结果一致。

当 $P = P_c$ 时,存在一种临界自聚焦情形,使(24)式退化为几何光学结果(非线性效应正好抵消了衍射效应),即

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dz^2} + A(z) = 0. \tag{28}$$

值得注意的是,用文献[1]的方法得不出(25)式。这是因为在非线性情形时,无象差近似预言的纵向相位是错误的[8,9]。临界自聚焦功率 P_c 与模的阶数有关。模阶越高,P_c 越大。这表明,同一人射功率,低阶模的非线性效应比高阶模非线性效应明显。

这种光纤中的场表达式最后可写成:

$$\psi = \psi_p = \frac{\sqrt{2P}}{\sqrt{(p+1)\pi n_0 c\varepsilon_0}}\frac{r}{a^2f^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2a^2f^2} - ikn_0\left[z + \frac{r^2}{2f}\frac{df}{dz} - \frac{2(p+1)}{k^2n_0^2a^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{P}{P_c}\right)\int f^{-2}dz\right]\right\}L_p^{(1)}\left(\frac{r^2}{a^2f^2}\right),$$
$$(p = 0, 1, 2, \cdots). \tag{29}$$

利用上面结果,与文献[10]一样,我们可以研究高斯(Gauss)光束在这种非线性光纤中的传播。

参 考 文 献

[1] Shouwan Kang, et al. J. Lightwave Tech., 1988, 6(8): 1257—1259.
[2] Sodha M S, etal. J. Opt. Soc. Am., 1971, 61(11): 1492—1494.
[3] Sodha M S, et al. J. Phys. D, 1971, 4(12): 1887—1892.
[4] Sodha M S, et al. Inhomogeneous Optical Waveguides. New York: Plenum Press, 1977, Chap. 7.
[5] 李 劬,等. 光学学报, 1990, 10(6): 514—520.
[6] Zhihao Chen, et al. Opt. Commun., 1992, 90(1—3): 39—40.
[7] Gagnonelal L. J. Opt. Soc. Am. A, 1991, 8(4): 601—607.
[8] De Saix M, Anderson D, et al. J. Opt. Soc. Am. B, 1991, 8(10): 2082—2086.
[9] Kalsson M, et al. Opt Lett., 1992, 17(1): 22—24.
[10] Shouwan Kang. J. Lightwave Tech., 1992, 10(9): 1185—1187.

VARIATIONAL SOLUTIONS OF AXISYMMETRICAL FIELD IN A NONLINEAR LONGITUDINALLY INHOMOGENEOUS SELF-FOCUSING FIBER

Hong Deming Chen Zhihao

(Department of Physics, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

Abstract This paper gives the analytic solutions of axisymmetrical field in a nonlinear longitudinally inhomogeneous self-focusing fiber by using the variational method. The variational solutions are in good agreement with the results of the other references in the case of linear condition.

Key words Graded index fiber, Nonlinear fiber, Self-focusing fiber, Variational method