

## 基于椭球不确定集约束的鲁棒自适应相干检测器

代保全 王彤\* 同亚龙 吴建新 保铮  
(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 针对存在导向矢量误差时自适应相干检测器(ACE)的检测性能下降问题, 该文提出一种基于椭球不确定集约束的鲁棒 ACE 设计方法。该方法在深入分析 ACE 检测器工作原理的基础上, 利用导向矢量的尺度变化不影响 ACE 检测器输出这一特点, 建立鲁棒 ACE 检测器模型并将其转化为凸优化问题, 最后采用牛顿-拉夫森方法对该问题进行求解。仿真实验结果表明, 该方法可有效提高 ACE 检测器对导向矢量误差的鲁棒性。

**关键词:** 雷达信号处理; 自适应相干检测器; 导向矢量误差; 椭球不确定集; 鲁棒检测

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)12-2969-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2014.00563

## Robust Adaptive Coherence Estimator Based on Ellipsoid Uncertainty Set Constraint

Dai Bao-quan Wang Tong Tong Ya-long Wu Jian-xin Bao Zheng  
(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Adaptive Coherence Estimator (ACE) often suffers considerable performance degradation in the presence of steering vector errors. In this paper, a robust ACE detector based on the ellipsoid uncertainty set constraint is proposed. A detailed analysis of ACE detector is first conducted, which results in an interesting observation that scaling of the steering vector does not affect the statistical test of ACE. With this property exploited, a model for designing robust ACE detector is constructed and is subsequently converted into a convex optimization problem. Then, the solution to the problem is given with the powerful Newton-Raphson method. Simulation results show that the robustness of the proposed detector against the steering vector errors can be improved significantly compared with the standard ACE.

**Key words:** Radar signal processing; Adaptive coherence estimator; Steering vector errors; Ellipsoid uncertainty set; Robust detector

### 1 引言

在雷达信号检测领域, 自适应相干检测器(Adaptive Coherence Estimator, ACE)因其良好的目标检测性能而受到了广泛的关注<sup>[1-5]</sup>, 它通过测量白化滤波后信号空间的能量与总能量的比值来判断回波中是否含有目标, 具有恒虚警(Constant False Alarm Rate, CFAR)特性<sup>[1,4]</sup>。在均匀环境或者部分均匀环境中, ACE 检测器与广义似然比检测(Generalized Likelihood Ratio Test, GLRT)等价, 可以看成是 Kelly 检测器的一种推广形式<sup>[2,3]</sup>。

对于 ACE 检测器来说, 通常假设目标导向矢量是先验已知的<sup>[1-5]</sup>, 即意味着信号子空间是确定的。然而, 在实际应用中, 由于受波束指向误差<sup>[6-8]</sup>及阵元幅相误差<sup>[9]</sup>等因素的影响, 导向矢量不可避免地

存在一定的误差, 导致传统 ACE 检测器的性能下降。文献[7]从广义似然比检测器角度出发, 推导了一种导向矢量估计方法, 但该方法仅适用于角度误差。文献[8]对构建的信号协方差矩阵进行特征分解, 找出信号子空间, 然后将目标导向矢量表示成信号子空间基矢量的加权和, 通过计算加权系数即可以估计出目标导向矢量, 但该方法也只适用于波束指向误差情况。文献[9]利用地面回波信号的特点, 提出了一种同时估计阵列幅度误差和相位误差的方法。文献[10,11]将导向矢量误差估计转化成二次约束二次规划(Quadratically Constrained Quadratic Programming, QCQP)问题, 然后利用凸优化工具包求解该问题, 该方法需要已知干扰协方差矩阵。文献[12]利用导向矢量与滤波器权矢量之间的关系, 提出了迭代对角加载采样协方差矩阵求逆(Iterative diagonally Loaded Sample Matrix Inverse, ILSMI)算法。文献[13,14]利用不确定集对导向矢量误差进行约束, 将导向矢量估计问题转化为关于对角加载

2014-04-30 收到, 2014-07-03 改回

国家自然科学基金(61372133, 61101241)和中央高校基本科研业务费专项资金(K50511020008)资助课题

\*通信作者: 王彤 twang@mail.xidian.edu.cn

系数的函数, 然后利用牛顿迭代技术获得导向矢量的最优解。文献[15]针对非高斯信号特点, 提出一种基于  $l_p$  模值约束的鲁棒导向矢量估计方法, 并采用线性规划方法进行了求解。

