

形态滤波器结构元的自适应优化算法¹

赵春晖 孙 锐 孙圣和*

(哈尔滨工程大学电子工程系 哈尔滨 150001)

*(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系 哈尔滨 150001)

摘 要 该文提出了一种实现形态滤波器结构元优化设计的自适应算法, 自适应过程类似于经典的最小均方 (LMS) 算法。通过将腐蚀与膨胀运算用隐函数表示, 推导出腐蚀与膨胀运算中结构元的优化公式, 由此进一步可得到任意组合形态滤波器的自适应优化公式。仿真实验表明该算法改善了形态滤波器的性能, 具有设计简便、实用性强的特点。

关键词 形态滤波器, 结构元, 自适应算法, 图像处理

中图分类号 TN911.72

1 引 言

在计算机视觉和图像处理领域, 图像恢复一直是最重要、最经典的研究课题之一。传统的线性滤波器在滤除噪声的同时, 往往会严重模糊图像的细节 (如边缘、轮廓等); 而非线性滤波器在一定程度上克服了这一缺点。形态滤波器是近年来出现的一类重要的非线性滤波器, 它们通过选择较小的图像特征集合 (通常称之为“结构元”, Structuring element) 与被处理图像相互作用来实现滤波过程的。根据不同的目的可选择不同类型、大小和形状的结构元进行相应的形态变换, 4 种基本的形态变换是腐蚀 (erosion)、膨胀 (dilation)、开 (opening) 和闭 (closing)^[1]。

现有的许多形态滤波算法中, 结构元往往事先人为确定, 这类滤波器仅在所对应的某类图像模型中具有较好的性能^[2]。然而, 通常情况下图像信号极为复杂且处于不断变化之中, 这就要求选用的结构元应具有自适应的能力以实现最优化处理。在形态滤波器的设计过程中, 一旦选定了相应的形态变换, 则结构元的选择便成为设计中的关键, 因此, 可以说结构元决定了形态滤波器的性能^[3]。现阶段如何自适应的优化确定结构元已成为形态滤波器领域的一个研究热点与难点。

近几年, 国内外不少学者进行了这方面的研究与探索, 其中 A. Morales 研究了线性结构元的优化问题^[4]; Q. Wang 实现了结构元灰度值的自适应处理^[5]; P. Kraft 采用并行遗传算法进行了形态滤波器结构元的优化设计^[6]。这些方法都存在计算复杂, 缺乏通用性的缺点。本文仿照经典的最小均方 (LMS) 算法提出了一种形态滤波器结构元的自适应优化算法, 它可以分别优化灰度结构元和平面结构元。几乎所有的形态滤波器都是由膨胀与腐蚀两种基本运算的组合构成, 所以我们首先推导出膨胀与腐蚀的自适应算法, 并由此可推出任意组合形态滤波器结构元的自适应优化算法, 如开、闭、闭-开、开-闭滤波器等。

2 误差准则

本文采用最小均方误差 (MSE) 准则和最小平均绝对误差 (MAE) 准则来进行滤波器的参数优化。

¹ 2000-08-04 收到, 2000-12-04 定稿

国家自然科学基金资助项目 (编号: G9802005 和 60172038), 教育部优秀青年教师资助计划项目和高等学校全国优秀博士学位论文作者专项资金资助 (200037)

设 x_i 为输入信号, d_i 为期望信号, F 为滤波器, $\{m_j\}$ 为滤波器参数的集合。则滤波器的输出信号为

$$y_i = F(x_i, m_j) \quad (1)$$

优化算法的目标是求使代价函数 C 最小的参数集合 $\{m_j\}$, 均方误差和平均绝对误差分别为

$$C_{\text{MSE}} = E[(d_i - y_i)^2] \quad (2)$$

$$C_{\text{MAE}} = E[|d_i - y_i|] = E[\text{sgn}(d_i - y_i)(d_i - y_i)] \quad (3)$$

