

# 三腔分离腔的结构尺寸对频率的影响<sup>1</sup>

范植开 刘庆想

(中国工程物理研究院应用电子学研究所 成都 621900)

**摘 要** 该文从圆柱坐标系下的 Borgnis 位函数的齐次标量 Helmholtz 方程出发, 引入慢波驻波概念及其场表达式, 利用 Borgnis 位函数的边界条件及相邻子区公共界面上的场匹配条件, 导出三腔分离腔内角向均匀 TM 模的色散关系, 并利用色散关系分析了三腔分离腔的结构尺寸对谐振频率的影响。

**关键词** 分离腔, 色散关系, 谐振频率

**中图分类号** TN752, TN815

## 1 引言

90 年代初, Barry M. Marder 研究了一种被称作分离腔振荡器 (SCO, Split-Cavity Oscillator) 的新器件<sup>[1]</sup>, 它是用来调制强流相对论电子束的。在结构上就是在一个圆柱谐振腔的中心横截面上同心地放置一个半径小于圆柱腔内径的导电筒 (栅网), 把圆柱腔分成完全相同的相互耦合的两个小腔。鉴此, 我们不妨把 Marder 研制的分离腔振荡器称之为两腔分离腔振荡器, Raymond W. Lemke 用等效单周期慢波结构的方法对其色散关系进行了研究<sup>[2]</sup>。

1997 年, 刘庆想同志提出了三腔渡越时间效应高功率微波振荡器, 并进行了研究。该器件在结构上就是在一个圆柱谐振腔内等间距同心地放置两个半径小于圆柱腔内径的导电筒 (栅网), 把圆柱腔分成完全相同的相互耦合的三个小腔。鉴此, 我们不妨把它称之为三腔分离腔振荡器。研究表明三腔分离腔振荡器比两腔分离腔振荡器能更好地调制强流相对论电子束。它与两腔分离腔振荡器的结构类似, 只是长度为三个空间周期, 但其色散关系无法套用文献 [2] 中所用的传统解析方法进行研究。在此我们提出了一种新的解析方法, 即在引入慢波驻波后, 用场论的分析方法直接求解色散关系。然后, 利用色散关系分析三腔分离腔高频结构尺寸对谐振频率的影响。

## 2 三腔分离腔振荡器中的横磁模

### 2.1 三腔分离腔振荡器的高频结构及求解区域的划分

三腔分离腔振荡器的高频结构示于图 1。图中圆波导内半径为  $a$ , 栅网的半径为  $b$ , 栅网的厚度为  $t$ , 两栅网之间的间隙距离为  $g$ , 空间周期为  $p, p = g + t$ , 该谐振腔的长度为  $L, L = 3p$ 。将腔分成 4 个求解区域, 求解区域的划分示于图 1。

### 2.2 对称横磁模在各区的场分量表达式

2.2.1 4 区: 慢波驻波区,  $b \leq \rho \leq a, 0 \leq z \leq L$  若周期系统两端不短路, 则 1 区为慢波区。由周期系统的弗洛奎定理 (Floquet's theorem)<sup>[3]</sup> 知, 该区角向均匀 TM 模的  $U$  函数应具有以下形式:

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{1n} f_n(\rho) + A_{2n} g_n(\rho)] e^{-j\beta_n z} \quad (1)$$

<sup>1</sup> 2000-05-28 收到, 2000-11-30 定稿

国家 863 激光技术领域 (批准号: 863-410-7-2-1) 及中国工程物理研究院行业科学技术预先研究基金 (批准号: 20000441) 资助项目

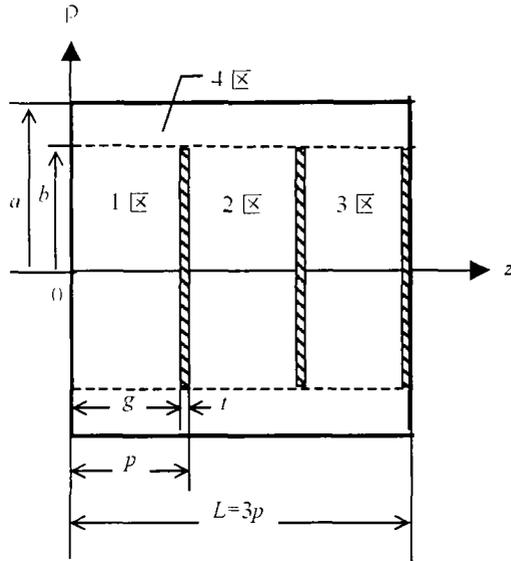


图1 三腔分离腔振荡器高频结构

式中

$$f_n(\rho) = \begin{cases} J_0(T_n \rho), & |\beta_n| \leq k \\ I_0(\tau_n \rho), & |\beta_n| > k \end{cases} \quad (2a)$$

