基于二分图的乘积码迭代译码算法

郑　贺[①]　　陆佩忠[②]　　胡捍英[①]

[①](信息工程大学通信工程系　郑州　450002)
[②](复旦大学计算机科学与工程系　上海　200433)

摘　要： 该文给出了由汉明分量乘积码构造广义低密度(GLD)码的一般方法。基于所得稀疏矩阵的二分图，并结合分组码与低密度校验(LDPC)码的译码算法，设计出一种新颖的可用于乘积码迭代译码的Chase-MP算法。由于所得二分图中不含有长度为4和6的小环，因而大大减少图上迭代时外信息之间的相关性，进而提高译码性能。对加性高斯白噪声(AWGN)及瑞利(Rayleigh)衰落信道下，汉明分量 $(63,57,3)^2$ 乘积码的模拟仿真显示，该算法能够获得很好的译码性能。与传统的串行迭代Chase-2算法相比，Chase-MP算法适合用于全并行译码处理，便于硬件实现，而且译码性能优于串行迭代Chase-2算法。

关键词：乘积码，GLD码，LDPC码，二分图，Chase-MP算法

中图分类号：TN911.22　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2006)01-0086-06

Iterative Decoding Algorithm for Product Codes Based on Bipartite Graphs

Zheng He[①]　　Lu Pei-zhong[②]　　Hu Han-ying[①]

[①](*Department of Communications Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou* 450002, *China*)
[②](*Department of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai* 200433, *China*)

Abstract This paper shows how to construct generalized low-density (GLD) codes from Hamming-component product codes. Combining the decoding algorithms for linear block and LDPC codes，a novel Chase-MP algorithm for decoding of product codes is proposed by using the bipartite graph of the constructed sparse matrix. Since there are no cycles of length 4 or 6 in the graph, dependence among extrinsic information is greatly reduced during iterations and decoding performance is also improved. Experimental simulations for the $(63,57,3)^2$ product code based on Hamming-component codes in terms of Bit Error Rate (BER) on the Additive White Gaussian Noise (AWGN) and Rayleigh fading channels show that our algorithm has remarkable coding gains. In comparison with the serially iterative Chase-2 algorithm, the Chase-MP algorithm is more convenient for fully parallelizable decoding and can achieve better performance.

Key words Product codes, GLD codes, LDPC codes, Bipartite graphs, Chase-MP algorithm

1　引言

乘积码是由Elias首先引入的一种具有强纠错能力的串行级连码[1]，该码使用分组码作为分量码，是一种由短码构造长码的简单有效编码方式。作为DVB-S_2标准的主要技术之一，乘积码将广泛地应用于未来下一代卫星数字电视广播中[2]。乘积码的译码，通常采用先行后列或先列后行的串行译码方法[1,3]，以减小其译码复杂度。实际中，为达到最优的译码性能，需要对每一级分量码进行ML(Max-Likelihood)软译码。根据turbo码的反馈迭代译码原理[4]，在对乘积码的行列译码时，需要使用SISO(Soft-in/Soft-out)译码器对软信息进行处理和传递[5-7]。

由于乘积码采用分组码作为分量码，而分组码的译码通常可概括为以下几种：准最佳、低复杂度的Chase算法[8]，基于格状图(trellis)的MAP算法[5]等。同时，乘积码亦可视为一类特殊的由LDPC(Low-Density Parity-Check)码扩展而来的GLD(Generalized Low-Density)码[9]。LDPC码的译码方法可

2004-06-28 收到，2004-11-22 改回
国家自然科学基金(10171017)，国家自然科学基金重大研究计划(90204013)，上海市科技发展基金(035115019)和教育部全国优秀博士学位论文作者专项基金(200084)资助课题

统称为一类基于图的消息传递(MP)算法，依据图的不同，此类译码算法亦可进一步划分为：基于因子图的和积(Sum-Product)算法[10,11]，基于BayesBP(Belief-Propagation)算法[12]以及基于二分图的MP(Message-Passing)的算法[13]等。