上述方法所建立的导向矢量模型与导向矢量的尺度有关, 而 ACE 检测器与导向矢量的尺度无关, 因此并不适用于改善 ACE 检测器对导向矢量误差的敏感性。针对这种情况, 本文给出了一种鲁棒 ACE 检测器的设计方法。首先假设真实导向矢量位于一椭球不确定集<sup>[14]</sup>内, 然后根据 ACE 检测器的特点, 将鲁棒 ACE 设计问题转化为凸优化问题, 最后采用牛顿-拉夫森方法求解该优化问题。本文方法适用于包括波束指向误差以及阵元幅相误差在内的多种导向矢量误差情况, 仿真实验验证了该方法的有效性。

## 2 信号模型

考虑一  $N$  元均匀线性阵列天线。假设天线同时接收到  $K$  个远场窄带信号。不失一般性, 假定其中存在 1 个期望信号, 其余  $K-1$  个信号为干扰信号, 则  $t$  时刻的阵列输出  $\mathbf{x}(t) \in C^{N \times 1}$  可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0(\theta) s_0(t) + \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{a}_k(\theta) s_k(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{a}_0(\theta)$  和  $s_0(t)$  分别表示期望信号的导向矢量及对应的波形,  $\mathbf{a}_k(\theta)$  和  $s_k(t)$  分别表示第  $k$  个干扰信号的导向矢量及对应的波形,  $\mathbf{n}(t)$  表示零均值加性高斯白噪声。

假设各信号之间相互独立, 则阵列输出  $\mathbf{x}(t)$  的相关矩阵  $\mathbf{R}(t)$  可以表示为

$$\mathbf{R}(t) = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{R}_s(t) + \mathbf{R}_{i+n}(t) \quad (2)$$

式中  $\mathbf{R}_s(t)$  表示期望信号自相关矩阵,  $\mathbf{R}_{i+n}(t)$  表示干扰加噪声自相关矩阵, 上标  $H$  表示共轭转置运算。则 ACE 检测器可以表示为<sup>[1-5]</sup>

$$t_{ACE} = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1}(t) \mathbf{x}(t)|^2}{\left[ \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1}(t) \mathbf{a}(\theta_0) \right] \left[ \mathbf{x}^H(t) \mathbf{R}_{i+n}^{-1}(t) \mathbf{x}(t) \right]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta \quad (3)$$

在实际情况下,  $\mathbf{R}_{i+n}(t)$  通常是未知的, 需要从训练样本中估计出来, 即用采样协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}(t)$  代替  $\mathbf{R}_{i+n}(t)$ 。

$$\hat{\mathbf{R}}_{i+n}(t) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(t_l) \mathbf{x}^H(t_l) \quad (4)$$

式中  $L$  表示训练样本个数。

经整理后, 式(3)可以写成式(5)形式<sup>[1,2]</sup>:

$$\cos^2(\bar{\theta}) = \frac{|\bar{\mathbf{a}}_0^H(\theta) \bar{\mathbf{x}}(t)|^2}{\|\bar{\mathbf{a}}_0(\theta)\|_2^2 \|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2^2} \quad (5)$$

式中  $\|\cdot\|_2$  表示对矢量取 2 范数运算,  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{R}_{i+n}^{-1/2}(t) \mathbf{x}(t)$  表示白化滤波后的数据矢量,  $\bar{\mathbf{a}}_0(\theta) = \mathbf{R}_{i+n}^{-1/2}(t) \mathbf{a}_0(\theta)$  表示白化滤波后的导向矢量。式(5)表明 ACE 检测器的输出统计量等于白化后的数据矢量与导向矢量之间的夹角余弦平方  $\cos^2(\bar{\theta})$ , 如图 1 所示。研究表明  $\cos^2(\bar{\theta})$  服从  $\beta$  分布<sup>[1,4]</sup>。通过比较  $\cos^2(\bar{\theta})$  与检测门限  $\eta$  的大小, 可以判定阵列天线接收到的回波中是否含有目标。若  $\cos^2(\bar{\theta})$  大于  $\eta$  则有目标; 如果小于  $\eta$ , 则没有目标。由此可见, 传统 ACE 检测器是根据经过白化滤波后的回波数据与假定的目标导向矢量之间的相干程度来判断目标存在与否, 因此目标导向矢量的准确性对 ACE 检测器的性能有至关重要的影响。

