第17卷 第6期 电子科学学刊 Vol. 17 No. 6
1995年11月 JOURNAL OF ELECTRONICS Nov. 1995

二维离散赫维茨多项式的复系数列表检验法*

肖 扬
(北方交通大学信息科学研究所 北京 100044)

摘要 本文提出了新的二维离散赫维茨 (Hurwitz) 多项式的检验定理. 与现有的二维离散赫维茨多项式的代数检验法不同,本文方法是直接对复变量系数列表,然后利用我们提出的检验定理进行零点存在性检验,不需在整个 $x\in[-1,1]$ 的实数域进行逐点检验,并且无有理多项式出现. 因而检验过程大为简化,计算量大为减少,只须进行有限次运算, 即可确定其是否是二维离散赫维茨多项式.

关键词 二维离散赫维茨多项式,二维离散系统,稳定性检验定理

1 引 言

由于二维离散系统的稳定性是其可靠实现的基本保证和系统设计的基础, 所以二维离散系统的稳定性分析在理论和应用上具有重要的意义[1].

线性条件下的二维离散系统是指系统实现是理想化的、不存在任何非线性运算,如量化、饱和、溢出等效应. 线性条件下的二维离散系统的稳定性一般采用有界输入、有界输出 (Bounded Input Bounded Output, BIBO) 稳定性定义[2].

定义 1 若二维离散系统的冲激响应系数是绝对可加的,即

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{mn}|<\infty, \tag{1}$$

则称该系统是 BIBO 稳定的.

二维递归系统的传递函数为

$$H(z_1, z_2)=\frac{A(z_1,z_2)}{B(z_1,z_2)}, \tag{2}$$

其中

$$A(z_1, z_2)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}a_{mn}z_1^{-m}z_2^{-n},\quad B(z_1,z_2)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}b_{mn}z_1^{-m}z_2^{-n}.$$

$H(z_1, z_2)$ 即为序列 $h(n_1, n_2)$ 的 Z 变换表达式. 直接由时域检验 (1) 式来确定系统的

1994-2-24 收到,1994-07-20 定稿
* 国家自然科学基金项目资助课题
肖 扬 男,1955年生,博士,副教授,现从事多维系统理论、多维数字信号处理、电路系统理论和多媒体通信系统等方面的研究.

BIBO 稳定性是非常困难的，几乎是不可能的。通常是根据下述定理来检验二维离散系统传递函数的稳定性[2]。

定理 1 二维离散系统是 BIBO 稳定的，当且仅当

$$B(z_1,z_2)\neq 0,\ |z_1|\geqslant 1,\ |z_2|\geqslant 1.$$

若令(2)式中，$z_1=z_1^{-1}, z_2=z_2^{-1}$，

$$B(z_1,z_2)\neq 0\ \text{时},\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1. \tag{3}$$

在下面的论述中，我们常用这种表达式。满足(3)式的二维多项式可称为二维离散赫维茨多项式。因此，二维离散系统的稳定性检验实际上是其传递函数的分母多项式的零点检验。

假设(2)式中的 $A(z_1,z_2)=1$，就排除了第二类非本征奇点的存在，在本文中，均假设系统的传递函数中不存在第二类非本征奇点。

2 二维离散系统稳定性的列表检验法

当二维离散系统的传递函数不存在第二类非本征奇点时，系统的稳定性取决于传递函数的分母多项式在单位双圆盘内是否有零点。

1973 年，朱里（Jury）和安得森（Anderson）[3]提出采用复共轭将二维复变量多项式转换为实变量系数的一维复变量多项式，对其实变量系数列表，判断复多项式在单位圆内有无零点。该二维复变量多项式零点检验方法被称为朱里检验。朱里在 1988 年和 1991 年又分别作了补充改进[4,5]。1986 年以来，又有一些学者提出的列表检验方法[6-8]，也均以朱里检验为基础，其算法难度和计算量未有改观。

我们在文献[9]中提出了新的列表检验方法，与目前朱里等的代数检验不同，我们的方法是对复变量系数列表，其检验是对复变量系数组成的复多项式检验，而不是实变量代数多项式。这种方法不必寻找 $|x|\leqslant 1$ 内的实根，计算量小，精度高，易于编程实现。从而解决了代数检验的实现计算量庞大，精度差的难题。