当前应用于乘积码的各种译码算法，其主体思想皆是：先按分组码对乘积码的行(列)进行软判决译码，并将产生的外信息送至列(行)译码器再进行译码，如此反复，从而实现乘积码的迭代译码[6,7]，但是这类算法皆没有充分利用乘积码是GLD码这一特性。本文拟从GLD码的角度出发，利用所构造稀疏矩阵的二分图，结合分组码与LDPC码的译码算法，设计出一种新颖的可用于乘积码迭代译码的Chase-MP算法。而且，从GLD码的角度来分析乘积码，将更有利于设计性能优异的交织乘积码。

本文主要分为 4 个部分：第 2 节介绍乘积码与 GLD 码的基本概念，并给出由汉明分量乘积码构造 GLD 码的一般方法；第 3 节介绍 Chase-2 算法及其软判决译码的基本原理，并在此基础上设计出 Chase-MP 译码算法；对汉明分量乘积码进行模拟仿真，并对仿真结果进行分析，同时与传统的串行迭代 Chase-2 算法进行比较；第 4 节对全文加以总结。

2　汉明分量乘积码的 GLD 码构造

2.1 乘积码介绍

设线性分组码 $\boldsymbol{C}^1$，$\boldsymbol{C}^2$ 均为系统码，其参数记为 (n_1,k_1,d_1)，(n_2,k_2,d_2)，其中 n_i,k_i,d_i (i=1.2)分别表示码字的码长、信息比特数及最小汉明距离。乘积码 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^1\otimes\boldsymbol{C}^2$ 可采用以下步骤获得：

(1) 将 $k_1\times k_2$ 个信息比特排成 k_1 行，k_2 列的阵列形式；

(2) 对该阵列的 k_1 行按 $\boldsymbol{C}^2$ 进行编码，成为 $k_1\times n_1$ 阵列;

(3) 对 $k_1\times n_1$ 阵列的每一列按 $\boldsymbol{C}^1$ 进行编码，成为 $n_1\times n_2$ 阵列。

按此方法构造出的乘积码 $\boldsymbol{P}$[3]，其参数分别为 $n=n_1\times n_2$，$k=k_1\times k_2$，$d=d_1\times d_2$，码率 $R=R_1\times R_2$，其中 R_1,R_2 各为 $\boldsymbol{C}^1$ 与 $\boldsymbol{C}^2$ 的码率。可以证明，$\boldsymbol{P}$ 的后 (n_1-k_1) 行均为分组码 $\boldsymbol{C}^2$ [3]。因此，乘积码 $\boldsymbol{p}$ 的所有列均为分组码 $\boldsymbol{C}^1$，所有行均为分组码 $\boldsymbol{C}^2$。

2.2　GLD 码构造

使用汉明码作为分量码的GLD码，主要由以下 3 个参数定义：码长 N，每个码符号连接的分量码个数 j 及汉明分量码的长度 n，故将其简记为 (N,j,n) 汉明分量GLD码。二进制的汉明分量GLD码可由行重量为 n，列重量为 j 的 $(N\cdot j/n)\times N$ 阶稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $(n,k,3)$ 汉明码的 $(n-k)\times n$ 阶校验矩阵 $\boldsymbol{H}_c$ 构造而成[14,15]，具体构造规则如下：