其中 C_{MSE} 表示均方误差, C_{MAE} 表示平均绝对误差, sgn 表示符号函数。

对 C_{MSE} 和 C_{MAE} 求导得 (不考虑数学期望)

$$\partial C_{\text{MSE}} / \partial m_k = -2(d_i - y_i) \partial y_i / \partial m_k \quad (4)$$

$$\partial C_{\text{MAE}} / \partial m_k = (d_i - y_i) \partial \text{sgn}(d_i - y_i) / \partial m_k - \text{sgn}(d_i - y_i) \partial y_i / \partial m_k \quad (5)$$

由于一般 y_i 含有噪声, 总与 d_i 不同, 所以 (5) 式可简化为

$$\partial C_{\text{MAE}} / \partial m_k = -\text{sgn}(d_i - y_i) \partial y_i / \partial m_k \quad (6)$$

3 形态滤波器

腐蚀与膨胀运算的组合可以构成大多数的形态滤波器。离散形式的膨胀与腐蚀运算实际是在结构元内取最大值与最小值, 于是腐蚀与膨胀运算可定义为

$$E(x_i) = \min\{x_{i+j} - m_j, j \in M\} \quad (7)$$

$$D(x_i) = \max\{x_{i-j} + m_j, j \in M\} \quad (8)$$

这里 $E(x_i)$ 为腐蚀运算, $D(x_i)$ 为膨胀运算, x_i 是属于多维空间 Z 的离散信号, M 为包含 N 点的多维离散结构元。当 M 为灰度结构元时, m_j 为离散值。当 M 为平面结构元时, m_j 为 $\{0, -\infty\}$ 。(m_j 为 $-\infty$ 时, 此点不属于结构元, m_j 为 0 时, 此点属于结构元。)

从第 2 节中可知优化过程需要用到滤波器输出的导数, 但根据以上定义不能求出对 m_j 的偏导, 下面我们给出一种解析方法来表示灰度膨胀与腐蚀运算。在腐蚀运算中, y_i 为集合 $\{x_{i+j} - m_j\}$ 中的最小值, 所以 $(x_{i+j} - m_j - y_i) \geq 0$ 。在灰度结构元的情况下, 腐蚀运算的隐函数表示为

$$f_E(x_{i+j}, y_i, m_j) = \sum_{j \in M} \text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i) [\text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i) - 1] = 0 \quad (9)$$

假设在运算中, 仅存在一点使 $y_i = x_{i+j} - m_j$, 这意味着输出值仅取自单一位置, 这一假设在随机噪声存在的情况下一般是正确的。简化 (9) 式为

$$f_E(x_{i+j}, y_i, m_j) = \sum_{j \in M} [\text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i) - 1] + 1 = 0 \quad (10)$$

同理, 膨胀运算的隐函数表示为

$$f_D(x_{i-j}, y_i, m_j) = \sum_{j \in M} [\text{sgn}(x_{i-j} + m_j - y_i) + 1] - 1 = 0 \quad (11)$$

以上两个隐函数表示用符号函数代替最大最小运算, 使推导优化算法成为可能. 在平面结构元的情况下, m_j 非离散值, 它不适合应用于模拟 LMS 的递推算法中, 故此在这里需要引入新的参数集合 $\{n_j\}_{j \in M}$ 来代替 m_j . 且有如下规定: 如果 $m_j = -\infty$ 则 $n_j < 0$; 如果 $m_j = 0$ 则 $n_j \geq 0, \forall j \in M$.

同时可知: 如果 $m_j = -\infty$, 则 $\text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i) = 1, \text{sgn}(x_{i-j} + m_j - y_i) = -1$; 如果 $m_j = 0$, 则 $\text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i) = \text{sgn}(x_{i+j} - y_i), \text{sgn}(x_{i-j} + m_j - y_i) = \text{sgn}(x_{i-j} - y_i), \forall j \in M$.

