第14卷 第3期 电子科学学刊 Vol. 14, No. 3
1992年5月 JOURNAL OF ELECTRONICS May, 1992

方位谱估计投影法的改进

张 铭 吴士达
(南京航空学院,南京 210016) (成都气象学院,成都 610041)

摘要 本文提出了一种新的阵处理方法，此法无需进行特征值分解（EVD）和多维最优化处理. 因此它计算简单、易于实时处理，而且适合于相干源存在的情况. 文中将新方法与PROJ（1991）和 Yeh（1987）两种方法作了比较;还给出了模拟结果.

关键词 信号处理;阵处理;谱估计

一、引 言

在阵处理中,快摄数（snapshot）越多会带来越复杂的数据采集、存贮和计算. 在高实时性的应用中,希望将单次快摄情况与计算简单的算法配合应用.

近十多年,基于特征值分解（EVD）的空间谱估计方法在文献中有广泛的讨论,其中著名的有 MUSIC 方法[1]、最小范数法[2]、空间平滑 MUSIC 法[3]、改进的空间平滑 MUSIC 法[4]、修改的前后向线性预测法[5]以及信号增强法[6]等. 这些方法都能得到很好的结果，但是为得到特征值分解需要大量的计算. 为了避免此大量的计算，Yeh 提出了一种计算简单的投影矩阵方法[7,8],对很多次快摄,它能给出好的结果，然而对单次快摄而言，此法的性能会大大变差. 为了改进 Yeh 方法的性能,我们在文献[9]中提出了一种适合于单次快摄的改进方法简称为 PROJ 法. 文献 [9] 中显示出它能提供比 Yeh 方法更好的结果.

本文提出一种新的阵处理方法,并分析了它比 PROJ 法具有更高分辨力的原因. 最后给出的模拟结果验证了理论分析.

二、问题的形成和 PROJ 法

考虑一个包含N个相同阵元的均匀线阵,阵元间距为d，设有$M(M<N)$个窄带平面波从方向$\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_M\}$入射到阵列，入射波载波的波长为$\lambda$，则在第$k$个阵元的一次快摄为

$$y(k)=\sum_{m=1}^{M} a_m \exp[j(k-1)\omega(\theta_m)]+w(k), \qquad k=1, \cdots, N \tag{1}$$

其中,a_m为第m个入射波的复振幅,且其幅度为$|a_m|$,相位为ϕ_m;$\omega(\theta_m)=2\pi d \sin\theta_m/\lambda$;

1991.02.11 收到，1991.09.09 定稿.

$\boldsymbol{w}(k)$ 为第 k 个阵元上的加性白噪声。

利用测量值 $y(k)$ 估计源的方向 θ_m 是空间谱估计的目的。PROJ 法[9]描述如下：

定义矢量 $\boldsymbol{h}_l$ 为

$$\boldsymbol{h}_l = [h_{l0}, h_{l1}, \cdots, h_{l(L-1)}]^T,\ l = l_1, \cdots, l_M,\ 当\ m \neq n\ 时,\ l_m \neq l_n\ 且\ 0 \leqslant l \leqslant L-1 \tag{2}$$

此处

$$h_{li} = \sum_{n=L}^{N} [y(n-l)y^*(n-i) + y^*(n-L+l+1)y(n-L+i+1)] \tag{3}$$

L 为一个给定的正整数且 $1 \leqslant L \leqslant N$，$*$ 表示共轭。

文献[9]中指出，当 $L \geqslant M$ 且 $N-L+1 \geqslant M$ 时，矢量 $\boldsymbol{h}_l(l = l_1, \cdots, l_M)$ 是线性独立的并且在无噪声的情况下，此 M 个矢量张成信号子空间。对 M 个矢量 $\boldsymbol{h}_l(l = l_1, \cdots, l_M)$ 进行 Gram-Schmit 正交化处理，可以得到 M 个单位正交矢量 $\boldsymbol{q}_i(i = 1, \cdots, M)$（即信号子空间中的一组基）。因此可以构造投影矩阵如下：

$$P = I - QQ^H \tag{4}$$

其中 $Q = [\boldsymbol{q}_1 | \cdots | \boldsymbol{q}_M]$，$H$ 表示共轭转置。

由于无噪声时，$P\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{0}$，故可以进行谱估计如下：

$$H_P(\theta) = 1/[(P\boldsymbol{s})^H(P\boldsymbol{s})] \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{s} = [1,\ \exp(j\omega(\theta)),\ \cdots,\ \exp(j\omega(\theta)(L-1))]^T$，$\omega(\theta) = 2\pi d \sin\theta/\lambda$。