(1) $\boldsymbol{A}$ 每一行中的 $(N-n)$ 个 0 元素以长度为 $(n-k)$ 的全零列矢量代替；

(2) $\boldsymbol{A}$ 每一行中的 n 个 1 元素分别以矩阵 $\boldsymbol{H}_c$ 的不同列代替。

对于乘积码 $\boldsymbol{P}$，若其分量码 $\boldsymbol{C}^1,\boldsymbol{C}^2$ 均是校验矩阵为 $\boldsymbol{H}_c$ 的 $(n,k,3)$ 汉明码，且该码以行码为单位进行传送，依据线性分组码校验矩阵的定义，知 $\boldsymbol{P}$ 的校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可表示为 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^-\\ \boldsymbol{H}^|\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{H}^-,\boldsymbol{H}^|$ 分别为 $\boldsymbol{P}$ 的水平、垂直校验矩阵。具体地，若记分块矩阵 $\boldsymbol{E}_1=[\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{0}\ \cdots\ \boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{E}_2=[\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{I}\ \cdots\ \boldsymbol{0}]$，…，$\boldsymbol{E}_n=[\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \cdots\ \boldsymbol{I}]$，其中 $\boldsymbol{I}$，$\mathbf{O}$ 分别为 n 阶单位方阵与全零方阵，且 $\boldsymbol{E}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)由 n 个 n 阶方阵块组成；再记 n 维单位行矢量 $\boldsymbol{e}_1=[1\ \ 0\ \cdots\ 0]$，$\boldsymbol{e}_2=[0\ \ 1\ \cdots\ 0]$，…，$\boldsymbol{e}_n=[0\ \ 0\ \cdots\ 1]$，则 $\boldsymbol{H}^-,\boldsymbol{H}^|$ 可进一步表示为

$$\boldsymbol{H}^-=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_c\cdot\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{H}_c\cdot\boldsymbol{E}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_c\cdot\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{H}^|=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_c\otimes\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{H}_c\otimes\boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_c\otimes\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}$$

再取行重量为 n，列重量为 2 的 $2n\times n^2$ 阶稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccccccccccc}1&1&\cdots&1&&&&&&&&\\ &&&&1&1&\cdots&1&&&&\\ &&&&&&&&\cdots&&&\\ &&&&&&&&1&1&\cdots&1\\ \hline 1&&&&1&&&&1&&&\\ &1&&&&1&&&&1&&\\ &&\ddots&&&&\ddots&&\cdots&&\ddots&\\ &&&1&&&&1&&&&1\end{array}\right]$$

按照如前所述的 GLD 码构造规则，乘积码 $\boldsymbol{P}$ 的校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可由汉明分量码的校验矩阵 $\boldsymbol{H}_c$ 与稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 依该规则构造而得，所得的码即为 $(n^2,2,n)$ GLD 码。具体的构造过程可描述如下：

以 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行为例，显然 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行共含有 n 个 1 元素，(n^2-n) 个 0 元素，将 $\boldsymbol{H}_c$ 表示成矢量形式，即 $\boldsymbol{H}_c=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_n)$，其中 $\boldsymbol{h}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)为 $(n-k)$ 维列矢量。依据 GLD 码构造规则，依次用 $\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_n$ 代替第 1 行中的 n 个 1 元素，用 $(n-k)$ 维全零列矢量代替其中的 (n^2-n) 个 0 元素。此时，由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行扩展而成的 $(n-k)\times n^2$ 阶矩阵可表示为：$(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_n,\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=\boldsymbol{H}_c\cdot\boldsymbol{E}_1$。以此类推，$\boldsymbol{A}$ 的其余 $(2n-1)$ 行均按照此方法进行扩展，从而得到 $\boldsymbol{P}$ 的校验矩阵 $\boldsymbol{H}$。

3　Chase-P 译码算法设计

3.1　Chase-2 算法及其软判决译码

考虑 AWGN 信道下，(n,k,d) 线性分组码 $\boldsymbol{C}$ 的译码问

题。假定二进制比特到符号的映射法则为：$\{0 \to +1, 1 \to -1\}$。设信道输入端的发送码字为 $\boldsymbol{C} = (c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_n)$，其分量 $c_j \in \{-1, +1\}$，噪声矢量为 $\boldsymbol{N} = (n_1, \cdots, n_j, \cdots, n_n)$，其分量 n_j 是均值为 0，方差为 σ^2 的加性高斯白噪声的采样值，输出端信号的观测矢量为 $\boldsymbol{R} = (r_1, \cdots, r_j, \cdots, r_n)$，三者的关系式可描述为：$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{N}$。