根据以上所述, 由 (10) 式和 (11) 式可得平面结构元情况下的隐函数表示

$$f_{FE}(x_{i+j}, y_i, m_j) = \sum_{j \in M} \left[\frac{\text{sgn}(n_j) + 1}{2} \right] [\text{sgn}(x_{i+j} - y_i) - 1] + 1 = 0 \quad (12)$$

$$f_{FD}(x_{i-j}, y_i, m_j) = \sum_{j \in M} \left[\frac{\text{sgn}(n_j) + 1}{2} \right] [\text{sgn}(x_{i-j} - y_i) + 1] - 1 = 0 \quad (13)$$

4 腐蚀与膨胀的自适应算法

4.1 灰度结构元下腐蚀与膨胀的自适应算法

仿照 LMS 算法, 参数的递推公式在 MSE 准则和 MAE 准则下分别为

$$m'_k = m_k + 2\mu(d_i - y_i)\partial y_i / \partial m_k \quad (14)$$

$$m'_k = m_k + 2\mu \text{sgn}(d_i - y_i)\partial y_i / \partial m_k \quad (15)$$

其中 m_k 为当前值, m'_k 为下一个估计值, μ 为收敛参数.

为求得灰度结构元下腐蚀运算中参数的递推公式, 对 (10) 式求导得

$$df_E(x_{i+j}, y_i, m_j) / dm_k = \partial f_E / \partial m_k + (\partial f_E / \partial y_i)(\partial y_i / \partial m_k) = 0 \quad (16)$$

即

$$\frac{\partial y_i}{\partial m_k} = -\frac{\partial f_E}{\partial m_k} / \frac{\partial f_E}{\partial y_i} \quad (17)$$

由 (10) 式得

$$\frac{\partial f_E}{\partial m_k} = \frac{\partial \text{sgn}(x_{i+k} - m_k - y_i)}{\partial m_k} = -2\delta(x_{i+k} - m_k - y_i) \quad (18)$$

$$\frac{\partial f_E}{\partial y_i} = \sum_{j \in M} \frac{\partial \text{sgn}(x_{i+j} - m_j - y_i)}{\partial y_i} = -2 \sum_{j \in M} \delta(x_{i+j} - m_j - y_i) \quad (19)$$

根据假设在运算中仅存在一点使 $y_i = x_{i+j} - m_j$, (19) 式简化为

$$\partial f_E / \partial y_i = -2 \quad (20)$$

组合 (17), (18) 和 (20) 式得

$$\partial y_i / \partial m_k = -\delta(x_{i+k} - m_k - y_i) \quad (21)$$

(21) 式更直观的表达方法为

$$\begin{aligned} \text{如果 } y_i \neq x_{i+k} - m_k, \text{ 则 } \partial y_i / \partial m_k &= 0; \\ \text{如果 } y_i = x_{i+k} - m_k, \text{ 则 } \partial y_i / \partial m_k &= -1. \end{aligned}$$

同理, 膨胀时为

$$\begin{aligned} \text{如果 } y_i \neq x_{i-k} + m_k, \text{ 则 } \partial y_i / \partial m_k &= 0; \\ \text{如果 } y_i = x_{i-k} + m_k, \text{ 则 } \partial y_i / \partial m_k &= 1. \end{aligned}$$

若用符号函数代替函数可得到公式的另一种表示方法为

$$\text{腐蚀: } \partial y_i / \partial m_k = \text{sgn}(x_{i+k} - m_k - y_i) - 1 \quad (22)$$

$$\text{膨胀: } \partial y_i / \partial m_k = \text{sgn}(x_{i-k} + m_k - y_i) + 1 \quad (23)$$

4.2 平面结构元下腐蚀与膨胀的自适应算法

在平面结构元的情况下, 类似于上一小节的推导过程, 由 (12) 式得

$$\partial f_{FE} / \partial n_k = (1/2)(\partial \text{sgn}(n_k) / \partial n_k)[\text{sgn}(x_{i+k} - y_i) - 1] = \delta(n_k)[\text{sgn}(x_{i+k} - y_i) - 1] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{FE}}{\partial y_i} &= \sum_{j \in M} [(\text{sgn}(n_j) + 1)/2] \partial \text{sgn}(x_{i+j} - y_i) / \partial y_i \\ &= -2 \sum_{j \in M} [(\text{sgn}(n_j) + 1)/2] \delta(x_{i+j} - y_i) \end{aligned} \quad (25)$$

