

波导加载腔的场计算¹

王 勇

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要 本文基于边界元法 (BEM), 提出了一种新的计算波导加载谐振腔的谐振频率、外 Q 值和场分布的数值计算方法。计算表明, 用 BEM 来处理波导加载腔这样的开放系统, 具有计算时间短、机器内存少和精度高等优点。

关键词 边界元法, 谐振频率, 外 Q 值, 场分布

中图分类号 TN122

1 引 言

在速调管以及粒子加速器的微波器件中, 经常会遇到波导加载谐振腔这样的开放系统。虽然对于封闭系统, 人们早已发展了各种各样的数值方法来计算其场分布和谐振频率, 但对于开放系统, 真正有效的数值方法却很少见有报道。

文献 [1, 2] 从电场相位变化和频率之间存在的关系入手计算了波导加载腔的谐振频率和外 Q 值。然而他们采用的是传统的计算封闭腔的方法, 分析工作和计算工作都非常繁琐。文献 [3] 虽然成功地用有限元法 (FEM) 计算了波导加载腔的谐振频率和外 Q 值, 但由于所求特征方程组的阶数异常的大, 所需机时和内存无疑是相当可观的, 而且作为特征向量的场分布只能在谐振状态下才能求得。

本文基于 BEM, 提出了一种新的计算波导加载腔的数值计算方法。为检验该方法的正确性, 我们对文献 [1-3] 的腔体进行了计算, 得出了一致的谐振频率和外 Q 值。由于 BEM 能使求解问题的空间维数降低一维和能方便地处理开放边界等独特的优点, 使得本方法的计算工作量和所需机器内存均变得很少。同时, 由于这里考虑的不是本征问题, 对每一个谐振和非谐振的入射频率, 都可求得对应的场分布。

2 理论分析

如图 1, 设波导窄边与腔体高度相等, TE_{10} 入射波从波导右端入射, 整个金属边界是无损耗的。于是, 我们的问题可以看成是二维问题。将金属边界 Γ_m 和虚设边界 Γ_v 围成的区域 Ω 作为我们的求解区域, 则在 Ω 内电场强度的 z 向分量 $u(x, y)$ 满足二维标量 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

其中 k 为自由空间的波数。

以下考虑 $u(x, y)$ 在 Γ_m 和 Γ_v 上所满足的边界条件:

(1) 在金属边界 Γ_m 上:

$$u = 0; \quad (2)$$

¹ 1997-09-10 收到, 1998-03-24 定稿

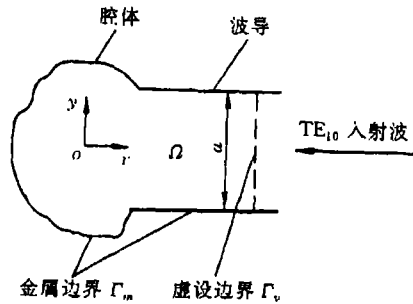


图 1 波导加载腔示意图

应用加权余量法可得边界元积分方程:

$$C_i u_i + \int_{\Gamma_v} (q^* + j\beta u^*) u d\Gamma = \int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_v} 2j\beta u^* u^{in} d\Gamma, \quad (4)$$

其中

$$C_i = \begin{cases} 1, & i \in \Omega; \\ 1 - \theta_i/2\pi, & i \in \Gamma = \Gamma_m + \Gamma_v; \\ 0, & i \notin \Gamma + \Omega; \end{cases} \quad (5)$$

$$q = \partial u / \partial n, \quad u^* = (1/4j) H_0^{(2)}(kr), \quad q^* = \partial u^* / \partial n = (jk/4) H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha. \quad (6)$$

在 (5), (6) 式中, θ_i 为场点 i 所张 (外) 平面角^[4], $H_0^{(2)}(\bullet)$ 、 $H_1^{(2)}(\bullet)$ 分别为第二类零阶和一阶 Hankel 函数, \vec{n} 为外法线方向, r 为源点到场点的距离, α 为 \vec{r} 与 \vec{n} 的夹角.