依据最大似然判决准则[7]，相应于发送码字 $\boldsymbol{C}$ 的最佳判决码字 $\boldsymbol{D} = (d_1, \cdots, d_j, \cdots, d_n)$，由下式给出：若 $\forall \boldsymbol{C}^l \in \boldsymbol{C}$，均有 $\|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}^i\| \le \|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}^l\|$，则 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}^i$。其中，$\boldsymbol{C}^i = (c_1^i, \cdots, c_j^i, \cdots, c_n^i)$ 为码集 $\boldsymbol{C}$ 中的第 i 个码字，且 $\|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}^i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (r_j - c_j^i)^2$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}^i$ 之间的平方欧氏距离。若采用穷举法搜索最佳码字 $\boldsymbol{D}$，则计算量将随码空间维数 k 呈指数增长，故当 k 值较大时此法不可行。

Chase于 1972 年提出了用于线性分组码译码的 3 种译码算法，统称为Chase算法[8]。其中的Ⅱ型算法，我们将其简称为Chase-2 算法，是一种准最佳、低复杂度的译码算法。该算法基于信道度量信息[7,8]，很好地解决了上述问题，其基本步骤可描述如下：

(1)对接收序列 $\boldsymbol{R}$ 进行硬判决，得其似然序列 $\boldsymbol{Y}$，找出 $\boldsymbol{Y}$ 中可信度最低的 p 个位置，即在 $\boldsymbol{R}$ 中取 $|r_j|$ 最小的 p 个分量所在位置；

(2)构造 2^p 个测试图样 $\boldsymbol{T}^q$，即依次将 n 维二进制矢量的该 p 个位置中的 i ($i = 0, 1, \cdots, p$)个位置置为 1，其余 $p - i$ 个位置置为 0；

(3)依次构造测试序列 $\boldsymbol{Z}^q = \boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{T}^q$ ($q = 0, 1, \cdots, 2^p - 1$)，并使用代数译码器分别对序列 $\boldsymbol{Z}^q$ 进行译码，并将译码后的正确码字 $\boldsymbol{C}^q$ 添加到集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 中，易见 $|\boldsymbol{\Omega}| \le 2^p$。

同样，依据最大似然判决准则，在集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 中选取与 $\boldsymbol{R}$ 的欧氏距离为最小的码字 $\boldsymbol{D}$ 作为 Chase-2 算法译码所得的最大似然码字。所得判决码字 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 个分量判为 d_j 的软信息，由发送码字 $\boldsymbol{C}$ 的第 j 个符号 c_j 的后验对数似然比来定义，即 $\Lambda(d_j) = \ln \dfrac{\Pr\{c_j = +1 | \boldsymbol{R}\}}{\Pr\{c_j = -1 | \boldsymbol{R}\}}$。特别地，高信噪比条件下，$\Lambda(d_j)$ 可近似表示为[7]：$\Lambda(d_j) \approx \dfrac{1}{2\sigma^2}\left(\|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}^{-1(j)}\|^2 - \|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}^{+1(j)}\|^2\right) = \dfrac{2}{\sigma^2}\left(r_j + \sum_{i=1, i \ne j}^{n} r_i c_i^{+1(j)} p_i\right)$，其中 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$，$\boldsymbol{C}^{+1(j)}$ 分别为集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 中，满足 $c_j = -1$，$c_j = +1$ 并与 $\boldsymbol{R}$ 的欧氏距离为最小的码字，且式中的 $p_i = \begin{cases} 0, & c_i^{+1(j)} = c_i^{-1(j)} \\ 1, & c_i^{+1(j)} \ne c_i^{-1(j)} \end{cases}$。将 $\Lambda(d_j)$ 关于 $\dfrac{2}{\sigma^2}$ 进行标准化处理，可得 $r_j' = r_j + \sum_{i=1, i \ne j}^{n} r_i c_i^{+1(j)} p_i$。于是，产生的标准化外信息为：$w_j = \sum_{i=1, i \ne j}^{n} r_i c_i^{+1(j)} p_i$。

