

APC 迭代滤波算法与性能分析

施龙飞 王雪松 徐振海 肖顺平
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要 该文推导得到了自适应极化对消器(APC)的迭代滤波公式;分析了该闭环算法的收敛性能,并提出了加快收敛速度的预处理方法;引入了极化增益图的概念,比较了多个极化干扰同时存在情况下,APC与全自适应极化滤波器的性能;最后,仿真实验验证了该算法及文中结论的正确性。

关键词: 信号处理, 自适应极化对消器, 极化增益图

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)09-1560-05

The Iterative-Filtering Scheme and its Performance Analysis of APC

Shi Long-fei Wang Xue-son Xu Zhen-hai Xiao Shun-ping
(School of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract The iterative-filtering formula of APC is derived in this paper. The convergence performances of the closed-loop scheme are analysed, and the preprocess method for enhancing convergence rate is proposed. The concept of polarization gain map is proposed. For the case of more Jammers with different polarizations, the performance of APC and full-adaptive polarization array are analysed and compared. Finally, the simulation on the computer validates the scheme and conclusions in the paper.

Key words Signal process, APC, Polarization gain map

1 引言

自适应对消技术在雷达、通信抗干扰中得到了广泛应用,如自适应旁瓣对消(Sidelobe Canceller, SLC)等。当干扰与期望信号到达方向相同或接近时(如目标携带自卫式干扰的情况),SLC使期望信号也被严重对消,导致算法失效。如果目标与干扰的极化状态不同,且干扰信号为完全极化波或极化状态缓变,则可以采用极化滤波器将干扰滤除,以提高信干比,增大目标检测概率。

极化滤波器实质是利用天线对不同入射波在极化域的选择性来改善有用信号的接收质量^[1]。目前研究较多的自适应极化滤波器是一种开环系统,即先通过两个正交极化天线接收信号估计入射干扰极化状态,然后调整天线接收极化,即两正交接收通道乘以相应的复系数(虚拟极化适配^[2],VPA)以抑制干扰。Gherardelli称之为最佳自适应极化滤波器,该开环系统缺点是结构复杂^[3],性能受极化估计误差的影响很大。

Nathanson在研究雨杂波对消问题时,给出了自适应极化对消器(Adaptive Polarization Canceller, APC)的实现框图^[4],Gherardelli称之为最佳自适应极化滤波器^[3],其实质是利用正交极化通道信号的互相关来计算两通道的加权系数,相比之下这种滤波器虽然有少量的极化对消损失,但系统构

造简单,易于工程实现,且能够自动补偿通道间的幅相不平衡。

然而,受制于低通滤波器较长的响应时间,APC系统收敛速度难以保证,当干扰极化随时间变化较快时,对消性能严重下降^[5]。Giuli和Gherardelli将APC和Poelman的多凹口极化(MLP)滤波器^[6]结合,提出了MLP-APC^[5]和MLP-SAPC^[7],但APC收敛慢的缺陷仍然没有解决。

本文提出一种干扰输出功率按最大梯度方向下降的APC迭代滤波算法,算法收敛速度由干扰功率决定,收敛时间非常短,因而跟踪干扰极化随时间变化的能力大为提高。

2 APC 迭代滤波算法

自适应对消技术要求主通道期望信号功率尽可能大,干扰功率尽可能小,而辅助通道与之相反。

在极化对消器中,上述要求难以满足。因此,极化对消分两步进行:首先只接收干扰信号,进行迭代计算,获得辅助通道最佳权系数;然后用最佳权系数对辅助极化通道加权以对消干扰。显然,这种极化对消器是以干扰输出功率最小为准则的。

下面以输出功率最小为准则,推导APC权系数迭代公式。极化对消器的处理流程如图1所示。

天线1和天线2的极化状态用归一化Jones矢量表示为 \mathbf{h}_1 和 \mathbf{h}_2 ,且互不相同;入射干扰信号极化状态归一化Jones

2004-12-17收到,2005-05-19改回
全国优秀博士论文专项资金(08100101)和国家部级基金(41303517)
资助课题

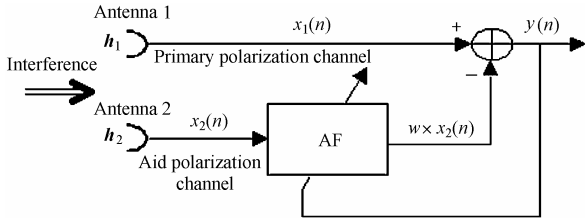


图1 APC 权系数迭代过程

Fig.1 The iterative process of APC weight

矢量为 $\mathbf{h} = \mathbf{h}_j$ ，干扰信号矢量表达式为 $\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{j}(n)$ ，平均功率为 P_j 。主极化通道和辅助极化通道的接收信号分别为

$$x_1(n) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{h} \cdot \mathbf{j}(n) + n_1(n), \quad x_2(n) = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h} \cdot \mathbf{j}(n) + n_2(n) \quad (1)$$