实际上, 式(3)也可以表示成式(6)形式:

$$t_{ACE} = \bar{\mathbf{x}}^H(t) \mathbf{P}_a \bar{\mathbf{x}}(t) / \|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2^2 \quad (6)$$

式中  $\mathbf{P}_a = \bar{\mathbf{a}}_0(\theta) [\bar{\mathbf{a}}_0^H(\theta) \bar{\mathbf{a}}_0(\theta)]^{-1} \bar{\mathbf{a}}_0^H(\theta)$  表示白化滤波后的信号子空间。

由式(6)可知, ACE 检测器的检验统计量是两部分能量的比值, 分子表示信号空间的能量, 而分母表示总能量。当导向矢量精确已知时, 可以计算出信号  $\mathbf{P}_a$ , 进而准确估计出落入信号空间的能量占总能量的百分比。但导向矢量含有误差时, 估计出的  $\mathbf{P}_a$  与真实值有一定偏差, 则不能正确估算真实信号能量, 导致 ACE 检测器的性能下降。对于实际阵列来说, 受波束指向不准、阵列幅相误差等因素的影响, 导向矢量不可避免地存在误差, 因而研究如何自适应地从回波数据中估计出真实的目标信号导向矢量, 进而改善 ACE 检测器的鲁棒性, 有着十分重要的现实意义。

## 3 鲁棒 ACE 检测器算法原理

近些年来, 基于不确定集约束的鲁棒自适应波束形成技术引起了很大的关注<sup>[12-14]</sup>。假设真实导向矢量在一不确定集内, 然后从中寻找一个最优导向矢量, 使波束形成器的输出性能最优, 从而提高自

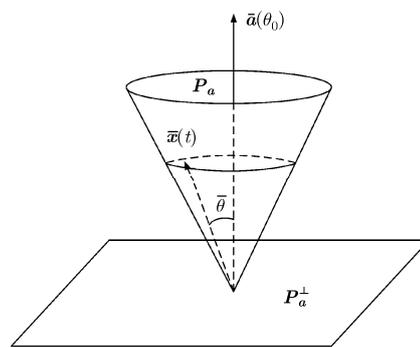


图 1 ACE 检测器示意图

适应波束形成器对导向矢量误差的鲁棒性。这类导向矢量估计技术主要是从自适应波束形成或者谱估计角度进行推导的,不适合直接用于鲁棒 ACE 检测器的设计。本文给出了一种基于椭球不确定集约束的鲁棒 ACE 检测器设计方法。

### 3.1 算法提出

椭球不确定集  $S$  定义为<sup>[14]</sup>

$$[\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}_0(\theta)]^H \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}_0(\theta)] \leq 1 \quad (7)$$

式中  $\mathbf{a}(\theta)$  表示椭球体内任一导向矢量,  $\mathbf{a}_0(\theta)$  表示椭球体中心,  $\mathbf{B}$  为正定矩阵, 它决定了椭球体长半轴。显然, 当  $\mathbf{B} = \varepsilon^2 \mathbf{I}$  时, 椭球不确定集约束退化为球不确定集约束<sup>[13]</sup>, 即

$$\|\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}_0(\theta)\|_2 \leq \varepsilon \quad (8)$$

式中  $\varepsilon$  表示球半径。从这个意义上讲, 球不确定集约束是椭球不确定集约束的一个特例, 椭球不确定集约束更具一般性。

由式(3)和式(5)可知, 如果假定的导向矢量  $\mathbf{a}_0(\theta)$  与真实导向矢量一致, 则 ACE 检测器的输出统计量  $t_{ACE}$  可以取得最大值。但当导向矢量存在误差时,  $t_{ACE}$  变小。为了解决这一问题, 我们首先假定真实导向矢量位于椭球体  $S$  内, 然后在其中寻找使  $t_{ACE}$  最大的导向矢量, 这样即可改善 ACE 检测器的鲁棒性。为此, 建立如式(9)的优化问题:

$$\left. \begin{aligned} & \max_{\mathbf{a}(\theta)} \frac{|\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{x}(t)|^2}{[\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{a}(\theta)] [\mathbf{x}^H(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t)]} \\ & \text{s.t. } [\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}_0(\theta)]^H \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}_0(\theta)] \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

为了叙述简洁, 在下文中略去符号  $t$  和  $\theta$ 。对  $\mathbf{B}^{-1}$  进行 Cholesky 分解, 即

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{D}^H / \varepsilon^2 \quad (10)$$

