

一种基于有序二元决策图和布尔函数性质计算网络可靠性的算法

熊飞^{*①} 乔迪^② 王宏祥^② 赵子岩^① 杨洪^① 沈亮^①

^①(国家电网公司信息通信分公司 北京 100761)

^②(北京邮电大学信息与通信工程学院 北京 100876)

摘要: 有序二元决策图(OBDD)被广泛用到网络可靠度的计算中, 在基于 OBDD 计算网络可靠度时, 其计算时间主要取决于参与操作的 OBDD 的大小, 而 OBDD 的大小严重依赖于 OBDD 的变量序。该文根据布尔函数的性质和 OBDD 原理提出一种优化计算网络可靠性的算法(BF-OBDD), 提高计算网络可靠性的效率。实验结果表明改进的算法有较少的 OBDD 节点数量, 在计算网络可靠性时, 花费的时间较少。

关键词: 计算机网络; 可靠性; 网络拓扑图; 有序二元决策图; 变量序; 布尔函数

中图分类号: TN915

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)11-2786-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2014.00176

A Novel Network Reliability Evaluating Algorithm with Ordered Binary Decision Diagram Based on Boolean Function

Xiong Fei^① Qiao Di^② Wang Hong-xiang^② Zhao Zi-yan^① Yang Hong^① Shen Liang^①

^①(State Grid Information & Telecommunication Co., Ltd, Beijing 100761, China)

^②(School of Information and Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Ordered Binary Decision Diagram (OBDD) is commonly used in network reliability calculation. When evaluating the network reliability based on OBDD, computation time mainly depends on the size of the operating OBDD, which mostly relies on the variable ordering of OBDD. An algorithm is called BF-OBDD which is considered as the Boolean Function-OBDD, and it is the optimization algorithm for computing the reliability of the network. This paper shows that the reliability of network can be improved considerably by using of the proposed BF-OBDD algorithm. The experimental results demonstrate that the improved algorithm has less OBDD node numbers which cost less time when calculating the network reliability.

Key words: Computer networks; Reliability; Network topology; Ordered Binary Decision Diagram (OBDD); Variable order; Boolean function

1 引言

随着网络的快速发展, 网络的可靠性在网络分析和设计中越来越重要, 成为定量计算和定性分析中非常重要的性能指标。复杂网络一旦出现故障就会导致灾难性的后果。在 IEEE90 标准中把网络可靠性定义为“网络在规定时间内和规定条件下完成它所需要完成功能的能力”。本文基于有序二元决策图(Ordered Binary Decision Diagram, OBDD)算法对网络连通可靠性进行了分析。

目前国内外学者对网络可靠性计算进行了大量的研究, 主要分为两种类型, 第 1 种是枚举最小路

径集或最小割集^[1]。最小路径集是包含所有最小路径的集合。当最小路径集中至少有一条最小路径是正常工作的, 则表示网络是正常工作的。将网络可靠度表示为全部最小路径集的并, 然后采用容斥原理法或不变化算法对其进行处理。这种方法在计算复杂网络的可靠度时, 效率很低。第 2 种是基于网络拓扑图^[2], 通过对网络拓扑图中的边进行逐一分析, 当边正常工作时, 则压缩与该边相连的两端为一个节点, 当边故障时, 则删除该边。以此原则来分析网络的可靠性。当网络复杂, 该算法需要分析很多条边, 计算效率低。

自文献[3]于 1978 年提出全新的数据结构二元决策图(Binary Decision Diagram, BDD)以来, BDD 被广泛用于网络可靠度的计算中^[4]。基于 BDD 计算网络可靠度的算法具有节省数据结构空间和时间计

2014-01-26 收到, 2014-05-15 改回

国家 863 计划项目(2012AA011302), 国家科技重大专项(2012ZX03003007)和国家电网公司科技项目(SGIT2012335)资助课题

*通信作者: 熊飞 xiongfei@sgcc.com.cn

算效率高的优点。在基于 OBDD 计算网络可靠度时,其计算时间主要取决于参与操作的 OBDD 的大小,而 OBDD 的大小严重依赖于 OBDD 的变量序^[5]。文献[6]提出基于网络拓扑图得到变量序来计算网络可靠性。本文根据网络拓扑图和布尔函数的性质提出一种优化的基于网络拓扑图的变量排序算法(Boolean Function-OBDD, BF-OBDD),并与文献[6]提出的算法和基于网络拓扑图的深度优先算法进行比较,结果表明本算法产生的节点数较少,花费的时间较低。