三、改进方法

由于 P 是投影算子并且也是一个正定 Hermite 矩阵，故 P 可分解成两个矩阵的乘积，即

$$P = I - QQ^H = VV^H \tag{6}$$

其中 V 为 $L \times (L-M)$ 矩阵且 $V^H V = I_{(L-M)}$，$I_{(L-M)}$ 为一个 $(L-M) \times (L-M)$ 的单位矩阵，$V \triangleq [\boldsymbol{v}_1 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{v}_{(L-M)}]$。

因为已知矢量 $\boldsymbol{q}_i(i = 1, \cdots, M)$ 属于信号子空间，因此矢量 $\boldsymbol{v}_i(i = 1, \cdots, L-M)$ 属于噪声子空间。任一个为矢量 $\boldsymbol{v}_i(i = 1, \cdots, L-M)$ 线性组合的矢量 $\boldsymbol{v}$ 都属于噪声子空间。因此在无噪声的情况下，我们有

$$\boldsymbol{v}^H \boldsymbol{s}_i = 0, \qquad i = 1, \cdots, M \tag{7}$$

此性质可用来估计空间谱。然而线性组合的任意性使得这个问题缺少唯一解。为得到唯一解，令

$$\boldsymbol{v} = V\boldsymbol{c} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{c} = [c_1, \cdots, c_{(L-M)}]^T$，$c_i(i = 1, \cdots, L-M)$ 为一组不全为零的常数。

我们寻求如下问题的解：

$$\min \|\boldsymbol{v}\|$$

且

$$\boldsymbol{v}^H \boldsymbol{e}_1 = 1 \tag{9}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclide 范数，$\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$.

进一步有

$$\min\|V\boldsymbol{c}\|$$

且

$$\boldsymbol{c}^H V^H \boldsymbol{e}_1 = 1 \tag{10}$$

由 Lagrange 乘子法可得

$$f(\boldsymbol{c}, \varepsilon) = \boldsymbol{c}^H V^H V \boldsymbol{c} - 2\varepsilon(\boldsymbol{c}^H V^H \boldsymbol{e}_1 - 1) \tag{11}$$

考虑 $V^H V = I_{(L-M)}$，有

$$f(\boldsymbol{c}, \varepsilon) = \boldsymbol{c}^H \boldsymbol{c} - 2\varepsilon(\boldsymbol{c}^H V^H \boldsymbol{e}_1 - 1) \tag{12}$$

于是得(12)式的平稳点的条件为

$$\boldsymbol{c} = \varepsilon V^H \boldsymbol{e}_1 \tag{13}$$

将(10)式代入(13)式有

$$\varepsilon = 1/(\boldsymbol{e}_1^T V V^H \boldsymbol{e}_1) \tag{14}$$

于是得

$$\boldsymbol{c} = (V^H \boldsymbol{e}_1)/(\boldsymbol{e}_1^T V V^H \boldsymbol{e}_1) \tag{15}$$

因此此时矢量 $\boldsymbol{v}$（记为 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{op}}$）为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{op}} = (V V^H \boldsymbol{e}_1)/(\boldsymbol{e}_1^T V V^H \boldsymbol{e}_1) = (P\boldsymbol{e}_1)/(\boldsymbol{e}_1^T P \boldsymbol{e}_1) \tag{16}$$

于是空间谱估计为

$$H_v(\theta) = 1/|\boldsymbol{s}^H \boldsymbol{v}_{\mathrm{op}}|^2 \tag{17}$$

从以上的讨论可以看出新的矢量法与 PROJ 法具有相同的解相干性，因此当 $L \geqslant M$，且 $N - L + 1 \geqslant M$ 时，新的矢量法独立于信号源间的相干性。