则式(9)中的椭球不确定集约束可以转化为如式(11)的球不确定集约束。

$$\|\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}_0\|_2 \leq \varepsilon \quad (11)$$

式中  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D}^H \mathbf{a}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{D}^H \mathbf{a}_0$ 。

下面以 2 维空间为例对式(11)进行说明, 如图 2 所示。图 2 中  $\hat{\mathbf{a}}$  表示球不确定集  $S$  内任意导向矢量,  $\hat{\mathbf{a}}_0$  表示球心,  $\hat{\theta}$  表示二者之间的夹角,  $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}_0$  表示误差矢量。对于 ACE 检测器来说, 导向矢量的任意尺度变换不影响 ACE 检测器的输出统计量, 因此可以对球不确定集内的任意  $\hat{\mathbf{a}}$  进行  $\kappa$  倍的伸缩处理。当  $\kappa = \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0 / \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2$  时, 误差矢量最小为  $\hat{\mathbf{e}}'$ , 对应的误差角度  $\bar{\theta}$  为  $\sin^{-1}(\|\hat{\mathbf{e}}'\|_2 / \|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2)$ 。

则式(11)可转化为式(12):

$$\|\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}})^{-1} \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0 - \hat{\mathbf{a}}_0\|_2 \leq \varepsilon \quad (12)$$

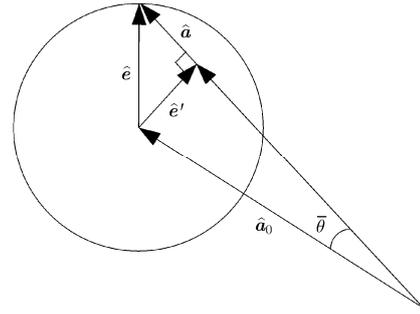


图 2 球不确定集约束转换示意图

从图 2 可以看出, 式(12)相当于将导向矢量约束在以  $\sin^{-1}(\varepsilon / \|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2)$  为半径的不确定角度空间内。经过化简后, 式(12)可写为

$$\sqrt{\|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2^2 - \varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2 \leq |\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0| \quad (13)$$

式中  $|\cdot|$  表示取绝对值运算。

将  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_0$  及式(13)代入式(9), 并忽略目标函数中的常数项后, 有

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{a}}} \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}} / \left| \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \right|^2 \\ & \text{s.t. } \sqrt{\|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2^2 - \varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2 \leq |\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0| \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{D}^H \mathbf{R} \mathbf{D}$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^H \mathbf{x}$ 。

观察式(14)可知, 目标函数可写成广义 Rayleigh 商的形式, 因而当  $\hat{\mathbf{a}}$  满足式(15)时, 该函数可以取得最小值  $1/(\hat{\mathbf{x}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{x}})$ 。

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}} \quad (15)$$

这时, 需要判断式(15)是否在给定的不确定集  $S$  内, 即是否满足式(13)。如果满足约束条件, 则式(15)即为所求的期望导向矢量。如果不满足约束条件, 则需要重新求解。对于式(14)中的目标函数来说, 虽然其分子与分母都是凸优化函数, 但它本身不是凸优化函数, 无法直接利用相关的优化工具进行求解。由于对导向矢量  $\hat{\mathbf{a}}$  进行任意尺度变换都不影响式(14)目标函数的计算结果, 故式(14)可进一步转化为式(16)的约束优化问题:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{a}}} \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}} \\ & \text{s.t. } \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} = 1 \\ & \sqrt{\|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2^2 - \varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2 \leq |\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0| \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这里, 我们采用 Lagrange 乘子算法<sup>[13,14]</sup>对式(16)进行求解。

$$\begin{aligned} L(\hat{\mathbf{a}}, \mu, \xi) = & \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}} + \mu \left( \gamma^2 \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2 - |\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}_0|^2 \right) \\ & + \xi \left( 2 - \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{a}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $\gamma = \sqrt{\|\hat{\mathbf{a}}_0\|_2^2 - \varepsilon^2}$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ 。

对式(17)进行整理有

$$L(\hat{\mathbf{a}}, \mu, \xi) = \left( \hat{\mathbf{a}} - \xi \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \right)^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}} \left( \hat{\mathbf{a}} - \xi \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \right) - \xi^2 \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} + 2\xi \quad (18)$$

式中  $\bar{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} + \mu\gamma^2 \mathbf{I} - \mu \hat{\mathbf{a}}_0 \hat{\mathbf{a}}_0^{\text{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}$ 。这里需要注意的是,  $\bar{\mathbf{R}}$  须为正定矩阵, 即  $\bar{\mathbf{R}} \succ 0$ 。