2 OBDD 原理

2.1 BDD

BDD 是布尔函数的图形表示形式, BDD 采用二叉树形式表示一个布尔函数。

定义 1 BDD 是有向的、节点具有标号的二叉树 (V, N) , 其中 V 表示节点集, N 表示标号集。 V 中包含两类节点: 具有节点值 $\text{value}(v) \in \{0, 1\}$ 的叶节点和具有标号 $\text{index}(v) \in N$ 的内部节点, 内部节点有两个子节点: 左子节点 $\text{high}(v)$ 和右子节点 $\text{low}(v)$ 。其中对于内部节点 v , 若左子节点也是内部节点, 则 $\text{index}(v) < \text{index}(\text{high}(v))$ 。同样, 若右子节点也是内部节点, 则 $\text{index}(v) < \text{index}(\text{low}(v))$ 。

定义 2 一个 BDD 中以节点 v 为根的子树表示的布尔逻辑函数 f_v 为

(1) 当 v 是叶节点时, $f_v = \text{value}(v) \in \{0, 1\}$ 。

(2) 当 v 是具有标号 $\text{index}(v) = i$ 的内部节点时, 则 f_v 可以表示为^[7]

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_i \cdot f_{\text{low}(v)}(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_i \cdot f_{\text{high}(v)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

由上述定义 1 可看出, BDD 是一个有根节点的有序二叉树, 每个分支代表节点变量的一次取值(左支取 1, 右支取 0)。从根节点出发到叶结点的每条路径都表示布尔函数中各变量的一次赋值。

2.2 OBDD

有序二元决策图(OBDD)和二元决策图(BDD)的区别为 OBDD 有确定的变量序^[8]。即任一有向路径上的变量 x_1, x_2, \dots, x_n 均以变量序 Γ 所规定的次序依次出现。

在有序二元决策图(OBDD)中, 若节点满足以下两种性质, 则称节点是相等的^[9]:

(1) 两个叶节点的值对应相等。

(2) 对于 $u.\text{var} = v.\text{var}$ 的不同内部节点 u 和 v , 若 $u.\text{high} = v.\text{high}$ 且 $u.\text{low} = v.\text{low}$ 。

其中 var 表示节点 u 的标记变量, high 表示节点 u 的左子节点, low 表示节点 u 的右子节点。

对于满足上述条件的 OBDD 节点, 可以应用如下简化规则, 有效地简化 OBDD 结构^[10]:

(1) 将叶节点为 1 的节点合并成一个节点, 将叶节点为 0 的节点合并成一个节点。

(2) 对内部节点 u , 如果 $u.\text{low} = u.\text{high}$, 则删除节点 u , 并将节点 u 的父节点直接连接至 $u.\text{low}$ 所对应的节点。

(3) 对内部节点 u 和 v , 如果 $u.\text{var} = v.\text{var}$, $u.\text{low} = v.\text{low}$ 且 $u.\text{high} = v.\text{high}$, 则删除节点 u , 并将节点 u 的父节点直接连接至节点 v 。

3 最小路径集及布尔函数性质

3.1 最小路径集基本原理

网络是由一些节点以及连接某些节点对之间的边组成的一个图形。从指定的节点 A , 经过一边序列(或其中的一部分边)可以到达节点 B , 则称这个边序列为从 A 到 B 的一条路径。从节点 A 到节点 B 的边序列称为一条最小路径, 则满足: (1) 它是一条路径; (2) 最小性。即从这个边序列中除去任意一条边后它即不是从 A 到 B 的路径, 最小路径中包含的边数称为它的长度^[11]。

假设网络系统有 n 条最小路径, 第 i 条最小路径表示为 $L_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。基于 OBDD 计算网络可靠性的基本思想: 找出在网络中所求两节点的所有最小路径集 L_1, L_2, \dots, L_n , 两节点连通正常表示至少有一条最小路径正常工作, 用 F 表示网络正常工作时的逻辑结构函数, 则有

$$F = \bigcup_{i=1}^n L_i \quad (2)$$

3.2 布尔函数性质

设 a, b 是布尔函数, 根据布尔函数的定义, 则有布尔函数的基本性质:

(1) (吸收律) $a + ab = a$;

(2) (0-1 律) $a \cdot 0 = 0, a + 1 = 1, a \cdot 1 = a$ 。

布尔函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在不同输入模式下形成一个布尔函数集合, 成为该布尔函数的函数族, 并记为 $\#f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, OBDD 是用于表示布尔函数族 $\#f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一颗二叉树, 其中 OBDD 中的内部节点对应于某一输入下的布尔函数^[12]。对于 $\text{index}(v) = i$ 的 OBDD 内部节点的左分支, 即左分支的父节点对变量 x_i 取 1, 根据布尔函数 0-1 律, 左分支对应的是不含有变量 x_i 的布尔函数。消去变量 x_i 后的左分支, 若存在 $a + ab$ 式子, 由布尔函数吸收律可消去 ab , 简化布尔函数转化为 OBDD 的计算复杂度。

4 基于 OBDD 计算网络可靠性算法

4.1 基于网络拓扑图得到 OBDD 变量序

由第 3.2 小节提到布尔函数吸收律的性质, 本文提出基于网络拓扑图得到 OBDD 变量序的算法, 算法步骤如下:

步骤 1 从网络拓扑图中找出从源点到目的节点的最长最小路径, 并将其边依次排在变量排序的最后;

步骤 2 从网络拓扑图中找出从源点到目的节点的最短最小路径, 将最短最小路径中未出现在变量排序中的边依次排在变量排序的最前面;

步骤 3 继续搜索网络拓扑图中的最短最小路径, 将该最小路径中未出现在变量序的边排在已存变量序之后。若无最短最小路径则转到步骤 4;

步骤 4 从网络拓扑图中找出从源点到目的节点的次短最小路径, 将最短最小路径中未出现在变量排序中的边, 放在已存变量序的后面;

步骤 5 继续搜索网络拓扑图中的次短最小路径, 将该最小路径中未出现在变量序的边排在已存变量序之后。若无次短最小路径则转到步骤 6;

步骤 6 按照最小路径的长度从短到长对最小路径依次进行选择, 直到网络中所有的边都放进变量序中。

其中若有相同长度的最小路径, 则根据最小路径中边的排序依次比较边的编号, 先选择边的编号大的最小路径。

由布尔函数的吸收律 $a + ab = a$ 的性质, 本算法的基本思想: 先考虑出现在最短最小路径且不在最长最小路径的边, 最后再处理出现在最长最小路径的边。根据本算法, 当对 OBDD 节点 1 分支取值的时候, 网络的逻辑结构函数先对出现在最短最小路径且不在最长最小路径的边进行取 1, 根据 $a \cdot 1 = a$, 当网络规模很大时, 经过对该条边取 1 值可以得到包含在最长最小路径的边序列, 根据 $a + ab = a$, 可以将最长最小路径约去, 依次对出现在较短最小路径的边取 1 值, 可以约去大量的最长最小路径和次长最小路径, 减少 OBDD 节点数量, 快速到达 OBDD 的叶节点 1, 降低计算复杂度。

4.2 计算网络可靠性的步骤

步骤 1 由网络拓扑图求最小路径集, 当网络中节点数很大时, 邻接矩阵往往是稀疏矩阵, 因此用邻接矩阵求最小路径集时要大容量去存储并进行运算, 本文采用节点遍历法来求得最小路径集。设有 n 条最小路径集, 则逻辑结构函数为

$$F = \sum_{i=1}^n L_i \quad (3)$$

步骤 2 由网络拓扑图, 结合本文提出的算法得到 OBDD 变量序;

步骤 3 依据得到的 OBDD 变量序将逻辑结构函数用 OBDD 表示, 本文在仿真中用哈希表来存储 OBDD 节点^[13]。用哈希表来存储 OBDD 节点能保证生成的 BDD 节点是唯一的, 并且能提高查找速度;

步骤 4 从 OBDD 的根节点搜索到叶节点 1 的路径, 可得到逻辑结构函数的不变化结果;