其中 $n_1(n)$ 和 $n_2(n)$ 分别为两极化通道的噪声信号，相互独立且与干扰信号独立，平均功率均为 P_n 。输出信号为

$$y(n) = x_1(n) - w(n)x_2(n) \quad (2)$$

$w(n)$ 是辅助通道权系数。

因为是以干扰输出功率最小为准则，故应使 $\xi = E[y(n)y^*(n)]$ 最小 ($E[\cdot]$ 表示取数学期望，上标“*”表示共轭)。 ξ 是权值 w 的函数，我们的目标是寻求 w 的最佳值 w_{opt} 使 ξ 达到最小： $\xi(w)|_{w=w_{\text{opt}}} = \xi_{\text{min}}$ 。利用“最陡梯度”的思想： ξ 对 w 的梯度记为 $\nabla_w \xi$ ，负梯度方向 $-\nabla_w \xi$ 是 ξ 减小最快的方向，故可采用如下的递推公式：

$$w(n+1) = w(n) - \mu \nabla_w \xi \quad (3)$$

其中 μ 称为步长因子，其大小决定收敛条件及收敛时间。因 $\nabla_w \xi$ 难以得到，故采用梯度估计值 $\hat{\nabla}_w \xi$ 来代替： $\hat{\nabla}_w \xi = \hat{\nabla}_w E[y(n)y^*(n)] = \nabla_w [y(n)y^*(n)]$ 。由输出信号表达式(2)可以得到(复量的导数和梯度定义见附录1说明)： $\nabla_w [y(n)y^*(n)] = -2y(n)x_2^*(n)$ ，带入式(3)，可得最佳权值 w_{opt} 的迭代计算公式为

$$w(n+1) = w(n) + 2\mu y(n)x_2^*(n) \quad (4)$$

满足一定条件时，终止迭代计算，按下式进行极化对消：

$$y'(n) = x_1'(n) - w_{\text{opt}} x_2'(n) \quad (5)$$

式中 $x_1'(n) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_s \cdot s(n) + \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{j}(n) + n_1(n)$ ， $x_2'(n) = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_s \cdot s(n) + \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{j}(n) + n_2(n)$ ，其中 $\mathbf{h}_s \cdot s(n)$ 为期望信号的矢量表示式。

3 算法收敛性能和预处理方法

参考最陡下降法分析该迭代算法的收敛性能。

由式(2)，干扰输出平均功率 ξ 展开为

$$\xi = |w|^2 E[x_2(n)x_2^*(n)] + E[x_1(n)x_1^*(n)] - w^* E[x_1(n)x_2^*(n)] - w E[x_1^*(n)x_2(n)]$$

其对 w 的梯度为(证明见附录1)

$$\nabla_w \xi = 2E[x_2(n)x_2^*(n)]w - 2E[x_1(n)x_2^*(n)] \quad (6)$$

令 $\nabla_w \xi = 0$ 可以得到最佳权系数为：

$$w_{\text{opt}} = \frac{E[x_1(n)x_2^*(n)]}{E[x_2(n)x_2^*(n)]} = \frac{\mathbf{h}_2^H \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{h}_1 P_j}{|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 P_j + P_n}$$
，根据式(3)及式(6)

得最陡下降法的迭代公式为 $w(n+1) = \{1 - 2\mu E[x_2(n)x_2^*(n)]\} w(n) + 2\mu E[x_1(n)x_2^*(n)]$ 。

3.1 收敛条件

令 $v(n) = w(n) - w_{\text{opt}}$ ，上面的迭代公式变为

$$v(n) = \{1 - 2\mu E[x_2(n)x_2^*(n)]\}^n v(0) \quad (7)$$

显然， μ 决定了收敛条件和收敛速度。

根据式(1)，有 $E[x_2(n)x_2^*(n)] = |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 P_j + P_n$ 。由于 $|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 \leq \|\mathbf{h}_2\|^2 \|\mathbf{h}\|^2 = 1$ ，所以根据式(9)得到算法的收敛条件可