$$g_n(\rho) = \begin{cases} N_0(T_n \rho), & |\beta_n| \leq k \\ K_0(\tau_n \rho), & |\beta_n| > k \end{cases} \quad (2b)$$

$\beta_n, T_n, \tau_n$  的表达式见 (8) 式。若将周期慢波系统两端短路, 则 4 区的慢波将形成慢波驻波, 故 4 区的  $U$  函数为

$$U_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{1n} f_n(\rho) + A_{2n} g_n(\rho)] [C \cos \beta_n z + D \sin \beta_n z] \quad (3)$$

这里的驻波是由无穷多个空间谐波的驻波叠加而成的。

在纵向短路面  $z=0$  和  $z=L$  上,  $(\partial U / \partial z)|_{z=0, L} = 0$ , 得  $D=0$ ,  $\sin \beta_n L = 0$ , 有

$$\beta_n L = m_n \pi, \quad m_n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4)$$

对于基波来说,  $n=0$ , 因此  $\beta_0 L = m_0 \pi$ 。对三腔分离腔振荡器而言,  $L=3p$ , 则

$$\beta_0 p = m_0 \pi / 3, \quad m_0 = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

$\beta_0 p$  表示基波通过一个空间周期的相移  $\varphi_0$ , 亦即工作模式  $\varphi_0$ 。(5) 式表示对三腔分离腔振荡器而言, 每一个电磁模式 (如 TM 模), 都有 4 个工作模式:  $0, \pi/3, 2\pi/3$  和  $\pi$  模 (这些工作模式的谐振频率各不相同, 相速与驻波场的分布也各不相同), 实际上只有前三个,  $\pi$  模不存在, 分析见后。

在横向短路面  $\rho=a$  上,  $U_4|_{\rho=a}=0$  得  $A_{1n} f_n(a) + A_{2n} g_n(a) = 0$ 。令  $A_n / C = A_{1n} / [g_n(a)] = -A_{2n} / [f_n(a)]$ , 则 4 区的  $U$  函数为

$$U_4(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n F_n(\rho) \cos \beta_n z \quad (6)$$

式中

$$F_n(\rho) = g_n(a) f_n(\rho) - f_n(a) g_n(\rho) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_n^2 + T_n^2 &= k^2 = \omega^2 \mu \epsilon, & |\beta_n| \leq k \\ \beta_n^2 - \tau_n^2 &= k^2 = \omega^2 \mu \epsilon, & |\beta_n| > k \\ \beta_n &= \beta_0 + 2\pi n / p, & n = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty \\ \beta_0 &= m_0 \pi / L = m_0 \pi / (3p), & m_0 = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $k$  为相移常数 (不同空间谐波的相移常数是相同的),  $\beta_n$ ,  $T_n$  分别为  $n$  次空间谐波的纵向相移常数和横向相移常数. 当  $|\beta_n| > k$  时,  $T_n$  为虚数, 为了方便常令  $T_n = j\tau_n$ .

利用圆柱坐标系下场分量与 Borgnis 位函数的关系式<sup>[4]</sup> 可求出 4 区的场分量:

$$E_{z4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (k^2 - \beta_n^2) A_n F_n(\rho) \cos \beta_n z \quad (9)$$

$$E_{\rho4} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n A_n F'_n(\rho) \sin \beta_n z \quad (10)$$

$$H_{\phi4} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\omega \varepsilon A_n F'_n(\rho) \cos \beta_n z \quad (11)$$

$$E_{\phi4} = 0, \quad H_{\rho4} = 0, \quad H_{z4} = 0$$

式中

$$F'_n(\rho) = g_n(a) f'_n(\rho) - f_n(a) g'_n(\rho) \quad (12)$$

$$f'_n(\rho) = \begin{cases} -T_n J_1(T_n \rho), & |\beta_n| \leq k \\ \tau_n I_1(\tau_n \rho), & |\beta_n| > k \end{cases} \quad (13a)$$

$$g'_n(\rho) = \begin{cases} -T_n N_1(T_n \rho), & |\beta_n| \leq k \\ -\tau_n K_1(\tau_n \rho), & |\beta_n| > k \end{cases} \quad (13b)$$