显然, 如果满足

$$\hat{\mathbf{a}} = \xi \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \quad (19)$$

则  $L(\hat{\mathbf{a}}, \mu, \xi)$  有最小值。

$$L(\hat{\mathbf{a}}, \mu, \xi) = -\xi^2 \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} + 2\xi \quad (20)$$

又因为  $\hat{\mathbf{a}}$  要满足式(16)中的等式约束, 故有

$$\hat{\xi} = 1 / \left( \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \right) \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)有

$$L(\hat{\mathbf{a}}, \mu, \hat{\xi}) = 1 / \left( \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \right) \quad (22)$$

由于在以  $\xi$  为自变量的式(20)中, 二次项的系数小于零, 对式(18)关于  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mu$  以及  $\xi$  的最小化处理等价于估计  $\mu$  使式(22)取得最大值<sup>[13]</sup>。因此, 式(16)等价于式(23)的约束:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mu} \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{R}} \succ 0 \end{array} \right\} \quad (23)$$

现在开始确定  $\mu$  的取值范围。

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C}) \hat{\mathbf{R}}^{-1/2} \quad (24)$$

式中  $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{R}}^{1/2} (\hat{\mathbf{a}}_0 \hat{\mathbf{a}}_0^{\text{H}} - \gamma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{R}}^{1/2}$ 。对  $\mathbf{C}$  作如下特征分解:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^{\text{H}} \quad (25)$$

式中  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  表示特征值矩阵, 且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ,  $\mathbf{U}$  表示对应的特征向量矩阵。则若要使  $\bar{\mathbf{R}}$  为正定矩阵, 必须满足下述条件:

$$\mu < 1/\lambda_1 \quad (26)$$

令  $f(\mu) = \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \bar{\mathbf{x}}$ , 分别计算函数  $f(\mu)$  作关于  $\mu$  的一阶导数及二阶导数, 有

$$f'(\mu) = \bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \bar{\mathbf{x}} \quad (27)$$

$$f''(\mu) = 2\bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{C})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \bar{\mathbf{x}} \quad (28)$$

显然,  $f(\mu)$  函数关于  $\mu$  的二阶导数大于零, 因此  $f(\mu)$  函数的一阶导数是单调递增函数。另一方面, 当  $\mu=1/\lambda_1$  时,  $\mathbf{I} - \mu \mathbf{C}$  是奇异函数, 有  $\lim_{\mu \rightarrow 1/\lambda_1} f'(\mu) = \infty$ 。故可以得出如下结论: 若  $f'(0) \geq 0$ , 则  $\mu = 0$  时,  $f(\mu)$  可以取得最小值  $\bar{\mathbf{x}}^{\text{H}} \hat{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{x}}$ ; 若  $f'(0) < 0$ , 则在区间  $[0, 1/\lambda_1)$  内  $f(\mu)$  必定可以取得最小值, 此时

将式(25)代入式(23), 有

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mu} \sum_{k=1}^N |z_k|^2 / (1 - \mu \lambda_k) \\ \text{s.t. } 0 \leq \mu < 1/\lambda_1 \end{array} \right\} \quad (29)$$

式中  $z_k$  表示矢量  $\mathbf{z} = \mathbf{U}^{\text{H}} \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \bar{\mathbf{x}}$  的第  $k$  个元素。利用牛顿-拉夫森方法<sup>[16]</sup>很容易对该优化问题进行求解, 然后再将  $\mu$  的估计值代入式(19), 即可以估计出导向矢量  $\hat{\mathbf{a}}$ 。

### 3.2 算法实施步骤

本文算法的实施步骤总结如下:

步骤 1 利用式(10)将椭球不确定集约束转化为球不确定集约束。

步骤 2 判断导向矢量的初始估计值  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}}$  是否在球不确定集内, 即是否满足式(13)。若  $\hat{\mathbf{x}}$  在球不确定集内, 则 ACE 检测器的输出值  $t_{\text{ACE}}$  为 1; 若  $\hat{\mathbf{x}}$  不在球不确定集内, 开始步骤 3。

步骤 3 计算  $\gamma$  值并对协方差矩阵  $\mathbf{C}$  进行特征分解, 然后确定  $\mu$  的取值范围。

步骤 4 判断  $f'(0) \geq 0$  是否成立。若成立, 则  $\hat{\mu} = 0$ ; 否则, 采用牛顿-拉夫森方法估算使  $f(\mu)$  函数值最小的  $\hat{\mu}$  值。