以取为 $0 < \mu < \frac{1}{P_j + P_n}$ 。工程实际中，可以通过预估干扰功率，来设定步长因子 μ 。由于在 APC 迭代滤波算法中用梯度估计值 $\hat{\nabla}_w \xi$ 代替梯度 $\nabla_w \xi$ ，并且干扰和噪声的非平稳起伏会造成环路的不稳定，因此步长因子应满足：

$$0 < \mu \ll \frac{1}{P_j + P_n} \quad (8)$$

3.2 收敛速度

通常 μ 取得足够小，因此可以令： $1 - 2\mu E[x_2(n)x_2^*(n)] = \exp(-1/\tau)$ ，于是式(7)可以表示为

$$v(n) = v(0) \exp(-n/\tau) \quad (9)$$

表明 $v(n)$ 近似按指数规律变化，其时间常数为

$$\tau = \frac{-1}{\ln(1 - 2\mu E[x_2(n)x_2^*(n)])} \approx \frac{1}{2\mu E[x_2(n)x_2^*(n)]} = \frac{1}{2\mu (|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 P_j + P_n)} \quad (10)$$

上式“ \approx ”是在 μ 取得足够小的情况下得到的。

\mathbf{h}_2 与 \mathbf{h} 越接近匹配，时间常数越小，算法收敛的越快。当 \mathbf{h}_2 与 \mathbf{h} 完全匹配时 ($|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 = 1$)，时间常数取最小值 $\tau_{\text{min}} = \frac{1}{2\mu(P_j + P_n)}$ ；当 \mathbf{h}_2 与 \mathbf{h} 互为交叉极化时 ($|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 = 0$)，时间常数达到最大值 $\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2\mu P_n}$ 。由于 P_n 一般很小，故 τ_{max} 很大，因此必须避免 \mathbf{h}_2 与 \mathbf{h} 互为交叉极化的情况。

针对这一问题，本文提出一种预处理解决方案：(1) 令两天线极化正交 ($|\mathbf{h}_1^H \mathbf{h}_2|^2 = 0$)，并分别接收，则两个通道的功率相加得到 $P_j + 2P_n$ 的估值，由于 P_n 可以大致估计，且影响较弱，故可通过式(8)确定步长因子；(2) 基于干扰功率远大于噪声功率的一般性假设，认为接收功率大的通道与干扰极化更匹配，因此将其作为辅助极化通道。(这里两个极化通道在构造上没有本质的差别，只有权系数固定与可调整的差别，故而可以方便地设定主、辅通道。)

容易证明，在最不利的情况下，即两通道接收功率相同

($|\mathbf{h}_1^T \mathbf{h}|^2 = |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 = 1/2$) 时, 对应最长收敛时间为 $\frac{1}{\mu P_j + 2\mu P_n}$,

这就避免了时间常数接近 τ_{\max} 的情况。含预处理过程的 APC 流程如图 2 所示。

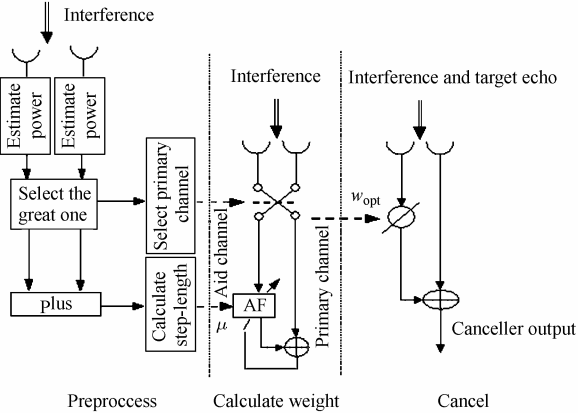


图 2 含预处理的 APC 工作流程

Fig.2 Process chart of APC with preprocess

3.3 稳态性能

权系数达到最佳后, 干扰输出为零, 输出功率达最小值, 根据式(1)和式(2), 容易求得最小平均输出功率为: $\xi_{\min} = \xi|_{w=w_{\text{opt}}} = (1 + |w_{\text{opt}}|^2) P_n$ 。当 $E[w(n)]$ 收敛到 w_{opt} 后, 由于 $w(n)$ 继续按式(4)迭代, 所以 $w(n)$ 继续随机起伏, 其起伏方差为(推导过程见附录 2):

$$\delta_w^2 = \frac{\mu \xi_{\min}}{1 - \mu (|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 P_j + P_n)} \quad (11)$$