推导上式用到零阶变态贝塞耳函数的求导公式<sup>[5]</sup>,  $I'_0(z) = I_1(z)$ ,  $K'_0(z) = -K_1(z)$ .

2.1.2  $J$  ( $J = 1, 2, 3$ ) 区: 径向线区,  $b \leq \rho \leq a$ ,  $(J-1)p \leq z \leq (J-1)p + g$

1 区、2 区和 3 区都是径向线区, 场的性质完全相同, 都是驻波场, 只是由于它们在慢波系统中所处的位置不同而具有不同的相位. 分析知, 第  $J$  个径向线内角向均匀 TM 模形成驻波场的  $U$  函数可表示为<sup>[6]</sup>

$$U_J(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,J} f_{bm}(\rho) \cos(\beta_{bm}(z - (J-1)p)) \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p \quad (14)$$

$J$  区的场分量为

$$E_{z,J} = \sum_{m=0}^{\infty} (k^2 - \beta_{bm}^2) C_{m,J} f_{bm}(\rho) \cos(\beta_{bm}(z - (J-1)p)) \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p \quad (15)$$

$$E_{\rho,J} = - \sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{bm}) C_{m,J} f'_{bm}(\rho) \sin(\beta_{bm}(z - (J-1)p)) \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p \quad (16)$$

$$H_{\phi,J} = - \sum_{m=0}^{\infty} j\omega \varepsilon C_{m,J} f'_{bm}(\rho) \cos(\beta_{bm}(z - (J-1)p)) \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p \quad (17)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \beta_{bm}^2 + T_{bm}^2 &= k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon, & \beta_{bm} &\leq k \\ \beta_{bm}^2 - \tau_{bm}^2 &= k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon, & \beta_{bm} &> k \\ \beta_{bm} &= m\pi/g, & m &= 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

$$f_{bm}(\rho) = \begin{cases} J_0(T_{bm}\rho), & \beta_{bm} \leq k \\ I_0(\tau_{bm}\rho), & \beta_{bm} > k \end{cases} \quad (18b)$$

$$f_{bm}(\rho) = \begin{cases} -T_{bm}J_1(T_{bm}\rho), & \beta_{bm} \leq k \\ \tau_{bm}I_1(\tau_{bm}\rho), & \beta_{bm} > k \end{cases} \quad (18c)$$

式中  $k$ ,  $\beta_{bm}$ ,  $T_{bm}$  分别为径向线内本征模的相移常数、纵向相移常数和横向相移常数。当  $\beta_{bm} > k$  时,  $T_{bm}$  为虚数, 为了方便常令  $T_{bm} = j\tau_{bm}$ 。为了区别, 这里给径向线区物理量加了一个下标  $b$ 。

由径向线区场分量表达式不难发现: 当  $\beta_0 p = \pi$  时, 1, 2, 3 区的场均为零。由此可知三腔分离腔振荡器中不存在  $\pi$  模。这一结论与文献 [7] 中给出的整腔结尾的谐振腔链不存在  $\pi$  模的结论是一致的。

### 3 色散关系

将 4 区和 1, 2, 3 区的场在它们公共界面  $\rho = b$  处严格匹配, 则得到该谐振腔的严格解。场匹配条件是  $E_z$ ,  $E_\rho$ ,  $H_\phi$  中任意两个连续, 我们选择切向分量  $E_z$  及  $H_\phi$  连续。

让切向电场  $E_z$  在  $\rho = b$  面上处处匹配, 得

$$EA_n = \frac{2}{L} \sum_{J=1}^3 \left(\cos\left(J - \frac{1}{2}\right)\beta_0 p\right) \sum_{m=0}^{\infty} EC_{m,J} IC_{mn,J} \quad (19)$$

