

## 地球范围内相对论效应下的时间转移与同步

张科 薛舜\* 吕梅柏

(西北工业大学航天学院 西安 710072)

(西北工业大学航天飞行动力学技术重点实验室 西安 710072)

**摘要:** 对于星载时间保持系统来说, 相对论效应对时钟测量精度的影响不可忽视。该文运用相对论理论研究地球范围内大尺度时空转移引起的时钟测量误差问题。分析计算了星载时钟测量相对论效应误差组成和量级, 验证了频率调整法和实时补偿法消除相对论误差的有效性。研究了普遍类型的地球轨道卫星、航空器以及月球探测器与地面时钟的转移与同步, 提出在星载时钟频率调整分辨率不足时, 可采取定步长时钟频率调整、带误差限的时钟频率调整或“跳秒”的形式控制时钟测量相对论效应长期误差, 提出在无法实时获得航天器位置和速度时, 可以根据互相关法预估周期误差。仿真验证了这些方法能有效地减小误差, 为未来深空探测自主导航过程中时钟与地面时间的同步提供了方案。

**关键词:** 卫星导航; 相对论效应; 时空转移; 时间保持系统; 月球探测

**中图分类号:** TN967.1; V476.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2014)08-1992-07

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2014.00107

## Relativistic Time Transfer and Synchronization in the Vicinity of the Earth

Zhang Ke Xue Shun Lü Mei-bo

(School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** For the space-borne timekeeping system, the relativistic effect has an important impact on the clock measurement accuracy. This paper introduces the relativistic theory into the research on wide range time-space transfer due to clock measurement error. The components and magnitudes of various relativistic effects for clocks are derived. Clock frequency adjusting and real-time periodic compensating are confirmed useful to eliminate relativistic effects. For time synchronization and transfer on common Earth-orbiting satellites, aircrafts and moon probes, an interval frequency adjustment, an improved error-restrict interval frequency adjustment and a leap seconds method are proposed to restrict secular relativistic effect errors when the clocks lack of frequency adjustable resolution, it is also proposed to predict periodic errors by building a cross correlation function when unable to get the clocks' real-time position and velocity. The simulations show that the analysis and proposed error eliminating methods are effective, and they be used to improve clock synchronization for the future deep space explore.

**Key words:** Satellite navigation; Relativistic effects; Space-time transformation; Timekeeping system; Moon exploration

### 1 引言

古时候人们利用时钟测定所处地理经度, 进而发明了航海天文时钟。现在, 通过对 GPS 等导航卫星信号的收发时间比对, 能精确确定接收装置的位置信息。这种类型的导航方法对时间测量精度提出了极高的要求, 假设导航精度为百米, 那么时间测

量精度必须要到达微秒级, 此时, 相对论效应对时间保持或计时系统的影响不可忽视<sup>[1]</sup>。在大范围空间中, 时空是个统一的体系, 空间位置变化的测量必须在同一时间尺度下。因此, 对于未来高精度月球探测导航系统, 在相对论下建立统一有序的时间参考体系是至关重要的。

在能获得精确位置、速度前提下的时钟测量相对论效应部分修正技术已在新一代 GPS 卫星上实现工程应用<sup>[2,3]</sup>, 但是国内外文献对于其他类型的飞行器在时钟调整分辨率不高且不能获得实时飞行状

2014-01-15 收到, 2014-04-30 改回

国家自然科学基金(61174204)和西北工业大学基础研究基金(GCKY1006)资助课题

\*通信作者: 薛舜 xueshunup@163.com

态的实际情况下的时钟同步问题没有涉及。而月球探测过程中牵涉不同时空坐标系之间的转移问题也需要通过相对论理论来解决<sup>[4]</sup>。因此,本文研究如何运用相对论理论解决大范围时空转移的时间测量与转移问题,以提高普遍类型的地球轨道卫星时钟与地面时钟的同步以及月球探测过程中的星载时钟与地面时钟同步精度。