4 多个极化干扰同时存在的情况

极化域构成一个二维复空间 \mathbf{C}^2 , 任意多个极化状态的线性加权组合还是一个二维复向量, 自由度为 1, 因而线性极化滤波器只能对消一个极化方向的干扰。

4.1 极化增益图

首先提出“极化增益图”的概念。无论是部分极化通道自适应滤波器, 还是全自适应极化滤波器, 都可以看成是一个由 $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ 的映射, 令输入是一个完全极化波, 输出为极化滤波器对该极化波的加权输出, 则用输入输出信号的平均欧氏范数平方之比(也就是功率之比)来描述这个映射的效率:

$$\frac{E[\|S_o(n)\|_2^2]}{E[\|S_i(n)\|_2^2]} = \frac{|\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 P_s}{|\mathbf{h}^H \mathbf{h}|^2 P_s} = |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}|^2 \quad (12)$$

入射信号为 $S_i(n) = \mathbf{h}s(n) \in \mathbf{C}^2$, \mathbf{h} 为其归一化 Jones 矢量, $s(n)$ 为信号波形, P_s 为入射信号的功率; 输出信号 $S_o(n) = \mathbf{h}_2^T S_i(n) \in \mathbf{C}$; \mathbf{h}_2 为多个通道合成极化 Jones 矢量。

APC 主极化通道权系数固定, 因此属于部分通道极化自适应滤波器, 其合成极化 Jones 矢量为 $\mathbf{h}_2^{(p)} = \mathbf{h}_1 - w\mathbf{h}_2$; 全自适应极化滤波器合成极化 Jones 矢量为 $\mathbf{h}_2^{(a)} = w_1\mathbf{h}_1 + w_2\mathbf{h}_2$ 。

式(12)表示极化滤波器的效率是入射信号的极化

$\mathbf{h}(\gamma, \phi) = [\cos \gamma, \sin \gamma e^{j\phi}]^T$ 的函数 ($\gamma \in [0, (\pi/2)]$, $\phi \in [0, 2\pi]$) 称为波的极化相位描述子^[8], 将其重写如下:

$$F_p(\gamma, \phi) = |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}(\gamma, \phi)|^2 \quad (13)$$

将式(13)称作“极化增益图”函数, 它是来波极化状态 $\mathbf{h}(\gamma, \phi)$ 的函数, 反映了极化滤波器对来波极化的选择性。

4.2 APC 与全自适应极化滤波器的收敛性能比较

因为极化滤波器只能对消一个极化方向的干扰, 所以这里以具有 1 个辅助通道的 APC 和具有 2 个通道的全自适应极化滤波器为研究对象, 比较它们在多个极化干扰同时存在情况下的性能。

假设入射两个独立、极化状态不同的完全极化干扰 $\mathbf{h}_{j_1} j_1(n)$ 和 $\mathbf{h}_{j_2} j_2(n)$, \mathbf{h}_{j_1} 、 \mathbf{h}_{j_2} 和 $j_1(n)$ 、 $j_2(n)$ 分别为其归一化 Jones 矢量和波形, 功率均为 P_j 。通过极化滤波器后的输出为

$$y(n) = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1} j_1(n) + \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2} j_2(n) + r(n) \quad (14)$$

$r(n)$ 为通道噪声, 功率为 P_n , 与干扰独立。

如前所述, 以输出干扰功率最小为准则, 即要求:

$E[y(n)y^*(n)] = |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1}|^2 P_j + |\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2}|^2 P_j + P_n \rightarrow 0$ 。当干扰功率远大于通道噪声功率时(通常情况是这样的), $P_j \gg P_n$, 可以把上式近似写作: $\begin{cases} \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1} = 0 \\ \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2} = 0 \end{cases}$ 。根据前面的结论, APC

和全自适应极化滤波器情况下, 该线性方程组变为

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_1} - w\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1} = 0 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_2} - w\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} w_1 \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_1} - w_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1} = 0 \\ w_1 \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_2} - w_2 \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{令 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_1} & \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_1} \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_{j_2} & \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_{j_2} \end{bmatrix}。$$