步骤 5 将  $\hat{\mu}$  代入式(19)计算导向矢量的估计值  $\hat{\mathbf{a}}$ 。

步骤 6 将  $(\mathbf{D}^{\text{H}})^{-1} \hat{\mathbf{a}}$  代入式(3)计算 ACE 检测器的输出值  $t_{\text{ACE}}$ 。

### 3.3 运算量分析

在本算法中, 主要的运算量消耗在矩阵分解(包括 Cholesky 分解和特征分解)以及矩阵求逆上, 此处我们对该算法每一步骤中所涉及到的主要运算量进行分析。步骤 1 中涉及到 Cholesky 分解, 其大约需要  $N^3/3$  次浮点运算; 步骤 3 中矩阵  $\mathbf{C}$  的计算涉及到一次 Cholesky 分解和两次矩阵相乘, 需要  $4N^3/3$  次浮点运算, 此外还涉及到一次特征值分解大约需要  $10N^3$  次浮点运算; 步骤 4 中的主要运算量消耗在  $f'(0)$  的计算上大约需要  $N^3$  次浮点运算; 步骤 5 中主要涉及到两次矩阵求逆运算, 如果采用 QR 分解来计算的话, 大约需要  $8N^3/3$  次浮点运算; 步骤 6 中的运算量主要涉及到矩阵求逆, 大约需要  $4N^3/3$  次浮点运算。因此, 本文算法大约需要  $17N^3$  次浮点运算。当阵元个数比较多时, 与传统 ACE 检测器具有相同的运算复杂度。实际上该算法的运算量有很大一部分消耗在矩阵特征分解上。需要说明的是在步骤 2 中, 若导向矢量的初始估计值  $\hat{\mathbf{x}}$  满足不确定集约束条件, 则本文算法与传统 ACE 检测器运算量相同。

#### 4 仿真分析

本节通过仿真实验来验证所提 ACE 检测器的鲁棒性。在实验中, 利用一个 25 元等距线阵来模拟阵列天线, 阵元间距为半波长。除了期望信号外, 天线还接收到 4 个旁瓣干扰信号, 角度分别为:  $-45^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $40^\circ$  及  $60^\circ$ , 对应的干噪比分别为: 20 dB, 35 dB, 30 dB 和 40 dB。为了便于分析, 在实验中, 采用球不确定集模型对导向矢量误差进行约束, 并且设  $\mathbf{B} = 0.1\mathbf{I}$ 。另外, 为了与本文方法进行对比, 同时也给出了标准 ACE 检测器(SACE)的处理结果。

**实验 1** 考虑波束指向误差情况。在本组实验中, 假定期望信号方向固定为  $\theta_0 = 0^\circ$ , 而真实方向在  $-5^\circ \sim 5^\circ$  之间变化, 信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)为 20 dB。图 3 示出了两种检测器在不同波束指向误差  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  时的检测概率情况。从图 3 中可以看出, 当波束指向误差较大时, 如  $|\Delta\theta| > 5^\circ$ , 两种检测器都无法检测到信号, 这说明 ACE 检测器有较强的旁瓣信号抑制能力。而随着波束指向误差的减小, 两种检测器的检测性能都有所提高。另一方面, 从图 3 还容易看出, 当存在波束指向误差时, 本文所给出的鲁棒 ACE 检测器(RACE)的检测性能要明显好于传统 ACE 检测器, 说明本文所设计的 ACE 检测器对波束指向误差有更好的鲁棒性。需要指出的是本文算法虽然改善了 ACE 检测器的鲁棒性, 但对于波束指向误差在  $[3^\circ, 5^\circ]$  区间的目标的检测性能不太好, 这主要是由两方面的原因所致: 一方面可能是球半径不够大, 导致无法对所有可能的导向矢量进行约束; 另一方面可能是这一角度范围内的目标偏离主波束中心较远所致。对于当前系统参数来说, 主波束 3 dB 波束宽度大约为  $4.1^\circ$  左右, 使得角度误差在  $[3^\circ, 5^\circ]$  区间的目标位于主波束 3 dB 宽度之外, 导致目标相参积累后的实际 SNR 下降过快, 从而降低了检测器的检测性能。