将边界 Γ_m 、 Γ_v 分别划分为 N_m 和 N_v 个线性单元. 此时, (4) 式的边界积分可以化成其在各个单元上的积分之和:

$$C_i u_i + \sum_{e=1}^{N_v} \int_{\Gamma_e} (q^* + j\beta u^*) u d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_m} \int_{\Gamma_e} u^* q d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_v} \int_{\Gamma_e} 2j\beta u^* u^{in} d\Gamma. \quad (7)$$

引入线性插值形函数:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= (1 - \xi)/2, \\ N_2(\xi) &= (1 + \xi)/2, \end{aligned} \right\} \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (8)$$

则 Γ_e 上的 u 和 q 可以表示成:

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1(\xi) u_e + N_2(\xi) u_{e+1}, \\ q &= N_1(\xi) q_e + N_2(\xi) q_{e+1}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这样, 根据 BEM 的线性元离散化原理^[5,6], (7) 式可写成如下离散化方程:

$$\begin{aligned} C_i u_i + \sum_{e=1}^{N_v} (\hat{H}_{ie}^{(v)} + j\beta \hat{G}_{ie}^{(v)}) u_e - \sum_{e=1}^{N_m} \hat{G}_{ie}^{(m)} q_e &= \sum_{e=1}^{N_v} \hat{F}_{ie}^{(v)}, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad (N = N_m + N_v). \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 在虚设边界 Γ_v 上: 如果 Γ_v 离腔体足够远, 则在 Γ_v 上只有 TE_{10} 模的入射波和反射波存在. 按照文献 [3] 的推导, 在 Γ_v 上 $u(x, y)$ 满足 Robin-type 边界条件:

$$\partial u / \partial n + j\beta u = 2j\beta u^{in}, \quad (3)$$

其中 $u^{in} = E_0 \exp(j\beta x) \cos(\pi y/a)$, a 为波导宽边尺寸.

选取二维 Helmholtz 方程的基本解 u^* 为权函数, 利用边界条件 (2)、(3), 对 (1) 式

进一步可写成矩阵形式:

$$([H] \ [G]) \begin{pmatrix} \{u\} \\ \{q\} \end{pmatrix} = \{F\}, \quad (11)$$

其中 $[H]$, $[G]$ 分别为 $N \times N_v$ 和 $N \times N_m$ 阶矩阵, $\{u\}$, $\{q\}$ 分别为 N_v 和 N_m 阶向量, $\{F\}$ 为 N 阶向量. $[H]$, $[G]$ 和 $\{F\}$ 的元素表达式为

$$\left. \begin{aligned} H_{ie} &= \hat{H}_{ie}^{(v)} + j\beta\hat{G}_{ie}^{(v)} + C_i\delta_{ie}, \\ G_{ie} &= -\hat{G}_{ie}^{(m)}, \\ F_i &= \sum_{e=1}^{N_v} \hat{F}_{ie}^{(v)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在边界单元划定以后, H_{ie} , G_{ie} 和 F_i 包含的唯一的未知数是入射频率. 如果入射频率给定, 则 $[H]$, $[G]$ 和 $\{F\}$ 也就确定了, 求解方程 (11) 即可得到边界上的 $\{u\}(\in \Gamma_v)$ 和 $\{q\}(\in \Gamma_m)$.

区域 Ω 内任意一点 i 对应于该频率的场 $u(x_i, y_i)$, 可由 (4) 式基于同样的离散化过程得到:

$$u(x_i, y_i) = - \sum_{e=1}^{N_v} (\hat{H}_{ie}^{(v)} + j\beta\hat{G}_{ie}^{(v)})u_e + \sum_{ie}^{N_m} \hat{G}_{ie}^{(m)}q_e + \sum_{e=1}^{N_v} \hat{F}_{ie}^{(v)}. \quad (13)$$

值得注意的是, (13) 式的 $\hat{H}_{ie}^{(v)}$, $\hat{G}_{ie}^{(v)}$, $\hat{G}_{ie}^{(m)}$ 和 $\hat{F}_{ie}^{(v)}$ 都是频率和场点坐标 (x_i, y_i) 的函数. 由于 $\{u\}$ 和 $\{q\}$ 已由 (11) 式求出, 当频率给定时, 对应于该频率的场分布即可由 (13) 式得到.