## 2 相对论时间转移与同步原理

在广义相对论框架下有两类“时间”:一类是用于观测者局域参考系并可由理想时钟测量的时间,称为固有时;另一类是由时空度规所定义的用来作为坐标的“类时变量”,称为坐标时。显然固有时可以由某种测量手段直接测得,而坐标时只能根据时空度规给出的与固有时的数学关系计算间接获得。两个事件发生的坐标时恒定不变,而固有时的测量随着时钟的运动状态和所处位置的引力势不同而有所变化,因此在大尺度时空范围内比较两个事件发生的时间间隔,特别是观测者有高速相对运动时,必须统一到相同的坐标系下比较计算出的坐标时<sup>[5]</sup>。

相对论认为事件的发生与其前后演变可用4维坐标标示,世界线是时空中某物体的历史所组成的事件序列,是物体穿越4维时空唯一的路径。对于世界线上由A点运动到B点的时钟测得的时间间隔在某一坐标系下可表示为

$$dt = \pm \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left( g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{-g_{00}} \right) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} d\tau + \frac{1}{c} \int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}} \frac{dx^j}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

式中,  $\tau$  为观测者所携带的理想时钟计量的固有时;  $g_{00}$ ,  $g_{0j}$ ,  $g_{ij}$  为时空度规;  $dt$  为时间坐标增量;  $dx^i$ ,  $dx^j$  为空间坐标增量;  $c$  为光速。

## 3 ECI 坐标系下的时间转移与同步

用于时空测量的地心天体参考体系(Geocentric Celestial Reference System, GCRS)可以采用(TCG<sup>1</sup>, ECI<sup>3</sup>)的形式。其中, ECI指地球质心惯性坐标系(Earth-Centred Inertial coordinate system),而 TCG 是对应的地心坐标时(Geocentric Coordinate Time)。ECI 中任意一个时空坐标点  $(T, \mathbf{X})$  ( $T=TCG$ ) 地心惯性系度规张量表示为

$$g_{00} = \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4} - 1, g_{0j} = -\frac{4U}{c^3}, g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \quad (2)$$

式中,  $U$ ,  $\mathbf{U}$  为航天器所在位置引力标量和矢量位势<sup>[6]</sup>。将式(2)代入式(1),线性化并只保留至  $1/c^2$  项,获得 ECI 下时钟测得固有时到 TCG 的转移为

$$\Delta t_{TCG} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left( 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{V^2}{2c^2} \right) d\tau \quad (3)$$

式中,  $V$  为观测者的速度。研究表明,利用式(3)的时间尺度转移误差小于  $10^{-12}$  s<sup>[7]</sup>,能够满足以电磁波到达时间为测量量的导航方法(如卫星导航、X射线脉冲星导航等)的精度要求<sup>[8-11]</sup>。

地表上的时钟相对于 ECI 坐标系的速度为  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  为地球自转角速度与观测者关联角速度的和,  $\mathbf{r}$  为时钟相对于地心的位置矢量,则该时钟测得固有时到 TCG 的转移为

$$\Delta t_{TCG} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left( 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2c^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \left( 1 + \frac{1}{c^2} W \right) d\tau \quad (4)$$

式中,  $W$  为时钟所受重力势。另外,根据国际宇航会议坐标时间尺度转移协议<sup>[7]</sup>,有

$$\Delta t_{TT} = (1 - L_G) \Delta t_{TCG} \quad (5)$$

式中,  $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10} \approx 60.215$  ( $\mu\text{s}/\text{d}$ ) 是 TCG 转移到地球时(Terrestrial Time, TT)的尺度系数。但是,TT 是天文学的地球系统时间标准,而地面时钟以协调世界时(Coordinated Universal Time, UTC)计量标准,二者的关系为

$$TT = UTC + m \times 1^s + 32.184 \quad (6)$$

式中,  $m$  为调整参数,2012年该值为35。

对于星载时钟来说,在不考虑摄动势的影响时,可以认为其在一个开普勒轨道上运动。结合活力方程和轨道运动方程对式(3)积分项进行推导,其中引力势引起的广义相对论效应称为引力红移,为

$$\Delta t_U = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} U d\tau = -\frac{GM_E}{c^2 a} \Delta\tau - \frac{1}{c^2} \sqrt{GM_E a e} \sin E \quad (7)$$