**实验 2** 考虑同时存在波束指向误差和阵列幅相误差情况。在本组实验中, 假设第  $i$  个阵元的复增

益可以表示成:  $v_i = (1 + \varsigma_i)e^{j\Delta\varphi_i} \approx 1 + \varsigma_i + j\Delta\varphi_i$ , 则该阵元的幅相误差定义为  $\Delta\rho_i = \varsigma_i + j\Delta\varphi_i$ 。实验中, 假设  $\Delta\rho_i$  服从均值为零、方差为 0.1 的复高斯分布, 其余条件同实验 1。图 4 给出了在有阵列幅相误差的情况下, 两种检测器的检测概率随波束指向误差  $\Delta\theta$  的变化情况。从图 4 可以看出当波束指向误差较大时, 两种检测器的检测概率都明显偏低; 而随着波束指向误差的逐渐减小, 两种检测器的检测性能逐渐提高。从该图很容易看出, 在同时存在波束指向误差和阵元幅相误差的情况下, 本文所给出的检测器性能要明显好于传统 ACE 检测器。对比图 3, 我们可以看出与仅有波束指向误差的情况对比, 当两种误差同时存在时, 传统 ACE 检测器的检测性能进一步下降, 而本文所提 ACE 检测器的性能基本不变, 说明其具有很强的鲁棒性。

**实验 3** 考虑检测器随输入信噪比的变化情况。为了衡量两种检测器对不同输入功率信号的检测性能, 在本组实验中输入目标信号的信噪比在  $-20 \sim 20$  dB 之间变化。由实验 1 和实验 2 可知, 在当前系统参数情况下, 当波束指向误差大于  $3^\circ$  时, 两种检测器都无法可靠检测, 因此在本组实验中, 约束目标信号的真实方向在  $[-3^\circ, 3^\circ]$  之间随机变化。另外, 我们还考察了同时存在阵列幅相误差时的情况, 幅相误差的参数与实验 2 相同。图 5(a)给出了无阵列幅相误差时两种检测器的检测概率随输入信号信噪比的变化情况; 图 5(b)给出了两种误差同时存在时的检测概率随输入信号信噪比的变化情况。从图 5 可以看出, 随着输入信噪比的增加, 两种检测器的检测概率逐渐提高。对比图 5(a)与图 5(b), 容易发现当存在导向矢量误差时, 本文所提检测器的检测概率明显要好于传统的 ACE 检测器, 这是因为在本文所提鲁棒 ACE 检测器中, 导向矢量是数据依赖的, 相较于固定的导向矢量来说, 其更接近于期望的导向矢量, 对误差的适应能力更强。