式中

$$EA_n = (k^2 - \beta_n^2) A_n F_n(b) \quad (20)$$

$$EC_{m,J} = (k^2 - \beta_{bm}^2) C_{m,J} f_{bm}(b), \quad J = 1, 2, 3 \quad (21)$$

$IC_{mn,J}$  为两个余弦函数乘积在  $J$  区的积分值:

$$IC_{mn,J} = \int_{(J-1)p}^{(J-1)p+g} \cos \beta_{bm}[z - (J-1)p] \cos \beta_n z dz \quad (22)$$

让切向磁场  $H_\phi$  在  $\rho = b$  柱面上处处匹配, 得

$$\left. \begin{aligned} EC_{1,J} &= \frac{k^2 - \beta_{bl}^2}{R_{bl}} \left\{ 2/[g \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p] \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_n}{k^2 - \beta_n^2} IC_{ln,J} EA_n, \quad l = 1, 2, \dots, \infty \\ EC_{0,J} &= \frac{k^2 - \beta_{b0}^2}{R_{b0}} \frac{T_{b0}^2}{R_{b0}} \left\{ 1/[g \cos(J - \frac{1}{2})\beta_0 p] \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_n}{k^2 - \beta_n^2} IC_{0n,J} EA_n, \quad l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中  $J = 1, 2, 3$   $\beta_{bl} = l\pi/g$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 。

$$R_{bl} = f'_{bl}(b)/f_{bl}(b), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (24)$$

$$R_n = F'_n(b)/F_n(b), \quad n = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty \quad (25)$$

(19) 和 (23) 式是表示待定系数  $EA_n, EC_{m,J}(J=1,2,3)$  之间关系的。将 (23) 式代入 (19) 式, 经过运算, 得

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2}{Lg} \frac{R_q}{k^2 - \beta_q^2} \left[ 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^2 - \beta_{bl}^2}{R_{bl}} \sum_{J=1}^3 IC_{lq,J} IC_{ln,J} - \frac{k^2 - \beta_{b0}^2}{R_{b0}} \sum_{J=1}^3 IC_{0q,J} IC_{0n,J} \right] - \delta_{qn} \right\} EA_q = 0, \quad n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (26)$$

式中

$$\delta_{qn} = \begin{cases} 1, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases} \quad (27)$$

这里说明一下, 本文中整形变量  $q$  和  $n$  是具有相同的取值范围的  $(-\infty, \infty)$ , 整型变量  $l$  和  $m$  也是具有相同取值范围的  $[0, \infty)$ 。

这是一个由无穷个方程 ( $n$  从  $-\infty$  到  $\infty$  取值) 组成的齐次线性方程组, 方程组中每一个方程又有无穷个待求未知量  $EA_q$  ( $q$  从  $-\infty$  到  $\infty$  取值), 每一未知量  $EA_q$  前的系数又是一个无穷级数。该齐次线性方程组有非零解的条件是其系数行列式的值为零, 于是得到下列方程:

$$\det(D(k, \beta_0)) = 0 \quad (28)$$

无穷方阵  $D(k, \beta_0)$  的第  $n$  行第  $q$  列元素  $D_{nq}(k, \beta_0)$  为

$$D_{nq}(k, \beta_0) = \frac{2}{Lg} \frac{R_q}{k^2 - \beta_q^2} \left[ 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^2 - \beta_{bl}^2}{R_{bl}} \sum_{J=1}^3 IC_{lq,J} IC_{ln,J} - \frac{k^2 - \beta_{b0}^2}{R_{b0}} \sum_{J=1}^3 IC_{0q,J} IC_{0n,J} \right] - \delta_{qn}, \quad n, q = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty \quad (29)$$

(28) 式即为三腔分离腔振荡器角向均匀 TM 模的特征方程, 又叫色散关系。

#### 4 三腔分离腔振荡器的谐振频率 [8]

三腔分离腔振荡器高频结构的尺寸为:  $a=5\text{cm}$ ,  $b=4\text{cm}$ ,  $t=0.1\text{cm}$ ,  $g=1.8\text{cm}$ ,  $p=g+t=1.9\text{cm}$ ,  $L=3p=5.7\text{cm}$ 。编程求解色散关系 (28) 式, 得出三腔分离腔振荡器  $\text{TM}_{010}$  模的谐振频率 (见表 1)。

