第4卷 第3期 电子学通讯 Vol. 4, No. 3
1982年5月 JOURNAL OF ELECTRONICS May, 1982

求流图的1-因子和1-因子连通*

陆生勋 张礼和
（杭州大学）

（一）引言

文献[1]曾用有向图表示一组线性方程，然后利用这个图（称为流图或 Coates 图）写出方程的解．此法在各方面，尤其是在电路理论方面得到广泛的应用，不过在计算中需要列举流图中全部1-因子（1-factor）和1-因子连通（1-factorial connection），对于较复杂的流图来说则不易全部找出而无遗漏．一般多用组合法来求，本文定义一种乘法运算后给出求任意有向图的全部1-因子和1-因子连通的简单方法．

（二）定义

有向图 $G(V, E)$ 或简记作 G，其顶点集为 V，边集为 E，用 (i, j) 或 e 表示从顶点 i 到顶点 j 的一条边，i、j 分别称为边 (i, j) 的源和尾．在 G 中以一个顶点 i 为源的边称为出边，i 的全部出边的条数称为 i 的出度，记作 $\deg^+(i)$，同样定义以 j 为尾的入边和入度 $\deg^-(i)$．若须标明顶点 $i\in V(H)$ 在子图 H 中的出度或入度时记作 $\deg^+_H(i)$ 或 $\deg^-_H(i)$．当有向图的每个顶点 i 的 $\deg^+(i)=\deg^-(i)=k$ 时，称有向图为 k-度正则有向图．$G(V, E)$ 的生成子图是指顶点集 $V_s=V$，边集 $E_s\subseteq E$ 构成的子图 $G_s(V_s, E_s)$．有向图 G 的1-度正则生成子图定义为1-因子．易见如此定义的1-因子就是由一组顶点不相交（vertex-disjoint）的有向圈构成的 G 的生成子图．1-因子连通定义为有向图 G 的一个生成子图：(1)它有一条且仅有一条从顶点 i 到顶点 j 的有向路，(2)它有一组顶点不相交的有向圈，并且这些有向圈通过除属于(1)以外的全部顶点．

对于边集不是空集的子图常用边的乘积表示这个子图，例如 $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}$ 表示由 n 条边和这些边的端点构成的子图．文中未定义的术语和符号与文献[2]同．

设 $\mathscr{D}$ 是有向图 G 的全部子图的集合，$\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{D}$ 的全部子集合的集．参照文献[3]对 $\mathscr{H}$ 定义一个称为"星"（star）的乘法运算如下：对于 $h_1, h_2\in\mathscr{H}$，

$$h_1 * h_2 = \{x\cup y/x\in h_1,\ y\in h_2,\ 且\ \deg^+_{x\cup y}(i)<2, \deg^-_{x\cup y}(i)<2\}$$

$\mathscr{H}$ 的零元素定义为 $\mathscr{H}$ 的空集，记作 ϕ，并且

$$h_1 * \phi = \phi * h_1 = \phi$$

显然，如此定义的乘法运算满足乘法交换律和结合律．

（三）定理

定理 设 $G(V, E)$ 为一有向图，$V=\{1, 2, \cdots, \mu\}$，S_k 是顶点 k 为源的出边集，$S_k=\{(k, t)/(k, t)\in E,\ t\in V\}$，则

* 1981年9月8日收到．

$$C = S_1 * S_2 * \cdots * S_\mu \tag{3}$$

给出 $G(V, E)$ 的全部 1-因子.

证：充分性　设 $(i_1, j_1)(i_2, j_2)\cdots(i_\mu, j_\mu) \in C$，则 $(i_k, j_k) \in S_k$，$\{i_k\} = \{j_k\} = V$，子图 $(i_1, j_1)(i_2, j_2)\cdots(i_\mu, j_\mu)$ 包含 G 的全部顶点，所以是生成子图. 由于此生成子图每个顶点的 $\deg^+(i_k) < 2$，$\deg^-(i_k) < 2$，所以它的各支（component）只能是有向路或有向圈. 注意到 $(i_1, j_1)(i_2, j_2)\cdots(i_\mu, j_\mu)$ 是各 S_k 中取一条且仅取一条出边而构成的子图，且顶点数等于边数，则知该子图的各支只能是有向圈. 因此 C 的每个元素都是 G 的 1-因子.