步骤 5 由步骤 4 可得到网络可靠性计算符号表达式: $R_s = \text{Prob}(f)$ 。

5 算法示例和仿真

以图 1 所示的网络拓扑图为例进行说明, 其中节点 1 为源节点, 节点 6 为目的节点。

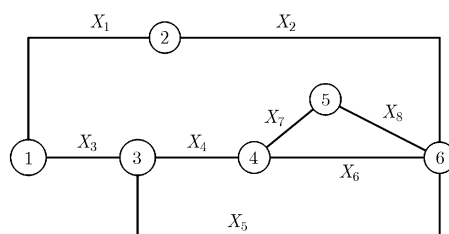


图 1 网络拓扑图

5.1 OBDD 变量序

(1) 首先求出节点 1 到节点 6 的最小路径集为 $\{X_3X_4X_7X_8, X_3X_4X_6, X_3X_5, X_1X_2\}$ 。

(2) 将最长最小路径 $X_3X_4X_7X_8$ 依次放进变量序 Γ 的最后。

(3) 考虑最短最小路径 X_3X_5, X_1X_2 , 由于 X_3 的编号比 X_1 大, 所以先考虑最小路径 X_3X_5 , 因为 X_3 已出现在变量序中, 所以排除 X_3 , 将 X_5 放在变量序 Γ 的最前面。

(4) 处理最小路径 X_1X_2 , 因 X_1X_2 在变量序中未出现, 故将变量序 X_1X_2 依次放在已存变量序后面。

(5) 考虑最小路径 $X_3X_4X_6$, 只有 X_6 未出现在变量序中, 所以将 X_6 放在变量 X_2 的后面。

所以最后得到变量序: $\Gamma = \{X_5, X_1, X_2, X_6, X_3, X_4, X_7, X_8\}$

5.2 计算网络可靠性

(1) 首先求出节点 1 到节点 6 的最小路径集为 $\{X_3X_4X_7X_8, X_3X_4X_6, X_3X_5, X_1X_2\}$ 。由最小路径集得到逻辑结构函数

$$F = X_3X_4X_7X_8 + X_3X_4X_6 + X_3X_5 + X_1X_2$$

(2) 按照 OBDD 的变量序对逻辑结构函数进行不变化处理得到 OBDD, 如图 2 所示。

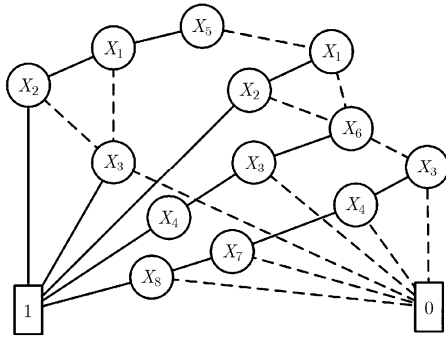


图 2 OBDD 图形

(3)在 OBDD 图中搜索从根节点到叶节点 1 的路径, 得到不交化的逻辑结构函数为

$$f = X_5 X_1 X_2 + X_5 X_1 \bar{X}_2 X_3 + X_5 \bar{X}_1 X_3 + \bar{X}_5 \bar{X}_1 X_6 X_3 X_4 + \bar{X}_5 X_1 \bar{X}_2 X_6 X_3 X_4 + \bar{X}_5 X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_6 X_3 X_4 X_7 X_8 + \bar{X}_5 \bar{X}_1 \bar{X}_6 X_3 X_4 X_7 X_8$$

(4)网络可靠性计算符号表达式为

$$R_s = R(X_5)R(X_1)R(X_2) + R(X_5)R(X_1)R(\bar{X}_2)R(X_3) + R(\bar{X}_5)R(\bar{X}_1)R(X_6)R(X_3)R(X_4) + R(\bar{X}_5)R(X_1)R(\bar{X}_2)R(\bar{X}_6)R(X_3)R(X_4)R(X_7) \cdot R(X_8) + R(\bar{X}_5)R(\bar{X}_1)R(\bar{X}_6)R(X_3)R(X_4)R(X_7) \cdot R(X_8) + R(\bar{X}_5)R(X_1)R(\bar{X}_2)R(X_6)R(X_3)R(X_4) + R(X_5)R(\bar{X}_1)R(X_3)$$