以上讨论的是 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$ 和 $\boldsymbol{C}^{+1(j)}$ 均属于集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 的情况，若 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$，$\boldsymbol{C}^{+1(j)}$ 之一不在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中，不妨假定 $\boldsymbol{C}^{-1(j)} \in \boldsymbol{\Omega}$ 且 $\boldsymbol{C}^{+1(j)} \notin \boldsymbol{\Omega}$，即 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$ 为在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中找到的最大似然码字，记作 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ML}} = (c_1^{\mathrm{ML}}, \cdots, c_j^{\mathrm{ML}}, \cdots, c_n^{\mathrm{ML}})$。此时显见，与 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$ 相比，$\boldsymbol{C}^{+1(j)}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的欧氏距离较大，故正确判决 d_j 的概率较高，而且可以近似认为外信息与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ML}}$ 的第 j 个分量 $c_j^{\mathrm{ML}} = -1$ 的符号相同。因此，外信息可近似取为 $w_j \approx \beta \cdot |w|_{\mathrm{av}} \cdot c_j^{\mathrm{ML}}$ ($\beta \ge 0$)，其中，β 称为可靠因子，该值在译码前需预先设定，且与迭代次数有关；$|w|_{\mathrm{av}}$ 为 $\boldsymbol{C}^{-1(j)}$，$\boldsymbol{C}^{+1(j)}$ 均属于集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 时，算得所有外信息的绝对值之均值。

3.2 Chase-MP 译码算法设计

如前所述，乘积码 $\boldsymbol{P}$ 的校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可由分量码的校验矩阵 $\boldsymbol{H}_c$ 与稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$，按照 GLD 码的设计规则构造而得。$2n \times n^2$ 阶规则稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$，共有 n^2 个符号节点，$2n$ 个约束节点，且每一列有 2 个 1 元素，每一行有 n 个 1 元素，因此 $\boldsymbol{A}$ 的二分图如图 1 所示。

由图 1 容易看出，$\boldsymbol{A}$ 的二分图中每个符号节点连接 2 个约束节点，每个约束节点连接 n 个符号节点。对于任意的 $n \geqslant 2$，通过分析不难得出该二分图的最小环长为 8。MP算法[13]恰是一种基于二分图的译码算法，在该算法中，二分图上的符号节点与约束节点分别对接收到的消息进行处理，并在相连的各个节点之间进行外信息传递。各节点的消息处理与更新准则，在文献[13]中有详尽描述。对于LDPC码而言，二分图中存在的小环是影响其译码性能的主要因素之一[11]。由于 $\boldsymbol{A}$ 的二分图中不含长度为 4 和 6 的小环，从而大大减少图上迭代时外信息之间的相关性，进而提高译码性能。

汉明分量 GLD 码在 LDPC 码基础上扩展而来，二者的主要区别在于 LDPC 码中采用能检一个错的奇偶校验码作为

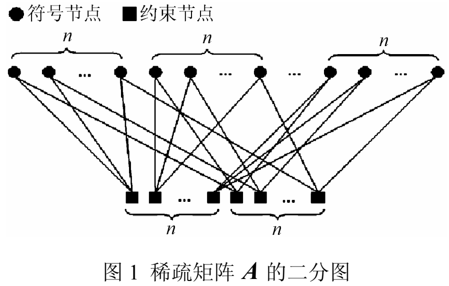

图 1 稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二分图

分量码，而相应的GLD码中则采用能纠一个错的汉明码作为分量码。鉴于GLD码与LDPC码的扩展关系，并利用所得稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二分图，本文拟将Chase-2 算法与MP算法相结合，设计出一种新颖的用于乘积码迭代译码的Chase-MP算法，该算法利用外信息交互的思想[4,5,7]，并基于二分图进行消息传递。在二分图中，约束节点采用Chase-2 算法计算每个相连符号节点的外信息，而整个迭代译码过程使用连续消息集的MP算法完成。

一般地，记 $M\times N$ 阶稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列标号集合分别为 $\boldsymbol{M}_n=\{m:\boldsymbol{A}_{m,n}=1\}$， $\boldsymbol{N}_m=\{n:\boldsymbol{A}_{m,n}=1\}$。令 $\mu_{m,n}^{(l)}$ 为第 l 次迭代时约束节点传递给符号节点的外信息， $\lambda_n^{(l)}$ 为第 l 次迭代后符号节点的标准化后验对数似然比。Chase-MP 算法的具体过程，可描述如下：