以上主要是就单次快摄情况讨论的，对于多次快摄的情况，可以计算 h_{li} 如下：

$$h_{li} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{n=L}^{N} [y_t(n-l) y_t^*(n-i) + y_t^*(n-L+l+1) y_t(n-L+i+1)] \tag{18}$$

其中 $y_t(k)$ 表示第 k 个阵元的第 t 次快摄，T 表示快摄数。其它的计算过程与以上相同。

四、改进的方法与 PROJ 法的关系

从(5)式有

$$H_P^{-1}(\theta) = (P\boldsymbol{s})^H (P\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}^H P^H P \boldsymbol{s} \tag{19}$$

由于 P 是一个 Hermite 矩阵，而且是一个投影算子，所以有

$$H_P^{-1}(\theta) = \boldsymbol{s}^H P \boldsymbol{s} \tag{20}$$

由于 P 是正定 Hermite 矩阵，故由 Cholesky 分解可知

$$P = U U^H \tag{21}$$

其中 U 为下三角矩阵，即 $U = [\boldsymbol{u}_1 | \cdots | \boldsymbol{u}_L]$，矢量 $\boldsymbol{u}_i = [\underbrace{0, \cdots, 0}_{(i-1)\text{ 个}}, \boldsymbol{u}_i'^T]^T$. 展开(21)式

有

$$P = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^H \tag{22}$$

由(16)式有

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{op}} = u_{11}^* \boldsymbol{u}_1 / |u_{11}|^2 \tag{23}$$

因此考虑(17),(20)和(22)式可得

$$H_P^{-1}(\theta) = H_v^{-1}(\theta) \cdot |u_{11}|^2 + \sum_{i=2}^{L} H_i^{-1}(\theta) \cdot |u_{ii}|^2 \tag{24}$$

其中 $H_i^{-1}(\theta) = |\boldsymbol{s}^H \boldsymbol{u}_i|^2 / |u_{ii}|^2$.

考虑 $\boldsymbol{u}_i$ 的特性有

$$\boldsymbol{s}^H \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{s}_{(i)}^H \boldsymbol{u}_i \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{s}_{(i)}^H = [1, \exp(j\omega(\theta)), \cdots, \exp(j(L-i)\omega(\theta))]^T$.

当无噪声时有

$$\boldsymbol{s}_{(i)}^H \boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{s}^H \boldsymbol{u}_i = 0 \tag{26}$$

因此,$\boldsymbol{u}_i$ 是 $(L-i+1)$ 维噪声子空间中的矢量,因而 $H_i(\theta)$ 是 $(L-i+1)$ 阶空间谱估计.(24)式表明L阶 PROJ 法的谱估计是L阶改进方法的谱与各个低阶谱估计的加权之和,因此改进方法比 PROJ 法具有更高的分辨力.同时(24)式也表明改进方法的谱估计比 PROJ 法有更大的波动.从下节模拟可以看出,PROJ 法的图中除波峰之外几乎处处平直,而改进方法会出现波动.

关于运算量,特征值分解 (EVD) 计算需要 $O(L^3)$ 次乘法[10],而 Gram-Schmit 正交化计算只需 $O(LM^2)$ 次乘法[11].一般地,$M \ll L$,所以前者所需的运算量远大于后者.因此本文方法的运算量比基于 EVD 的方法小得多.

五、模 拟 结 果

以(1)式作为模拟模型,$N=17$ (17个阵元),$d=\lambda/2$,两个源位于 $\theta_1=30°$ 和 $\theta_2=34°$ ($\Delta\theta \approx 0.56$ 个标准波宽),SNR = 17dB,只有一次快摄可以利用,信号的复振幅为 $a_1=1$,$a_2=\exp(j\phi)$,$\phi=45°$.