这样, 如果改变入射频率, 则可以得到区域 Ω 内某一点 (以下称“探测点”) 处电场强度的平方随频率变化的谐振曲线 (如图 2). 通过该曲线, 我们可以容易地知道波导加载腔的谐振频率 f_0 和外 Q 值 ($Q = f_0/(f_2 - f_1)$).

3 数值结果

以上的分析方法适用于工作在 TM_{mno} 模式的任意形状的二维腔体. 为了验证本方法的正确性, 我们对文献 [1-3] 的波导加载腔 (如图 3) 进行了数值计算. 为便于比较, 取 $a = 22.86\text{mm}$, 并假定腔体工作模式为主模.

具体计算时, N 取大约 150 (可视 D 的大小调节). 考虑到膜片处的电场比较集中, 我们在其两个厚度边界均取 16 个离散单元, 四个宽度边界均取 12 个离散单元, 其它边界均按单元长度 $\Gamma_e \approx 1.9\text{mm}$ 选取. 为确保计算精度, 我们把“探测点”选在了区域 Ω 内电场强度的最大点.

表 1 显示了波导长度 D 的取值对外 Q 值计算结果的影响. 从表中可看出, 本文的结果与文献 [1, 3] 以及与由等效电路公式算得的结果均吻合得很好. 我们发现, 由于膜片附近处高次模的影响, D 至少要大于 $0.4a$ 才能得到正确的外 Q 值.

表 1 D 的取值对外 Q 值* 计算结果的影响 ($d = 0.5a, t = 5a/144$)

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
本文	26.32	32.14	33.58	33.85	33.88	33.87	33.90	33.94	33.92	33.88	33.88	33.93	33.94
文献 [1]	—	—	—	—	33.88	36.37	32.85	34.57	34.12	34.44	33.19	34.56	35.38
文献 [3]	—	—	—	—	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31	34.31

* 由等效电路公式算得的外 Q 值是 33.32^[3]

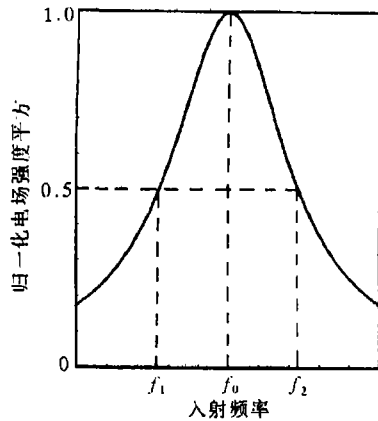


图 2 谐振曲线示意图

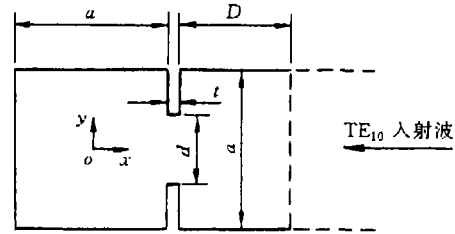


图 3 带有膜片的波导加载谐振腔

图 4(a), 4(b) 分别为谐振频率和外 Q 值随开口宽度 d 的变化曲线。由图可看出, 本文与文献 [2] 具有很好的一致性。

图 5(a), 5(b) 显示了膜片厚度 t 的变化分别对谐振频率和外 Q 值的影响。从图中我们看到, 当 t 较小时, t 的变化对谐振频率影响很大而对外 Q 值影响很小; 当 t 较大时则正好相反。

4 结 论

本文基于 BEM, 成功地建立了一种新的波导加载腔的场计算方法, 并用该方法对文献 [1-3] 的腔体进行了数值计算, 得出了一致的计算结果。计算表明, 该方法不仅能方便地处理开放边界, 而且由于其离散只在边界上进行, 使求解方程组的规模大大缩小, 因而大大地提高了计算速度和精度。这些特点使 BEM 在求解三维问题中特别具有吸引力, 本文作者正在做着尝试。