(1) 初始化

$$\mu_{m,n}^{(0)}=0\text{，对所有的 } m\in\{1,2,\cdots,M\} \text{ 及 } n\in\boldsymbol{N}_m\text{；}$$

$$\lambda_n^{(0)}=r_n\text{，对所有的 } n\in\{1,2,\cdots,N\}\text{。}$$

(2) 迭代译码(迭代次数 $l=1,2,\cdots,l_{\max}$)

约束节点更新(对所有的 $m\in\{1,2,\cdots,M\}$ 及 $n\in\boldsymbol{N}_m$)

若 $\boldsymbol{C}^{-1(n)}\in\boldsymbol{\Omega}$ 且 $\boldsymbol{C}^{+1(n)}\in\boldsymbol{\Omega}$，则

$$\mu_{m,n}^{(l)}=\sum_{i\in\boldsymbol{N}_m\backslash n}\left(\lambda_i^{(l-1)}-\alpha(l-1)\cdot\mu_{m,i}^{(l-1)}\right)c_i^{+1(n)}p_i\text{；}$$

否则

$$\mu_{m,n}^{(l)}\approx\beta(l)\cdot|w|_{av}\cdot c_n^{\mathrm{ML}}$$

符号节点更新(对所有的 $n\in\{1,2,\cdots,N\}$)

$$\lambda_n^{(l)}=r_n+\boldsymbol{\alpha}(l)\cdot\sum_{m\in\boldsymbol{M}_n}\mu_{m,n}^{(l)}$$

其中， $\alpha(l)$ 为尺度因子。

(3) 判决输出　对 $\lambda_n^{(l_{\max})}$ 进行译码判决。

3.3 仿真结果

利用上述设计的 Chase-MP 算法，分别对 BPSK 调制的 AWGN 信道及 Rayleigh 衰落信道下，汉明分量 $(63,57,3)^2$ 乘积码进行了译码性能仿真，如图 2 及图 3 所示。仿真条件取为

(1)Chase-MP 算法中的位置数 $p=4$；

(2)尺度因 $\boldsymbol{\alpha}=[0.1\quad 0.2\quad 0.3\quad 0.4\quad 0.8\quad 0.9\quad 1.0\quad 1.0]$；

(3)可靠因 $\boldsymbol{\beta}=[0.2\quad 0.4\quad 0.6\quad 0.8\quad 1.0\quad 1.0\quad 1.0\quad 1.0]$。

由图 2 可见，AWGN 信道下，采用 Chase-MP 算法对汉明分量 $(63,57,3)^2$ 乘积码进行译码，在 $E_b/N_0=4\text{dB}$ 时，迭代6次的BER大约为 4×10^{-6}；迭代10次时，要达到 $\text{BER}=10^{-5}$，所需的 $E_b/N_0\approx3.6\text{dB}$，而且从仿真曲线容易看出，迭代次数超过 10 次以后，译码性能的改善并不明显。该汉明分量乘积码的码率为 0.819，AWGN 信道下，在 $\text{BER}=10^{-5}$ 时，可算得迭代10次获得的编码增益约为6 dB，而所需的 E_b/N_0 距离二进制输入的加性高斯白噪声(BIAWGN)信道的香农限约为 1.4 dB。

图 3 给出了 Rayleigh 衰落信道下，采用 Chase-MP 算法译码的汉明分量 $(63,57,3)^2$ 乘积码的性能仿真曲线。由图可见， $E_b/N_0=10\text{dB}$，迭代次数为 10 时，达到的 $\text{BER}\approx10^{-5}$。同样，在 Rayleigh 衰落信道下，迭代次数超过 10 次以后，译码性能的改善不甚明显。