对于方程组(15), 在 $\mathbf{h}_{j_1} \neq \mathbf{h}_{j_2}$ 的情况下无解, 即没有权系数 w 能满足条件, 仿真表明, 权系数迭代中, w 不会收敛于其中任何一个方程的解, 而是在两个解之间徘徊; 对于方程组(16), 由于系数矩阵 \mathbf{A} 是满秩的, 故只有零解 $\begin{cases} w_{1,\text{opt}} = 0 \\ w_{2,\text{opt}} = 0 \end{cases}$, 从而迭代结果导致 $\mathbf{h}_2^{(a)} = 0$ 。

因此, 由式(13)可知, 当两个不同极化的干扰同时到达全自适应极化滤波器时, 其极化增益图函数 $F_p(\gamma, \phi)$ 在整个极化平面接近于零, 干扰和目标信号同时被抵消, 无法检测目标; 而 APC 虽然不能同时对消两个干扰, 但由于权系数不会接近于零, 故通过后续的匹配滤波或脉冲积累等信号处理仍有可能将目标检测出来。

通过上面的分析得知, 若以干扰输出功率最小为准则, 全自适应极化滤波器是不适用的。实际上, 在空域或时域处理中, 很多情况下用于全自适应阵的算法是基于某种约束的。

5 仿真实验与分析

首先在单个极化干扰情况下, 验证 APC 迭代算法的对消性能和收敛性能。

期望信号为频率 50kHz 的正弦波信号, 幅度为 0.1 μV , 信干比为 -40dB, 信噪比为 -10dB; 干扰及接收机噪声带宽为 1MHz, 采样率 2MHz, 采样点数为 10000; 期望信号极化相位描述子为 $(72^\circ, 72^\circ)$, 干扰为 $(22.5^\circ, 324^\circ)$, 天线 1 为垂直极化接收, 天线 2 为水平极化接收, 由预处理选择天线 2 作为辅助极化通道, 且其权系数初值设为 0, 步长因子取为 $\mu = 0.1/(P_j + P_n) = 1.998 \times 10^9$ 。

图 3(a)为对消前的极化增益图(辅助极化通道), 可见对干扰的极化增益较大; 图 3(b)为利用最佳权系数对消后的极化增益图, 显见极化增益图的波谷位置已经移至干扰处。

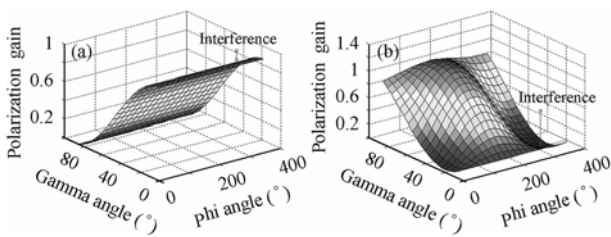


图 3 APC 对消前后的极化增益图
(a) 对消前极化增益图 (b) 对消后极化增益图
Fig.3 Polarization gain maps of before and after APC cancellation
(a) Polarization gain map before cancellation
(b) Polarization gain map after cancellation

根据式(11)算得达到稳态后权系数起伏标准差为 $\delta_w = 0.011$, 若以 $|v(n)| < \delta_w$ 为权系数收敛标志, 则按照式(9), 需要的迭代次数为 20 次。图 4 为权系数误差模值 $|v(n)|$ 的收敛曲线, 蒙特卡罗仿真次数为 100 次, 从图中看出, 达到收敛标志的平均迭代次数大约为 23 次, 理论结果和仿真结果基本相符。采样率为 2MHz 时, 对应的迭代收敛时间为 11.5 μs , 对一般雷达系统来说是完全可以接受的。

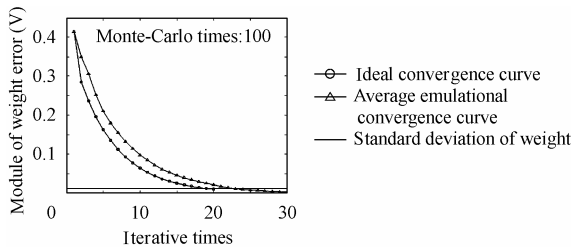


图 4 APC 权系数迭代过程
Fig.4 Iterative procedure of APC's weight

图 5 为对消前后信号频谱, 由于干扰被对消, 目标信号频谱显现出来。(输出信号信干比较大, 但信噪比仍然很小, 所以这里在频域表示对消效果。)