表 1 三腔分离腔振荡器  $\text{TM}_{010}$  模下各谐振模式的频率值

| 谐振模式 ( $\varphi_0 = \beta_0 p$ ) | 0 模   | $\pi/3$ 模 | $2\pi/3$ 模 * | ( $\pi$ 模) |
|----------------------------------|-------|-----------|--------------|------------|
| 谐振频率 $f(\text{GHz})$             | 2.530 | 2.944     | 3.804        | (4.564)    |

注: (1) 注有 \* 号的模式为实验中测得的模式, 测得的频率 3.8GHz 与计算频率 3.804GHz 基本一致

(2)  $\pi$  模因其场分量全为 0, 实际上是不存在的, 所以  $\pi$  模相应的数据加上了括号

#### 5 三腔分离腔振荡器的结构尺寸对谐振频率的影响

三腔分离腔振荡器高频结构的几何尺寸主要有 4 个: 腔半径  $a$ , 栅网半径  $b$ , 两栅网之间的间隙距离  $g$ , 栅网厚度  $t$ 。这 4 个尺寸可以独立改变, 一般说来, 改变它们中任何一个都将引起三腔分离腔振荡器谐振频率的变化。我们利用上面导出的色散关系 (28) 式编程计算了这 4 个尺寸单独变化时谐振频率的变化。计算的数据画出曲线示于图 2- 图 5。

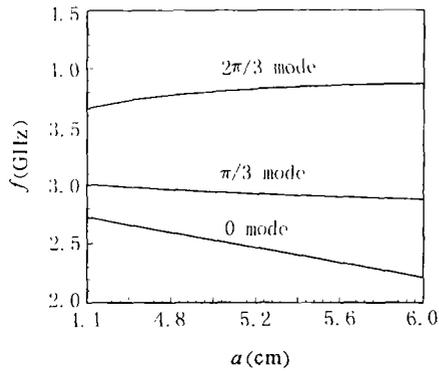


图 2 腔半径  $a$  对各模式频率的影响  
( $b=4\text{cm}$ ,  $g=1.8\text{cm}$ ,  $t=0.1\text{cm}$ )

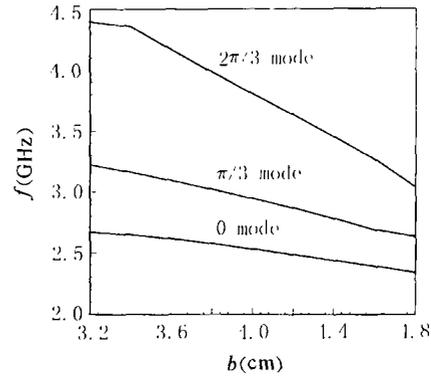


图 3 栅网半径  $b$  对各模式频率的影响  
( $b=4\text{cm}$ ,  $g=1.8\text{cm}$ ,  $t=0.1\text{cm}$ )

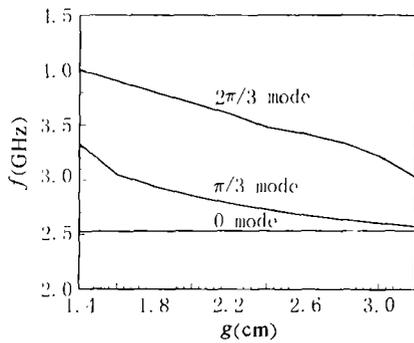


图 4 栅网间距  $g$  对各模式频率的影响  
( $b=5\text{cm}$ ,  $b=4\text{cm}$ ,  $t=0.1\text{cm}$ )

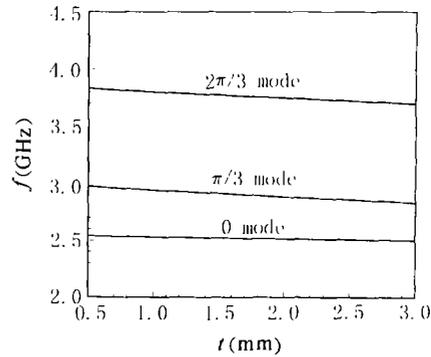


图 5 栅网厚度  $t$  对各模式频率的影响  
( $a=5\text{cm}$ ,  $b=4\text{cm}$ ,  $g=1.8\text{cm}$ )