其中, $R(\bar{X}_i) = 1 - R(X_i)$, $R(X_i)$ 为边 X_i 的可靠度。假设示例网络中的边的可靠度都为 0.9, 根据网络可靠性计算符号表达式可得网络可靠性 $R_s = 0.898$ 。

5.3 仿真

本文用 C++ 语言来编写程序, 图 3 是实验网络, 包括在很多网络可靠度论文中出现过的网络, 常被用来检验算法的可行性^[14-16]。网络中的黑点代表源节点和目的节点, 其中 s 代表源节点, t 代表目的节点。本实验通过对比文献[6]提出的 OBDD 变量排序部分算法和基于深度优先得到 OBDD 变量序算法来评估本文提出算法的可行性。

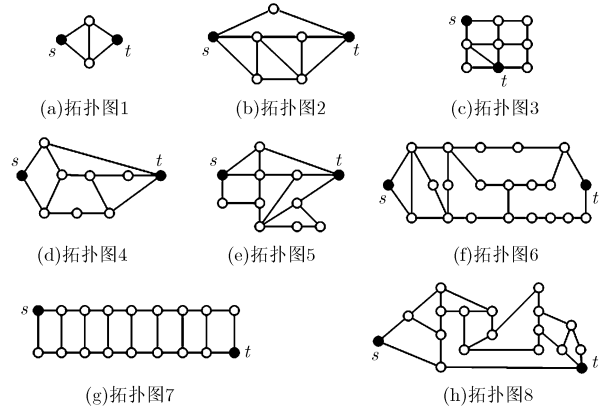


图 3 实验网络

实验结果分别用图4、图5和图6表示, 横坐标表示的是对应的网络拓扑图, 纵坐标数值用指数形式表示。其中排序2和排序3为文献[6]提出的OBDD变量排序算法2和算法3。其中图4记录的是OBDD的节点数量, 如在分析第8个网络可靠性时, 基于本算法得到的OBDD节点数量为1795个, 其它3种算法得到的节点数分别为2959个、3063个和9084个; 图5记录的是创建OBDD图形所花费的时间; 图6表示的是计算网络可靠性所花费的时间, 当计算第8个网络可靠性时, BF-OBDD所花费的时间为16.5 s, 其余3种算法所花费的时间分别为30.2 s, 233.0 s和25.2 s。根据图4可知, 基于BF-OBDD算法计算网络可靠性时可以产生较少的OBDD节点数量。根据图5可知根据BF-OBDD算法在创建OBDD图形时花费的时间较少, 由图6可以得到BF-OBDD算法在进行网络可靠性计算时, 花费的时间较少。

6 结束语

在基于 OBDD 计算网络可靠性时, 其计算时间主要取决于参与操作的 OBDD 的大小, 而 OBDD 的大小严重依赖于 OBDD 的变量序。本文从网络拓扑图得到 OBDD 的变量序, 由布尔函数的性质和 OBDD 原理提出了 BF-OBDD 算法, 在计算网络可