根据假设在运算中仅存在一点使 $y_i = x_{i+j}$, 且 $n_j > 0$, (25) 式简化为

$$\partial f_{FE} / \partial y_i = -2 \quad (26)$$

组合 (17)、(24) 和 (26) 式得

$$\partial y_i / \partial n_k = (1/2)\delta(n_k)[\text{sgn}(x_{i+k} - y_i) - 1] \quad (27)$$

$\delta(n_k)$ 在 n_k 等于 0 时为 1, 不等于 0 时为 0. 在实际情况中作如下近似, 当 $n_k \in [-\beta, \beta]$ 时, $\delta(n_k) = 1$ 否则 $\delta(n_k) = 0$. β 值的大小与收敛参数 μ 有关. 根据以上说明给出平面结构元的情况下求导公式: 若 $n_k \in [-\beta, \beta]$,

$$\text{腐蚀: } \partial y_i / \partial n_k = (1/2)[\text{sgn}(x_{i+k} - y_i) - 1] \quad (28)$$

$$\text{膨胀: } \partial y_i / \partial n_k = (1/2)[\text{sgn}(x_{i-k} - y_i) + 1] \quad (29)$$

5 任意组合形态滤波器的自适应算法

由上节推导的膨胀与腐蚀的自适应算法, 可以得出由它们任意组合而成的形态滤波器的自适应算法. 假设任一滤波器 F 由 S 个基本运算 (膨胀与腐蚀) 组合而成, 第 p 次运算用 F_{p, ε_p} 来表示, p 表示运算的位置, ε_p 表示运算的种类, $\varepsilon_p = 1$ 时为腐蚀运算, $\varepsilon_p = -1$ 时为膨胀运算, 因此滤波器 F 为

$$y_i = F(x_i) = F_{S, \varepsilon_S}(F_{S-1, \varepsilon_{S-1}}(\cdots F_{p, \varepsilon_p}(\cdots F_{1, \varepsilon_1}(x_i)))) \quad (30)$$

让 x_i^p 表示第 p 次运算的输出:

$$x_i^p = F_{p,\varepsilon_p}(\cdots F_{1,\varepsilon_1}(x_i)) \quad (31)$$

我们知道在膨胀与腐蚀运算中, 输出值 y_i 是由在结构元中的一个输入值决定的, 即 y_i 来自 $S-1$ 层的点 $i + \Delta_{S-1}$, 由此类推, y_i 来自 $S-2$ 层的点 $i + \Delta_{S-2}$, 来自 p 层的点 $i + \Delta_p$, 用公式表示为

$$\text{对于灰度结构元: } x_{i+\Delta_p}^p - \varepsilon_p m_{\alpha}(\Delta_p) = y_i \quad (32)$$

$$\text{对于平面结构元: } x_{i+\Delta_p}^p = y_i \quad (33)$$

$m_{\alpha}(\Delta_p)$ 为 p 层时在灰度结构元 Δ_p 点的值, $\Delta_S = 0$ 。

根据以上的表述, 可推得任意组合构成的形态滤波器的输出 y_i 的梯度, 在灰度结构元情况下为

$$\frac{\partial y_i}{\partial n_k} = \sum_{p=1}^S [\text{sgn}(x_{i+\Delta_p+\varepsilon_p k}^p - \varepsilon_p m_k - x_{i+\Delta_p}^p) - \varepsilon_p] \quad (34)$$

在平面结构元情况下为

$$\frac{\partial y_i}{\partial n_k} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^S [\text{sgn}(x_{i+\Delta_p+\varepsilon_p k}^{p-1} - x_{i+\Delta_p}^p) - \varepsilon_p] \quad n_k \in [-\beta, \beta] \quad (35)$$