致谢 作者衷心感谢博士生导师丁耀根研究员对本文的审阅和许多宝贵的建议。

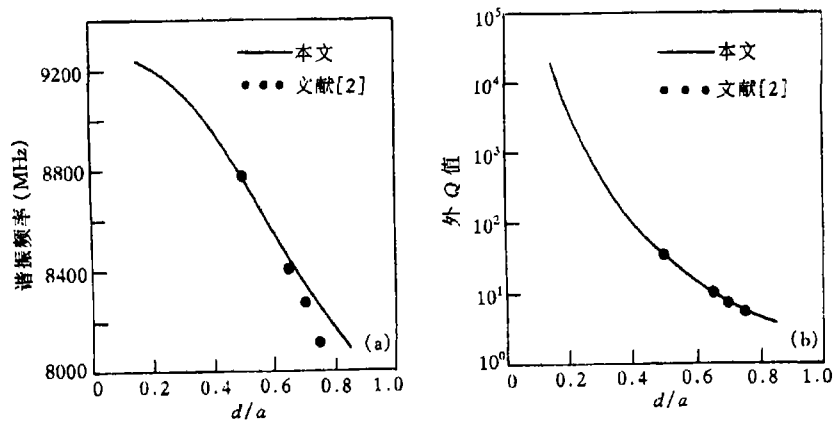


图 4

(a) 谐振频率随开口宽度 d 的变化 ($t = 25.4/32, D = a$)

(b) 外 Q 值随开口宽度 d 的变化 ($t = 25.4/32, D = a$)

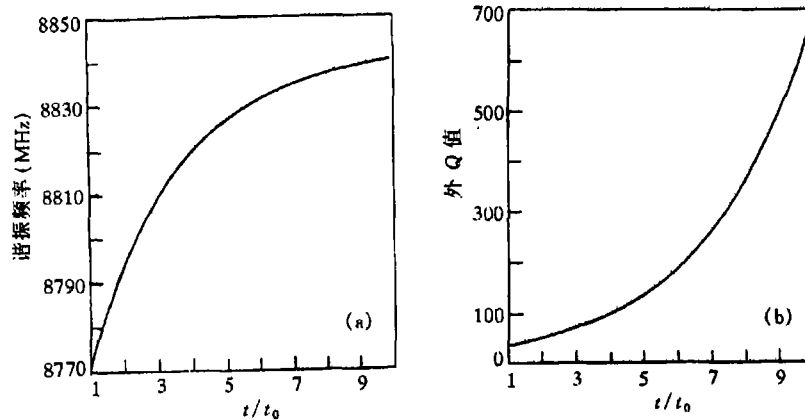


图 5

- (a) 谐振频率随膜片厚度 t 的变化 ($t_0 = 25.4/32, d = 0.5a, D = a$)
 (b) 外 Q 值随膜片厚度 t 的变化 ($t_0 = 25.4/32, d = 0.5, D = a$)

参 考 文 献

- [1] Kroll M N, Yu D U L. Computer determination of the external Q and resonant frequency of waveguide loaded cavities. Particle Accelerators, 1990, 34: 231-250.
- [2] Kroll M N, Xin-Tian Lin. Efficient computer determination of the properties of waveguide loaded cavities. SLAC-PUB-5296, 1990, July.
- [3] Hajime Igarashi, Yasuyuki Sugawara, Toshihisa Honma. A numerical computation of external Q of resonant cavities. IEEE Trans. on Magnetics, 1995, 31(3): 1642-1645.
- [4] 倪光正, 钱秀英. 电磁场数值计算. 北京: 高等教育出版社, 1996, 第 8.3 节.
- [5] 李忠元. 电磁场边界元算法. 北京: 北京工业学院出版社, 1987, 第 3.3 节.
- [6] 张雪阳, 曾余庚. Helmholtz 方程的边界元解法. 西安: 西北电讯工程学院学报, 1984, 18(4): 42-45.

FIELD COMPUTATION OF WAVEGUIDE LOADED CAVITY

Wang Yong

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract This paper presents a new numerical method, which is based on boundary element method (BEM), for the computation of resonant frequency, external Q value and field distribution of the waveguide loaded cavity. It is shown that BEM has many advantages as little computing time, less storage and high precision, etc. in solving the open system like waveguide loaded cavity.

Key words BEM, Resonant frequency, External Q value, Field distribution

王 勇: 男, 1964 年生, 硕士, 现从事微波大功率速调管的研制工作.