二维离散系统传递函数的分母多项式为二维离散赫维茨多项式的条件如下式：

$$B(z_1,z_2)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} b_{mn}z_1^m z_2^n\neq 0,\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1. \tag{4}$$

(4)式可表示为

$$B(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{N} b_n(z_1)z_2^n\neq 0,\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1. \tag{5}$$

这里

$$b_n(z_1)=\sum_{m=0}^{M} b_{mn}z_1^m. \tag{6}$$

将 $b_n(z_1)$ 视为 z_2 复多项式的复变量系数，检验(4)式是否满足表 1 的条件。

复变量系数应满足：对于 $|z_1|\leqslant 1$，

$$|b_{i,0}|>|b_{i,N-i}|,\ i=0,\cdots,N-1. \tag{7}$$

这里

表 1

第 i 行	z_2^0	z_2^1	z_2^2	…	z_2^{N-2}	z_2^{N-1}	z_2^N
0	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	…	$b_{0,N-2}$	$b_{0,N-1}$	$b_{0,N}$
1	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	…	$b_{1,N-2}$	$b_{1,N-1}$	0
…	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N-1$	$b_{N-1,0}$	$b_{N-1,1}$	0	…	0	0	0

当 $i=0$ 时，$b_{0,k}=b_k(z_1)$，　(8a)

当 $i\geqslant 1$ 时　$b_{i,k}=\begin{vmatrix} b_{i-1,0} & b_{i-1,N-i+1-k} \\ b_{i-1,N-i+1} & b_{i-1,k} \end{vmatrix}$，$k=0,1,\cdots,N-i$.　(8b)

在表 1 中，$b_{i,k}(z_1)$ 是复变量多项式，而文献[2～7]的代数检验均为实变量 x 的多项式。因此，检验稳定条件(7)式是在复变换域 $|z_1|\leqslant 1$ 进行，而不是整个实数域 $x_1\in[-1,1]$。

3　二维离散赫维茨多项式的检验定理和证明

为了检验条件(7)式，我们将提供一等效条件。根据它，可应用我们提出的新的检验定理。

定理 2　当且仅当分母多项(6)式满足条件(7)式，它才是二维离散赫维茨多项式。

为了证明定理 2，首先将一维舒尔（Schur）检验修改为另一形式。

定理 3　若对于 $|z|\leqslant 1$，

$$B(z)=\sum_{n=0}^{N} b_n z^n \neq 0, \tag{9}$$

则 $B(z)$ 满足(9)式的条件是：当且仅当

(a) $B(\pm 1)>0$;　(10)

(b) 下列 $N\times N$ 矩阵是正定的，即

$$\Delta_N=\begin{bmatrix} b_0 & & & 0 \\ b_1 & b_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{N-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & & & b_N \\ & & b_N & b_{N-1} \\ \vdots & \iddots & & \\ b_N & b_{N-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

亦即

$$|b_{i,0}|>|b_{i,N-i}|,\ i=0,\cdots,N-1, \tag{12}$$

其中 $b_{i,k}$ 由(8)式定义。

证明　由文献[10]的第 5.3 节，考虑与之相反的情形，即对于 $|z|\leqslant 1$，$B(z)$ 不存在零点的情形。通过简单的变换，$z=z^{-1}$，即得上述结果。　证毕

定理 2 的证明　令定理 3 中的 b_n 为复变量，则定理 2 中的 $b_{0,n}(z)$ 可表示为定理 3 的 b_n，(11) 式可变为前述的复系数检验表。稳定条件(7)式的检验可转换为(12)式的检验。因此，当 b_n 是复变量时，定理 3 等价于定理 2 。　证毕

事实上,定理 2 的检验已被变为一维舒尔检验．下列定理说明其检验过程．

定理 4 若二维递归数字系统的传递函数的分母多项式(2)式满足条件：对于 $i=0,\cdots,N-1$,

(a) $b_{i,0}(\pm 1)\pm b_{i,N-i}(\pm 1)>0$, (13)

(b) $b_{i,0}(z_1)\pm b_{i,N-i}(z_1)\neq 0$, (14)