图1显示出 Yeh 方法的结果,只有一个峰可见.图2和图3分别显示了 PROJ[9] 和本文的改进方法的结果(此时 $L=14$).可以看到,两图中均有两个峰而且图3中的结

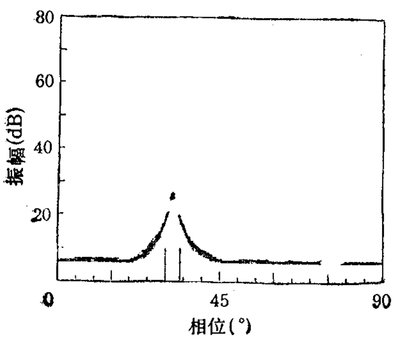

图1 Yeh 方法

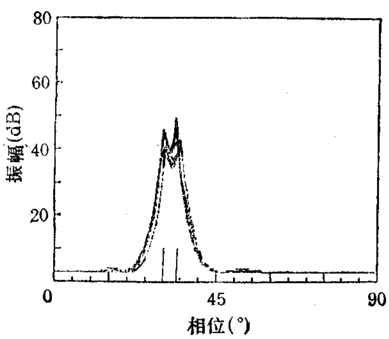

图2 PROJ 法

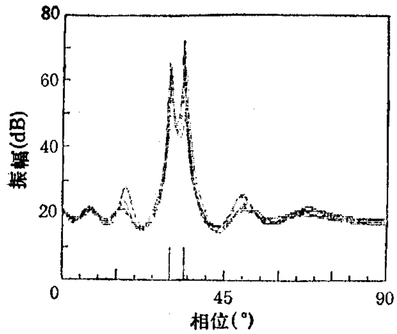

图 3　本文方法

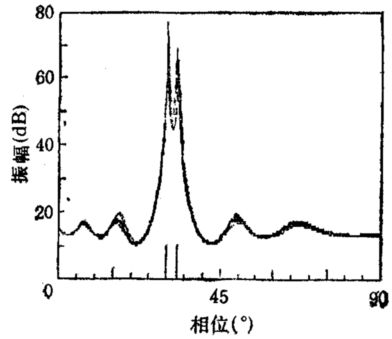

图 4　本文方法 ($T = 15$)

果明显地比图 2 中的好．图 4 中，快摄数 $T = 15$，SNR $= 15$dB（比以上图中低 2dB），$\theta_1 = 30°$ 和 $\theta_2 = 33°$ （$\Delta\theta \approx 3°$ 比以上图中小 1°），其它条件均同上． 图 4 显示出本文方法的结果．该图表明新方法可得到很好的结果．由此可见，对多次快摄的情况能得到比单次快摄更好的结果．

六、结　　论

本文提出了一种新的阵处理法，此法适用于相干源存在和单次快摄的情况．此法不需要 EVD，所以计算简单，且便于实时处理．文中给出了本文新方法与 PROJ 法的谱之间的解析关系式，从而证明新方法比 PROJ 法有更高的分辨力．计算机模拟结果验证了新方法的分辨力比 Yeh 方法和 PROJ 法的分辨力更高．

参　考　文　献

[1] R. O. Schmidt, *IEEE Trans. on AP*, **AP-34**(1986)3, 276—280.
[2] R. Kumaresan, D. W. Tufts, *IEEE Trans. on AES*, **AES-19**(1983)1, 134—139.
[3] T.-J. Shan et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33**(1985)8, 806—811.
[4] R. T. Williams et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-36**(1988)4, 425—432.
[5] D. W. Tufts, R. Kumaresan, *Proc. IEEE*, 70(1982)9, 975—989.
[6] J. A. Cadzow, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-36**(1988)1, 49—62.
[7] C. C. Yeh, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-34**(1986)6, 1347—1349.
[8] C. C. Yeh, *IEE Proc.-F*, **134**(1987)2, 146—150.
[9] M. Zhang et al., *IEE Proc.-F*, **138**(1991)5, 407—410.
[10] I. Karasalo, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-34**(1986)1, 8—12.
[11] E. K. L. Hung R. M. Turner, *IEEE Trans. on AES*, **AES-19**(1983)4, 598—607.

IMPROVEMENT OF PROJECTION APPROACH TO BEARING ESTIMATIONS

Zhang Ming　　Wu Shida

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing* 210016)　(*Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu* 610041)

Abstract　A new array processing method is presented. The method is computationally simple and beneficial to real-time processing, because it dose not require eigenvalue decomposition (EVD) and multi-dimensional optimizing processing. The method is also suitable for the coherent case. It is compared with PROJ method and Yeh's method (1987). Simulation results are given.

Key words　Signal processing; Array processing; Spectral estimation