从图可看出, 对  $\text{TM}_{010}$  模而言: 腔半径  $a$  增加时,  $0$  模频率下降较快,  $\pi/3$  模频率下降较慢, 但  $2\pi/3$  模频率上升; 栅网半径  $b$  增加时, 3 个模式的频率均下降,  $0$  模,  $\pi/3$  模下降较快 (当  $b$  趋于  $a$  时, 三腔分离腔就几乎成为 3 个互不耦合的孤立圆柱腔,  $0$  模频率就趋于圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的频率),  $2\pi/3$  模下降最快; 两栅网之间的间隙距离  $g$  增加时,  $0$  模频率保持不变 (其物理解释是  $0$  模与圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模性质相同, 而圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的频率与谐振腔的长度无关),  $\pi/3$  模和  $2\pi/3$  模的频率均下降, 下降速度随  $g$  的增大而变慢; 栅网厚度  $t$  增加时, 3 个模式的频率均略有下降, 下降速度差不多。

此外, 我们还注意到三腔分离腔  $\text{TM}_{010}$  模下  $0$  模的频率略高于相同半径的圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的频率, 但  $\text{TM}_{010}$  模下  $\pi/3$  模的频率却比圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的频率大约高了一倍, 这可能是腔间耦合引起的。

## 6 结 束 语

本文在引入慢波驻波的基础上, 用场论的方法推导出了三腔分离腔振荡器  $\text{TM}$  模色散关系。利用色散关系, 求得的谐振频率与实验中测得的微波频率一致, 并详细分析了三腔分离腔几何结构参数对谐振频率的影响, 这为三腔分离腔结构的设计提供了理论依据。

## 参 考 文 献

- [1] B. M. Marder *et al.*, IEEE Trans. on Plasma Sci. 1992, PS-20(3), 312-331.
- [2] R. W. Lemke, J. Appl. Phys., 1992, 72(9), 4422-4428.
- [3] D. A. Watkins, Topics in Electromagnetic Theory, New York, Wiley, 1958, 1-10.
- [4] 张克潜, 李德杰, 微波与光电子学中的电磁理论, 北京, 电子工业出版社, 1994, 259-260.
- [5] 刘盛纲, 微波电子学导论, 北京, 国防工业出版社, 1985, 672.
- [6] 范植开, 波导管振荡器的理论研究与原理性实验 [博士学位论文], 北京, 中国工程物理研究院北京研究生部, 1990, 62.
- [7] 陈森玉, 高能物理与核物理, 1982, 6(5), 546-554.
- [8] 范植开, 刘庆想, 物理学报, 2000, 49(7), 1249-1255.

THE EFFECT OF THE DIMENSIONS OF SPLIT CAVITY WITH  
THREE CAVITIES ON ITS RESONANT FREQUENCY

Fan Zhikai    Liu Qingxiang

*(Inst. of Applied Electronics, China Academy of Eng. Physics, Chengdu 621900, China)*

**Abstract** Starting from homogeneous scalar Helmholtz's equations associated with Borgnis potential function in a cylindrical coordinate system, and based on the standing wave concept of slow-wave introduced in the paper, the analytic expressions of the dispersion relation for azimuthally symmetric transverse magnetic modes in the split cavity with three cavities are derived. by using boundary conditions for Borgnis potential function in conjunction with field matching conditions at the common interface between the adjacent subregions. Besides, the effect of the high frequency structure dimensions of split cavity with three cavities on its resonant frequency is analyzed in detail.

**Key words** Split cavity, Dispersion relation, Resonant frequency

范植开: 男, 1965年生, 博士, 从事高功率微波产生及束波相互作用机理的理论研究, 现为中国工程物理研究院应用电子学研究所高功率微波技术研究室副主任, 已在国内外重要期刊发表学术论文十余篇, 2000年获中国科学技术发展基金会颁发的于敏数理科学奖。

刘庆想: 男, 1964年生, 博士, 现为中国工程物理研究院应用电子学研究所副总工程师, 研究员, 曾获国防科工委科技进步二等奖二项、邓稼先青年科技奖1项, 已在国内外重要期刊发表学术论文二十余篇。