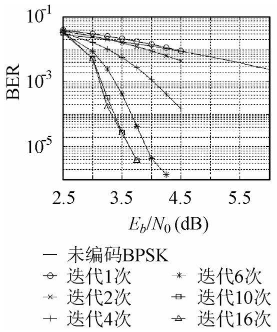

图 2　AWGN 信道 BER-E_b/N_0曲线

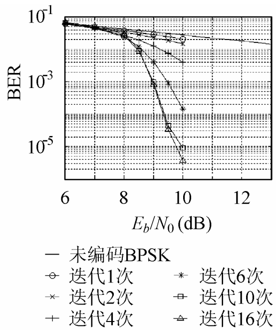

图 3　Rayleigh 衰落信道 BER- E_b/N_0曲线

3.4 与串行迭代 Chase-2 算法的比较

本文设计的Chase-MP算法，是在对二维乘积码进行分析的基础上提出的，该算法实际上采用的是一种并行的译码方式。应该指出的是，该算法与基于分量译码器间外信息交互的串行迭代Chase-2 算法[6,7,16](以下将其简称为Chase-SI算法)在本质上是一致的，其主要特点即在于构造了相应GLD码的二分图，并将其迭代译码置于二分图上来完成。类似于turbo码与LDPC码译码方式的不同，传统的用于乘积码译码的Chase-SI算法采用的是类似于turbo码译码的分量码串行更新方式，与之相比，Chase-MP算法则采用类似于LDPC码译码的并行更新方式。

由于采用更新方式的不同，尽管从迭代次数上讲，Chase-MP 算法的迭代稳定速度要低于传统的 Chase-SI 算法，如图 4 所示，Chase-SI 算法在迭代 6 次以后基本稳定, 而 Chase-MP 算法大约需要 10 次。但是，Chase-MP 算法具有类似于 LDPC 码译码算法的全并行处理潜力。粗略地讲, 对

于二维乘积码而言，在 Chase-SI 算法迭代 1 次(即分量译码器全部更新一次)所需的时间内，全并行处理的 Chase-MP 算法能够完成 2 次迭代。同时，由图 4 还可以看出，就误比特率性能而言，迭代稳定以前，迭代 $2k$(如 k=4)次的 Chase-MP 算法要明显优于迭代 k 次 Chase-SI 算法；而迭代稳定以后二者的误比特率性能基本相近。

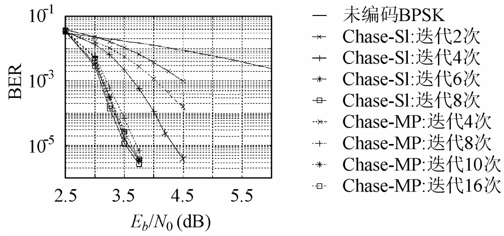

图 4 Chase-MP 与 Chase-SI 算法性能比较

综合而言，Chase-MP 算法要优于 Chase-SI 算法。若实际应用中，采用全并行处理的 Chase-MP 算法进行乘积码的译码，则其在迭代次数上稳定速度的减慢是完全能够得到有效补偿的，而且其总体所需的迭代稳定时间亦不会高于 Chase-SI 算法。因此，本文设计的 Chase-MP 算法完全适合于对乘积码进行全并行译码处理。

从Chase-MP算法的译码过程容易看出，与传统的Chase-SI算法相比，二分图给定后，Chase-MP算法不必考虑串行译码方式中各个分量译码器间的地址映射查找操作。特别是对于多维乘积码，以三维乘积码为例，按照传统的串行迭代译码方式，如图 5 所示，其中$\pi_{ij}(1\le i,\ j\le 3)$表示分量译码器$i$到分量译码器$j$的类似于交织或解交织的地址映射查找操作。由图 5 易见，串行迭代译码方式下，在外信息传递时需要在各分量译码器间进行大量、复杂的映射查找操作，而Chase-MP算法恰恰避免了这些繁琐的操作。因此，在将多维乘积码构造成相应GLD码的前提下，若将Chase-MP算法用于多维乘积码的译码，则其简便性将体现得尤为明显。