下面比较多极化干扰同时存在情况下, APC 与全自适应极化滤波器的性能。干扰数增加一个, 极化为 $(67.5^\circ, 144^\circ)$, 其它设置同上; 全自适应极化滤波器两通道的极化状态分别与 APC 主、辅通道相同; 权系数初值均为 1。

图 6(a)为 APC 对消后的极化增益图, 从图上看, APC 不能将两个干扰同时对消; 图 6(b)为全自适应极化滤波器对消后的极化增益图, 极化增益下降到几乎为零, 期望信号和干扰信号同时被大大减弱, 这本质上是由于极化增益图上的极化波束太宽造成的。

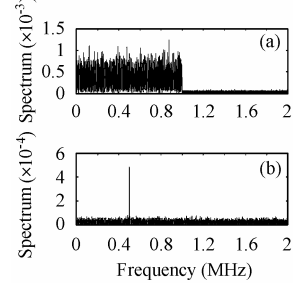


图 5 APC 对消前后信号频谱
(a) 对消前信号频谱 (b) 对消后信号频谱
Fig.5 Spectrum of before and after APC cancellation
(a) Spectrum before cancellation (b) Spectrum after cancellation

图 7 为其权系数迭代过程, 可见两个通道的权系数都很快接近于零。

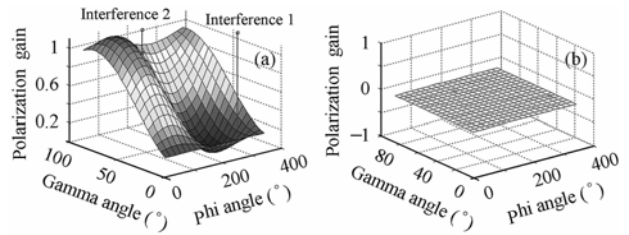


图 6 极化滤波器处理后的极化增益图(多个极化干扰)
Fig.6 Polarization gain map after polarization filtering
(more jammers with different polarizations)
(a) APC (b) Full-APC

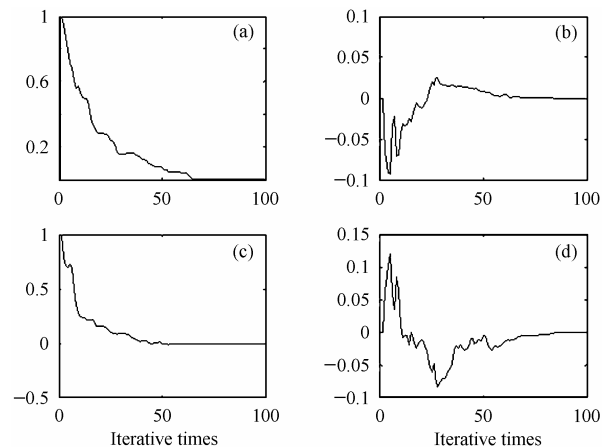


图 7 全自适应极化滤波器权系数迭代过程(多个极化干扰)
(a)通道 1 权系数实部 (b)通道 1 权系数虚部
(c)通道 2 权系数实部 (d)通道 2 权系数虚部
Fig.7 Iterative procedure of full-adaptive polarization filter's weight(more jammers with different polarizations)
(a) Chn1: real part (b) Chn1: imaginary part
(c) Chn2: real part (d) Chn2: imaginary part

6 结束语

本文针对期望信号与干扰到达时间、方向相同或相近，导致在时域、空域不能分辨这一不利探测条件，研究极化域干扰对消器——自适应极化对消器(APC)的迭代滤波实现方法。

首先，指出了 APC 只能以干扰输出功率最小为准则；进而根据最陡梯度的思想推导出了权系数的迭代公式，分析了算法的收敛性能，并提出了加快收敛速度的预处理方案；然后，为了衡量极化滤波器的工作效率，提出了极化增益图的概念，直观地描述了 APC 的对消性能；最后分析比较了多个极化干扰同时存在情况下，部分自适应极化滤波器与全自适应极化滤波器的性能。

如文中所述，线性极化滤波器只能对消一个极化干扰，可以从极化增益图上理解这个问题：极化波束只有一个波峰和一个波谷，通过多个极化线性加权也不能使之变窄或得到多个零点，因而难以对消多个极化干扰，当干扰的极化在极化平面上分布较开时，对消性能更差。