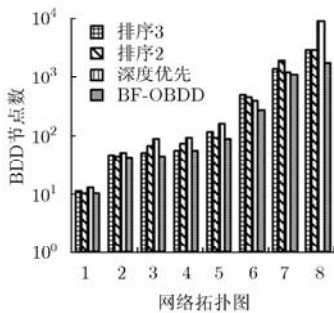


图 4 OBDD 节点数量

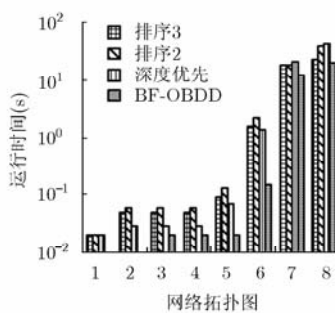


图 5 OBDD 节点创建时间

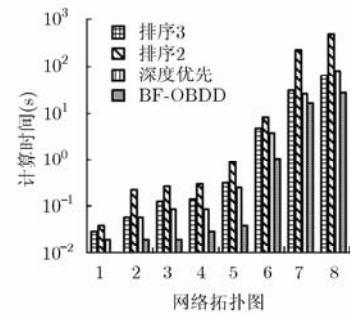


图 6 可靠性计算时间

靠性时根据本算法能得到较少的 OBDD 节点数量, 计算运行的时间较少。

参 考 文 献

- [1] 史玉芳, 陆宁, 李慧民. 基于改进的不变化最小路集的网络系统可靠性算法[J]. 计算机工程与科学, 2011, 33(1): 31-35.
Shi Yu-fang, Lu Ning, and Li Hui-min. An algorithm of network system reliability based on an improved disjointed minimal path set[J]. *Computer Engineering and Science*, 2011, 33(1): 31-35.
- [2] Wood R. Factoring algorithm for computing k-terminal network reliability[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1986, 35(3): 269-278.
- [3] Akers S. Binary decision diagrams[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1978, 27(6): 509-516.
- [4] Lü Guan-feng, Chen Yao, Feng Ya-chao, et al.. A succinct and efficient implementation of 2^{32} bdd package[C]. IEEE Sixth International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering, Beijing, China, 2012: 241-244.
- [5] 陈瑶, 李峭, 赵长啸, 等. 基于 OBDD 的航空电子网络可靠性分析[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(1): 230-236.
Chen Yao, Li Qiao, Zhao Chang-xiao, et al.. OBDD-based reliability analysis for avionics networks[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(1): 230-236.
- [6] Zang X, Sun H, and Trivedi K. A bdd-based algorithm for reliability graph analysis[OL]. <http://www.ee.duke.edu/~hairong/workinduke/relgrap>. 2000.
- [7] Tatsuhiko Tsuchiya. A bdd-based approach to reliability optimal module allocation in networks[C]. IEEE 18th Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing, Niigata, Japan, 2012: 121-126.
- [8] Zhao Bo, Liu Yan, and Xiao Yu-feng. OBDD-based algorithm for reliability evaluation of wireless sensor networks[C]. Prognostics and Systems Health Management Conference, Beijing, China, 2012: 1-4.
- [9] Friedman S and Supowit K. Finding the optimal variable ordering for binary decision diagrams[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1990, 39(5): 710-713.
- [10] Mahdi I and Nadji B. Application of the binary decision diagram(BDD) in the analysis of the reliability of the inverters[C]. Proceedings of 4th International Conference on Power Engineering, Energy and Electrical Drives, Istanbul, Turkey, 2013: 1265-1271.
- [11] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986: 89-90.
Cao Jin-hua and Cheng Kan. Reliability Mathematics Introduction[M]. Beijing: Science Press, 1986: 86-90.
- [12] 古天龙, 徐周波. 有序二叉决策图及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 18-19.
Gu Tian-long and Xu Zhou-bo. Ordered Binary Decision Diagram and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 2009: 18-19.
- [13] Brance K, Rudell R, and Bryant R. Efficient implementation of a bdd package[C]. Proceedings of 27th ACM/IEEE DAC, New York, USA, 1990: 40-45.
- [14] 赵勃, 肖宇峰, 刘岩. 基于 OBDD 的通信网链路重要性评估[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(10): 2348-2352.
Zhao Bo, Xiao Yu-feng, and Liu Yan. Importance evaluation of communication network links based on OBDD[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(10): 2348-2352.
- [15] Xing L. An efficient binary-decision-diagram-based approach for network reliability and sensitivity analysis[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part-A: Systems and Humans*, 2008, 38(6): 105-115.
- [16] Xiao Y, Lin X, Li Y, et al.. Evaluate reliability of wireless sensor network with obdd[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Communications, Dresden, 2008: 105-115.
- 熊 飞: 男, 1983 年生, 博士, 工程师, 研究方向为移动通信技术、通信网链路可靠性研究.
- 乔 迪: 男, 1990 年生, 硕士, 研究方向为网络可靠性研究.
- 王宏祥: 男, 1973 年生, 博士, 副教授, 研究方向为网络可靠性研究.
- 赵子岩: 男, 1975 年生, 博士, 高级工程师, 研究方向为网络流量、通信网络关键技术研究.
- 杨 洪: 男, 1959 年生, 教授级高级工程师, 研究方向为应急通信、软交换、网络安全研究.
- 沈 亮: 男, 1969 年生, 教授级高级工程师, 研究方向为信息通信网络架构和安全运维研究.