式中,  $G$  为普朗克常数;  $M_E$  为地球质量;  $a$ ,  $e$ , 和  $E$  分别为卫星轨道半径、偏心率和偏近点角。速度引起的狭义相对论效应称为时间膨胀,为

$$\Delta t_V = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{V^2}{2} d\tau = -\frac{GM_E}{2c^2 a} \Delta\tau - \frac{1}{c^2} \sqrt{GM_E a e} \sin E \quad (8)$$

则星载时钟固有时转移到 TCG 和 TT 的转移分别为

$$\Delta t_{TCG} = \left( 1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} \right) \Delta\tau + \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a e} \sin E \quad (9)$$

$$\Delta t_{TT} = \left( 1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{W_0}{c^2} \right) \Delta\tau + \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a e} \sin E \quad (10)$$

式中,  $W_0$  为大地水准面重力势。式(10)第2项是由卫星轨道偏心引起的正弦周期性误差,也可表示为

$$\Delta t_{\text{eccentricity}} = \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a e} \sin E = \frac{2}{c^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$  分别为地球到卫星的矢径和速度矢量。

此外, 将文献[5]地球非球形摄动势  $J_2$  项代入式(7)可获得该项引起的时钟测量误差为

$$\Delta t_{\text{oblateness}} = \frac{GM_E J_2 R_E^2}{2c^2 \bar{a}^3} \left[ \left( 1 - \frac{3 \sin^2 i}{2} \right) \Delta \tau + \frac{\sin^2 i}{n} \sin(2n\Delta \tau) \right] \quad (12)$$

式中,  $R_E$  为地球半径;  $\bar{a}$ ,  $i$  和  $n$  分别为地球卫星轨道平均半长轴、轨道倾角和平均角速率。

同理, 将文献[12]中的第三天体引力摄动势代入式(7), 可获得该项引起的时钟测量误差为

$$\Delta t_{\text{tidal}} \approx \frac{GM_{\text{ext}}}{2c^2 r_{P/E}} \left( \frac{r^*}{r_{P/E}} \right)^2 \cos^2 i_p \left[ \Delta \tau - \frac{\sin(2n\Delta \tau)}{2n} \right] \quad (13)$$

式中,  $r^*$  为卫星轨道半径;  $r_{P/E}$  为天体到地球距离。

如表 1 所示, 星载时钟测量相对论效应误差主要来自于地球引力势一阶项和卫星速度项。卫星高速运动引起的狭义相对论效应使星载时钟比地表上时钟运行得慢, 而引力差异引起的广义相对论效应使星载时钟比地表上时钟运行得快。对于低轨卫星, 速度项相对论效应影响更大, 而对于中、高轨卫星, 起主要作用的是引力项。为了避免星载时钟相对地面时钟长期漂移, 根据式(10)右端第 1 项对星载时钟频率进行调整, 若星载时钟的基准频率为  $f_0$ , 则在发射前应将其调整为

表 1 地球轨道卫星时钟相对于地面时钟测量的相对论效应

卫星名称	ISS	Beidou	Molniya
长半轴长(km)	6770	42159	26556
偏心率	0.0101	0.0058	0.6988
轨道倾角(°)	51.6	2.1	64.7
近地点高(km)	320.3	35545.2	1622.1
远地点高(km)	456.1	36032.1	38748.9
轨道周期(min)	92.3	1435.8	717.8
时间膨胀长期效应(μs/d)	-28.3	-4.5	-7.2
引力红移长期效应(μs/d)	3.6	51.2	45.8
长期项净值(μs/d)	-24.7	46.6	38.6
偏心率周期效应幅值(ms)	11.7	16.7	1600
地球 $J_2$ 项引力红移(ns/d)	2.1	0.112	-0.102
地球 $J_2$ 项周期效应幅值(ps)	170.4	0.024	29.2
月球引力摄动长期效应(ps/d)	1.6	59.1	13.7
月球引力摄动周期效应(ps)	0.008	4.7	0.54
太阳引力摄动长期效应(ps/d)	0.7	29.4	5.4
太阳引力摄动周期效应(ps)	0.003	2.3	0.22

$$f = (1 - K_E) f_0 = \left( 1 + \frac{3GM_E}{2c^2 a'} - \frac{W_0}{c^2} \right) f_0 \quad (14)$$