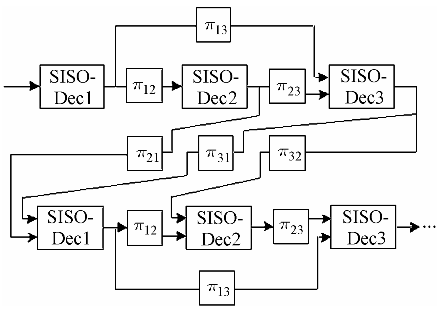

图 5 三维乘积码的串行译码方式

4 结束语

本文利用 GLD 码构造规则，给出了由汉明分量乘积码构造 GLD 码的一般方法，并结合分组码与 LDPC 码的译码算法，设计出一种新颖的可用于乘积码迭代译码的 Chase-MP 算法。该算法实际上采用的是一种并行处理的译码方式，需要强调的是，利用类似于本文给出的构造方法亦可对多维乘积码进行 GLD 码构造，因此该算法适合于一般的多维乘积码的译码。与传统的串行迭代 Chase-2 算法相比，Chase-MP 算法更加适用于对乘积码进行全并行译码处理，便于硬件实现，而且译码性能优于串行迭代 Chase-2 算法。

此外，由于 Chase-MP 算法基于二分图，整个算法的迭代译码过程均在二分图上完成，因此可以推断，适当设计乘积码，如对乘积码进行合适的伪随机交织，使其二分图上的环具有较长的环长，并使相应的稀疏矩阵具有较好的随机特性，这样势必会使由该稀疏矩阵定义的 LDPC 码获得很好的译码性能，同时亦会使采用 Chase-MP 算法译码的乘积码获得更好的性能。

参 考 文 献

[1] Elias P. Error-free coding, *IRE Trans. on Info. Theory*, 1954, IT-4 (4): 29 – 37.

[2] Meron P. Next generation SDTV &HDTV distribution system. Available from http://www.broadcastpapers.com /tvtran /BCA03 scopusNextGenSDTV&HDTV-print.htm.

[3] Macwilliams F J, Sloane N J A. The Theory of Error-Correcting Codes, Amsterdam. North-Holland, 1977: 567 – 580.

[4] Berror C, Glavieux A, Thitimajshima P. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo codes. In Proc.,IEEE Int. Conf. on Commun., Geneva, Seitzerland, May. 1993: 1064 – 1070.

[5] Hagenauer J, Offer E, Papke L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1996, 42 (2): 429 – 445.

[6] Hirst S A, Honary B, Markarian G . Fast Chase algorithm with an application in Turbo decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 2001, 49 (10): 1693 – 1699.

[7] Pyndiah R M. Near-optimum decoding of product codes: block turbo codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 1998, 46(8): 1003 – 1010.

[8] Chase D. A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1972, IT-18 (1): 170 – 182.

[9] Tanner R M. A recursive approach to low complexity codes. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1981, IT-27 (5): 533 – 547.

[10] Kschischang F R, Frey B J, Loeliger H A. Factor graph and the sum-product algorithm. *IEEE Trans.on Info. Theory*, 2001, 47 (2): 498 − 519.

[11] MacKay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrix. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999, 45 (2): 399 − 431.

[12] Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: networks of Plausible Inference. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1988: 177 − 184.

[13] Richardson T J, Urbanke R L . The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47 (2): 599 − 618.

[14] Boutros J, Pothier O, Zemor G . Generalized low density (Tanner) codes. In Proc. IEEE Int. Conf. Commun, Vancouver, Jun. 1999: 441 − 445.

[15] Lentmaier M, Zigangirov K Sh. On generalized low-density parity-check codes based on Hamming component codes. *IEEE Commun. Letters,* 1999, 3 (8): 248 − 250.

[16] Hirst S A, Honary B. Application of efficient Chase algorithm in decoding of generalized low-density parity-check codes. *IEEE Commun. Letters,* 2002, 6 (9): 385 − 387.

郑　贺：　男，1979 年生，博士生，研究方向为移动通信关键技术,包括信道编码、调制解调技术.

陆佩忠：　男，1961 年生，教授，博士后，博士生导师，研究方向为纠错编码、信息安全、图像处理.

胡捍英：　男，1961 年生，教授，博士后，博士生导师，研究方向为移动通信关键技术、通信信号处理.