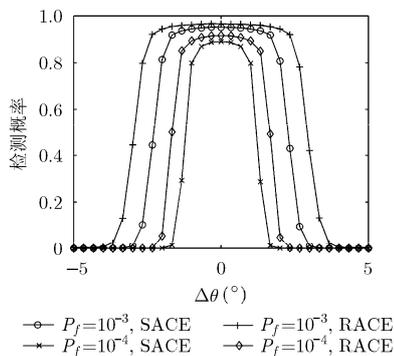


图 3 检测概率随指向误差的变化情况

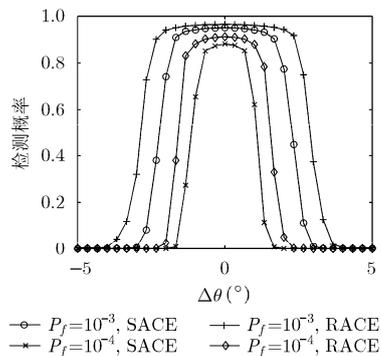


图 4 存在幅相误差时, 检测概率随指向误差的变化情况

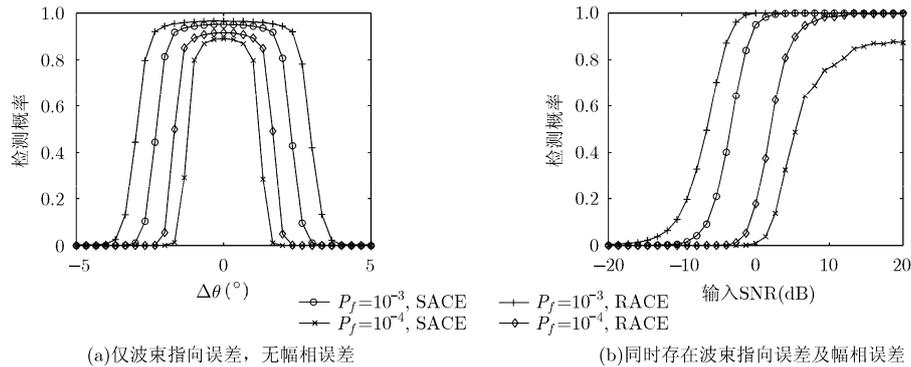


图 5 检测概率随输入信噪比的变化情况

## 5 结束语

针对存在导向矢量误差时 ACE 检测器性能下降这一问题,在深入分析 ACE 检测器的工作机理及其影响参数的基础上,本文提出了一种基于椭球不确定集约束的鲁棒 ACE 检测器设计方法。利用导向矢量的尺度不影响输出 ACE 检测器输出这一特性,将非凸的鲁棒 ACE 检测器设计问题转化为凸优化问题,并给出了求解该问题的具体实施步骤。仿真结果表明,本文所给出的 ACE 检测器具有较好的导向矢量误差适应能力,能够在有效抑制旁瓣目标的同时,降低检测器对导向矢量误差的敏感性。需要说明的是本文方法在给定椭球不确定集的情况下,可以设计出具有较强鲁棒性的 ACE 检测器,但如何根据实际导向矢量误差情况构建适当的椭球不确定集这一问题并没有涉及,还需进一步研究。

### 参考文献

- [1] Kraut S, Scharf L, and Butler R. The adaptive coherence estimator: a uniformly most-powerful-invariant adaptive detection statistic[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(2): 427-438.
- [2] Bidon S, Besson O, and Tournet J. The adaptive coherence estimator is the generalized likelihood ratio test for a class of heterogeneous environments[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, 15: 281-284.
- [3] Wang P, Sahinoglu Z, Pun M, et al. Knowledge-aided adaptive coherence estimator in stochastic partially homogeneous environments[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(3): 193-196.
- [4] Raghavan R. Maximal invariants and performance of some invariant hypothesis tests for an adaptive detection problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(14): 3607-3619.
- [5] Liu Jun, Zhang Zi-jing, Shui Peng-lang, et al. Exact performance analysis of an adaptive subspace detector[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(9): 4945-4950.
- [6] Hossain M, Milford G, Reed M, et al. Efficient robust broadband antenna array processor in the presence of look direction errors[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(2): 718-727.
- [7] De Maio A, De Nicola S, Farina A, et al. Adaptive detection

of a signal with angle uncertainty[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2010, 4(4): 537-547.

- [8] Zhang Wei, Wang Ju, and Wu Si-liang. Robust Capon beamforming against large DOA mismatch[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(4): 804-810.
- [9] Liu Ai-fei, Liao Gui-sheng, Ma Lun, et al. An array error estimation method for constellation SAR systems[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2010, 7(4): 731-735.
- [10] Jia Wei-min, Jin Wei, Zhou Shu-hua, et al. Robust adaptive beamforming based on a new steering vector estimation algorithm[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(9): 2539-2542.
- [11] Khabbazibasmenj A, Vorobyov S A, and Hassanien A. Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation with as little as possible prior information[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(6): 2974-2987.
- [12] 金伟, 贾维敏, 姚敏立. 迭代对角加载采样矩阵求逆鲁棒自适应波束形成[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(5): 1120-1125.
- [13] Jin Wei, Jia Wei-min, and Yao Min-li. Iterative diagonally loaded sample matrix inverse robust adaptive beamforming[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(5): 1120-1125.
- [14] Li Jian, Stoica P, and Wang Zhi-song. Doubly constrained robust Capon beamformer[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2407-2423.
- [15] Lorenz R and Boyd S. Robust minimum variance beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(5): 1684-1696.
- [16] Jiang Xue, Zeng Wen-jun, Yasotharan A, et al. Robust Beamforming by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1834-1849.
- [17] Press W, Teukolsky S, Vetterling W, et al. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing[M]. 2nd Ed. New York: Cambridge University Press, 1992: 456-462.

代保全: 男, 1985 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空时自适应信号处理。

王 彤: 男, 1974 年生, 教授, 研究方向为机载雷达运动目标检测、合成孔径雷达成像。

同亚龙: 男, 1987 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空时自适应信号处理、雷达成像和动目标检测。

吴建新: 男, 1982 年生, 副教授, 研究方向为空时自适应信号处理、雷达成像及动目标检测。

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 研究方向为自适应信号处理、阵列信号处理、雷达成像和目标识别等。