则该多项式是二维离散赫维茨多项式,系统是稳定的．这里 $b_{i,k}(z_1)$ 由(8)式定义．

证明 由定理 2 和定理 3,可得上述结果．(14)式确保(7)式恒有不等条件，(13)式确定(7)式的不等号方向．(13)式和(14)式结合，即等价于条件(7)式．

4 应用举例

为验证本文定理的正确性,我们对文献[2,4]中的几个例子进行了检验，结果完全一致,这里仅给出其中一例．

例 取自文献[2]．应用定理 4,判断下列多项式是否是二维离散赫维茨多项式．

$$B(z_1,z_2)=1-1.2z_1+0.5z_1^2-1.5z_2+1.8z_1z_2-0.75z_1^2z_2 + 0.6z_2^2-0.72z_1z_2^2+cz_1^2z_2^2. \tag{15}$$

(1) 当 $c=0.25$ 时,利用一维舒尔检验,发现第一行复多项式存在单位圆内零点：对于 $|z_1|\leqslant 1$,出现

$$b_{1,0}(z_1)+b_{1,1}(z_1)=0.15-0.45z_1+0.5075z_1^2-0.225z_1^3+0.0455z_1^4=0,$$

故此时 $B(z_1,z_2)$ 有单位圆盘内零点,$B(z_1,z_2)$ 不是二维离散赫维茨多项式．

(2) 当 $c=0.29$ 时，利用一维舒尔检验，发现各行复多项式均不存在单位圆内零点,同时满足定理 4 的条件 (a),故此时 $B(z_1,z_2)$ 无单位双圆盘内零点，$B(z_1,z_2)$ 是二维离散赫维茨多项式．

若采用文献[1～8]的方法,需首先求出 x 的多项式，然后判断 x 在[$-1,1$]区间有无零点．朱里检验还会遇到 x 的有理式问题,从而无法应用斯塔姆检验．

5 结　论

本文提出了新的二维离散赫维茨多项式的检验定理．可对二维离散系统直接进行复变量系数的列表形式的稳定性检验,大大简化了检验过程,使计算量大为减少．

参 考 文 献

[1] Dudgeon D E, Mersereau R M. Multidimensional Digital Signal Processing. New Jersey: Prentice Hall, 1984, Chapter 4.

[2] Huang T S, *et al*. Two-Dimensional Digital Signal Processing-I: Linear Filters. Berlin: Springer-Verlag, 1981, Chapter 4.

[3] Anderson B D O, Jury E I. IEEE Trans. on Audio Electroacoust. 1973, AE-21(4): 366—372.

[4] Jury E I. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(1): 116—119.

[5] Jury E I. IEEE Trans. on CAS, 1991, CAS-38(2): 221—223.

[6] Karan B M, Srivastava M C. IEEE Trans. on CAS, 1986, CAS-33(8): 807—809.

[7] Xiheng Hu, Ng T S. IEEE Trans. on CAS, 1990, CAS-37(4): 550—555.
[8] Xiheng Hu, Hansen Yee. IEEE Trans. on CAS, 1992, CAS-40(6): 1579—1581.
[9] Xiao Yang. New Stability Test Theorems for Two-Dimensional IIR Digital Filters. Proc. of IEEE TENCON'93, Beijing: Oct. 1993, 594 -597.
[10] LaSalle J P. The Stability and Control of Discrete Processes, New York: Springer-Verlag, Inc. 1986, Chapter 5.

COMPLEX COEFFICIENTS' TABLE TEST FOR TWO-DIMENSIONAL DISCRETE HURWITZ POLYNOMIALS

Xiao Yang

(*Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044)

Abstract The test theorem of 2-D discrete Hurwitz polynomials is proposed. Different from the algebraic methods for the polynomials, the approach of this paper is to list table for complex variable coefficients directly, then to test zero existence for the polynomials with the theorem of this paper. The test proceedure is greatly simplified, and reduces the computations, for it need not to test all x in real domain $[-1, 1]$ point by point and will not meet the rational polynomials. To determine whether they are 2-D discrete Hurwitz polynomials needs only finite computations.

Key words 2-D discrete Hurwitz polynomials, Two-dimensional discrete systems, Stability test theorem