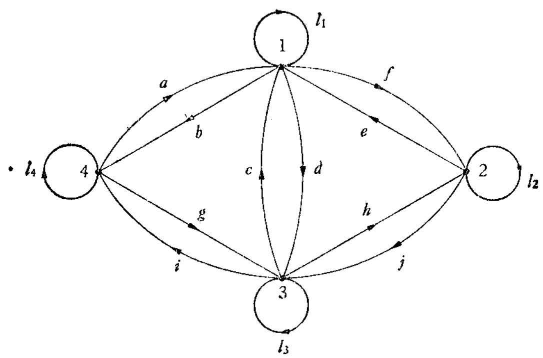
必要性　设 $e_1 e_2 \cdots e_\mu$ 是 G 的一个 1-因子，则它的出边数应等于顶点数. 因此每一出边属于且仅属于一个 S_k. 又因 $\deg^+_{e_1e_2\cdots e_\mu}(i) = 1 < 2$，$\deg^-_{e_1e_2\cdots e_\mu}(i) = 1 < 2$，所以 $e_1e_2\cdots e_\mu \in C$. 证毕.

如果将式(3)的 S_k 改为以 k 为尾的边集，则定理仍然成立.

推论　因有向路增加一条有向边后便可成为有向圈，所以求 $G(V, E)$ 中从 i 到 j 的全部 1-因子连通时，只须求 $G(V, E) \cup (j, i)$，$(j, i) \notin E(G)$ 的全部 1-因子.

（四）举例

例：求以下流图的全部 1-因子.



$S_1 * S_2 * S_3 * S_4 = \{e_1, f, d, b\} * \{e_2, e, j\} * \{e_3, i, c, h\} * \{e_4, a, g\} = \{e_1e_2, e_1j, fe, fj, de_2, de, be_2, be, bj\} * \{e_3e_4, e_3a, ia, ig, ce_4, cg, he_4, ha, hg\} = \{e_1e_2e_3e_4, e_1e_2ig, e_1jhe_4, fee_3e_4, feig, fjia, fjce_4, de_2ia, de_2ce_4, dehe_4, be_2e_3a, be_2cg, behg, bjha\}$，该图共有 14 个 1-因子.

本法对手算和机算均适用. 关于应用本法分析大规模网络的问题正在进行中.

参　考　文　献

[1] C. L. Coates, IRE. Trans. on CT, CT-6(1959), 170.
[2] W. K. Chen, *Applied Graph Theory*, 2-nd ed., *North-Holland, Amsterdam*, 1976.
[3] W. K. Chen, J. SIAM Appl. Math, 14(1966), 550.

TO FIND ALL THE 1-FACTORS AND 1-FACTORIAL CONNECTIONS OF A FLOW GRAPH

Lu Sheng-xun Zhang Li-he
(*Hangzhou University*)

This note gives a method to find all the 1-factors and 1-factorial connections of a flow graph. Let $\mathscr{D}$ be the set of all subgraphs of a given diagraph $G(V, E)$ and $\mathscr{H}$ be the set of all subsets of $\mathscr{D}$. For h_1, $h_2 \in \mathscr{H}$, a multiplication operation being called "star" is denoted by the symbol $*$ and is defined in the following:

$$h_1 * h_2 = \{x \cup y / x \in h_1, y \in h_2, \text{ and } \deg^+_{x\cup y}(i) < 2,\ \deg^-_{x\cup y}(i) < 2\}$$

Theorem Let $G(V, E)$ be a diagraph with vertex set

$$V = \{1, 2, \cdots, \mu\}, \text{ and let } S_k = \{(k, t)/(k, t) \in E, t \in V\}.$$

Then all the 1-factors of $G(V, E)$ can be determined by the product of S_k as follows:

$$C = S_1 * S_2 * \cdots * S_\mu$$

Obviously, if $G(V, E)$ is replaced by $G(V, E) \cup (j, i)$, $(j, i) \notin E$, then the product gives all the 1-factorial connections from i to j of the diagraph $G(V, E)$.