以上两公式可用数学归纳法证明 (这里从略)。将 (34) 或 (35) 式代入 (14) 或 (15) 式即可进行自适应优化。

6 仿真实验

为验证算法的有效性, 本节对噪声图像进行滤波测试。图 1 为原始的云图 ($256 \times 256 \times 8\text{bit}$), 图 2 为加 15% 的正负脉冲噪声后的图像, 图 3 为具有 3×3 结构元的标准开-闭滤波器的滤波图像, 图 4 为具有 3×3 结构元的标准闭-开滤波器的滤波图像, 图 5 为在 MSE 准则下优化后的具有灰度结构元的闭-开滤波器的滤波图像, 图 6 为在 MAE 准则下优化后的具有灰度结构元的闭-开滤波器的滤波图像, 图 7 为在 MSE 准则下优化后的具有平面结构元的闭-开滤波器的滤波图像, 图 8 为在 MAE 准则下优化后的具有平面结构元的闭-开滤波器的滤波图像, 收敛参数为 1×10^{-6} 。表 1 给出了上述各种滤波器输出的 MSE 和 MAE 值。

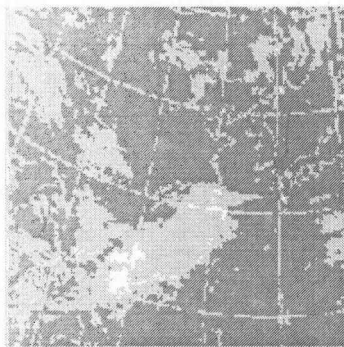


图 1 原始图像

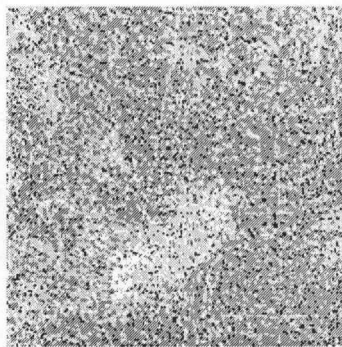


图 2 加噪图像

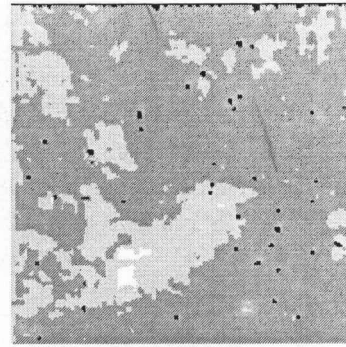


图 3 滤波图像

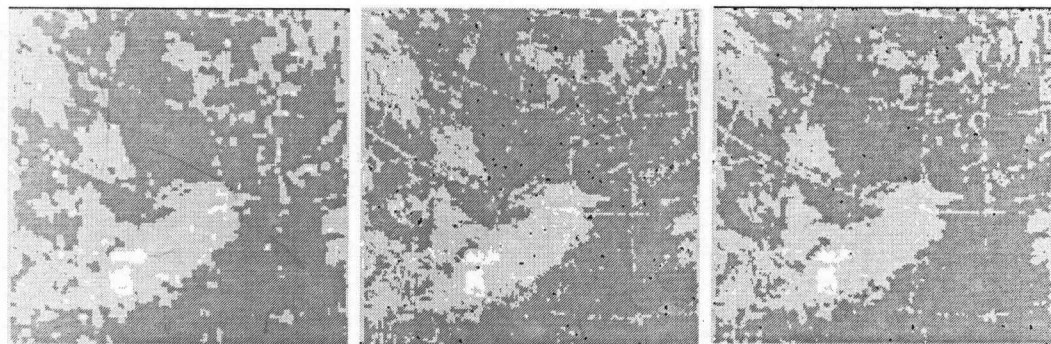


图 4 滤波图像

图 5 滤波图像

图 6 滤波图像

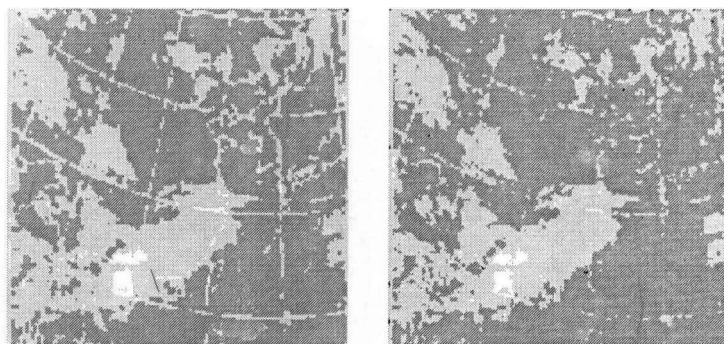


图 7 滤波图像

图 8 滤波图像

表 1 各滤波器输出的 MSE 和 MAE

滤波方法	MSE	MAE
开-闭滤波器	578.25	11.73
闭-开滤波器	356.30	7.34
MSE 准则优化后闭-开滤波器 (灰度结构元)	167.55	3.53
MAE 准则优化后闭-开滤波器 (灰度结构元)	175.34	3.41
MSE 准则优化后闭-开滤波器 (平面结构元)	135.78	3.48
MAE 准则优化后闭-开滤波器 (平面结构元)	144.78	3.34

7 结 论

本文仿照传统的 LMS 算法推导出形态滤波器结构元的自适应优化算法,从仿真实验中可以看出滤波的效果比未经优化的滤波器有较大改善。本文算法适应各种类型的图像,具有较好的稳健性。但需要指出这种算法搜索的范围有限,不一定能得到整体最优解。总的来说,这种把形态滤波器表示成解析式后再推导优化算法的方法不失为优化形态滤波器的有效方法,它具有通用性,适于多种形态滤波器的优化设计,而且速度快,便于实时实现,

参 考 文 献

- [1] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1988, 10-48.
- [2] 崔屹, 图象处理与分析——数学形态学方法与应用, 北京, 科学出版社, 2000, 1-50.

- [3] P. Maragos, *et al.*, Morphological filters-Part 1, Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters, *IEEE Trans. on ASSP*, 1987, ASSP-35(8), 1153-1169.
- [4] A. Morales, Adaptive structuring element for noise and artifact removal, *Proc. of the 23rd Annual Conference on Information Sciences and Systems*, Maryland, 1989, 211-216.