附录 1 复量的导数、梯度定义及相关公式的证明

令 $w = w_r + jw_j$ ，则 $|w|^2 = w_r^2 + w_j^2$ 。对复量 w 的导数定义为^[9] $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_r} - j \frac{\partial}{\partial w_j} \right)$ 和 $\frac{\partial}{\partial w^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_r} + j \frac{\partial}{\partial w_j} \right)$ ，梯度定义为^[9] $\nabla_w = \nabla_{w_r} + j \nabla_{w_j}$ ，从而 $\nabla_w = 2 \frac{\partial}{\partial w^*}$ 。

因此有 $\nabla_w w^* = 2 \frac{\partial w^*}{\partial w^*} = 2$ ， $\nabla_w w = 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial w^*} = 0$ 和 $\nabla_w |w|^2 = \nabla_w (w_r^2 + w_j^2) = 2w_r + j2w_j = 2w$ 。

故而，文中 ξ 对 w 的梯度为： $\nabla_w \xi = 2wE[x_2(n)x_2^*(n)] - 2E[x_1(n)x_2^*(n)]$ ，式(6)得证。

附录 2 权系数起伏方差的推导

由文中权系数起伏量的定义得

$$\begin{aligned} v(n+1) &= w(n) - w_{opt} + 2\mu y(n)x_2^*(n) \\ &= v(n) \left[1 - 2\mu |x_2(n)|^2 \right] + 2\mu y_{opt}(n)x_2^*(n) \end{aligned}$$

其中 $y_{opt}(n) = x_1(n) - w_{opt}x_2(n)$ ， $E[|y_{opt}(n)|^2] = \xi_{min}$ 。为了求得 $v(n)$ 的方差渐近值，在上面的式中用 $E[|x_2(n)|^2] = |h_2^T h|^2 P_J + P_n = P_1$ 替换 $|x_2(n)|^2$ ，于是可得 $E[v(n+1)v^*(n+1)] = [1 - 2\mu P_1]^2 E[v(n)v^*(n)] + 4\mu^2 P_1 \xi_{min}$

在达到稳态后，可以认为权系数起伏方差是稳定的，即

$$\delta_w^2 = E[v(n+1)v^*(n+1)] = E[v(n)v^*(n)]$$

因此，可得 $\delta_w^2 = \frac{\mu \xi_{min}}{1 - \mu (|h_2^T h|^2 P_J + P_n)}$ ，式(13)得证。

参考文献

- [1] 王雪松, 汪连栋, 肖顺平等. 自适应极化滤波器的理论性能分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 1326-1329.
- [2] Poelman A J. Virtual polarization adaptation, a method of increasing the detection capabilities of a radar system through polarization-vector processing[J]. *IEE Proc.-F*, 1981, 128(5): 261-270.
- [3] Gherardelli M, Giuli D, Fossi M. Suboptimum adaptive polarization cancellers for dual-polarisation radars[J]. *IEE Proc.-F*, 1988, 135(1): 60-72.
- [4] Nathanson F E. Adaptive circular polarization[A]. *IEEE Int. Radar Conf[C]*. Arlington, VA, USA, April 1975: 221-225.
- [5] Giuli D, Fossi M, Gherardelli M. A technique for adaptive polarizaion filtering in radars[A]. *Proc of IEEE Int Radar Conf[C]*. Arlington, VA, USA, May 1985: 213-219.
- [6] Poelman A J, Guy J R F. Multinotch logic-product polarization suppression filters: Atypical design example and its performance in a rain clutter environment. *IEE Proc.-F*, 1984, 131(7): 383-396.
- [7] Gherardelli M. Adaptive polarisation suppression of intentional radar disturbance[J]. *IEE Proc -F*, 1990, 137(6): 407-416.
- [8] 庄钊文, 肖顺平, 王雪松. 雷达极化信息处理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999, 1: 43-47.
- [9] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002, 10: 501-504.

施龙飞: 男, 1978年生, 博士生, 专业为通信与信息处理, 研究方向为雷达极化信息处理、雷达系统仿真等。
 王雪松: 男, 1972年生, 博士, 教授, 研究方向为新体制雷达探测技术、雷达极化信息获取与处理、雷达电子战等。
 徐振海: 男, 1977年生, 博士, 讲师, 研究方向为雷达极化信息处理与目标识别。
 肖顺平: 男, 1964年生, 博士, 教授, 研究方向为雷达极化信号处理、模糊信息处理、综合电子战。