- [5] Q. Wang, Y. Neuvo, Adaptation of grayscale morphological filters, *SPIE.*, Vol.1902, *Nonlinear Image Processing IV*, 1995, 2-7.
- [6] P. Kraft, *et al.*, Parallel genetic algorithms in the optimization of morphological filters, A general design tool, *Journal of Electronic Imaging*, 1997, 6(4), 504-516.
- [7] B. Widrow, S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc. 1985, 45-105.
- [8] 赵春晖, 数字形态滤波器理论及其算法研究, [博士论文], 哈尔滨, 哈尔滨工业大学, 1998.
- [9] 孙锐, 数字形态滤波器的优化算法及其实现的研究, [硕士论文], 哈尔滨, 哈尔滨工程大学, 2000.

STRUCTURING ELEMENT ADAPTIVE OPTIMIZATION ALGORITHM OF MORPHOLOGICAL FILTERS

Zhao Chunhui Sun Rui Sun Shenghe*

(*Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

*(*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

Abstract This paper presents an adaptive algorithm to design optimal structuring element of morphological filters. The adaptation process is similar to the classical Least Mean Square (LMS) algorithm. At first, the optimization formulas of the structuring element are derived in the case of erosion and dilation. Then, adaptation formulas for an arbitrary composition of erosions and dilations are obtained. The simulation experimental results show that the method improves the performances of morphological filters and has properties of easy design and good practicability.

Key words Morphological filters, Structuring elements, Adaptive algorithms, Image processing

赵春晖: 男, 1965 年生, 博士后, 研究领域为数字信号和图像处理、非线性滤波和数学形态学.

孙 锐: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向为图像处理、形态滤波器理论及其算法.

孙孟和: 男, 1943 年生, 教授、博士生导师, 研究领域为信号处理、计算机测试与控制.