式中  $K_E$  为时钟相对论效应长期项校正参数,  $a'$  为卫星轨道长半轴估计值<sup>[13]</sup>。从式(14)可以看出, 低轨卫星星载时钟频率会比地面时钟频率快, 而中、高轨卫星时钟频率则更慢。当然如有更高要求, 则时钟频率调整公式还要考虑上文提到的各种摄动效应。

当星载时钟频率调整分辨率不足时, 可采取定步长时钟频率调整或“跳秒”的形式控制长期误差。其中, 定步长时钟频率调整或可称为间歇性时钟频率调整, 是将时钟长期误差累计到频率可调整最小值的最小整数倍后再对其进行频率调整, 如式(15)所示。

$$K_E = \begin{cases} 0, & H = T, 3T, \dots, (2k-1)T, \dots \\ K_I, & H = 2T', 4T', \dots, 2kT', \dots \end{cases}, k \in \mathbf{N} \quad (15)$$

式中,  $K_I$  为分辨率不足情况下的时钟频率调整参数,  $K_I = \Delta f_i / f_0$ ,  $\Delta f_i$  为当前可设定的调频值;  $T$  为一步误差累计时间;  $T'$  为一步频率调整时间;  $H$  为步长序号;  $\mathbf{N}$  为自然数。

分析可知, 定步长时钟频率调整法对  $K_I$  选择敏感且存在误差累积。一种有效的改进方法是在频率调整过程中限定时间误差, 如式(16)所示。

$$K_E = \begin{cases} 0, & M = 2, 4, \dots, 2k, \dots \\ K_I, & M = 1, 3, \dots, 2k-1, \dots \end{cases}, k \in \mathbf{N} \quad (16)$$

触发频率调整的是时钟测量误差门限  $\Delta \tau^*$ , 则  $-\Delta \tau^* \leq \Delta \tau \leq \Delta \tau^*$ ;  $M$  为频率调整序号。

当硬件条件不能满足频率调整要求时, 还可以采用“跳秒”的软件补偿形式实现对时钟长期误差的限制, 如式(17)所示。

$$\Delta t = \begin{cases} 0, & H = T, 2T, \dots, kT, \dots \\ \Delta t_{\text{TT}} + t_{\text{leap}} \delta(t - H), & k \in \mathbf{N} \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $t_{\text{leap}}$  为“跳秒”值;  $\delta(t - H)$  为脉冲函数。

图 1, 图 2 为 Molniya1-93 在 25 NOV 2012 12:00:00~26 NOV 2012 12:00:00(UTC)期间的星载时钟测量相对论效应长期误差理想频率调整和分辨率不足情况下采用定步长、带误差限的间歇频率调整及“跳秒”补偿后的残差及参考曲线。定步长调整法物理实现可靠, 调整后的误差残差均方差小, 其缺点是对  $K_I$  选择敏感, 易出现振荡误差递增且步长越大误差越大。带误差限的间歇性时钟频率调整对误差限可控且频率调整次数少, 但需要外部时间标准源信号对其进行时钟标准校正。而“跳秒”法软件实现容易, 误差限可控, 但是残差均方差较大。

除去星载时钟测量的相对论长期效应主要影响

外,时间膨胀和引力红移相对论效应还有周期分量,该分量与轨道偏心率成正比。从表 1 可见,诸如 ISS 和 BeidouG2 等近圆轨道卫星的周期性相对论效应钟差幅值只有约十几纳秒,而如 Molniya1-93 这样的偏平椭圆轨道,其星载时钟测量相对论效应幅值甚至达到了微秒级。对于卫星导航系统来说,通常的做法是根据卫星位置和速度数据由式(11)在接收机或者星上建立误差补偿模型进行实时补偿。若无法获得卫星实时的  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{V}$ , 则可以借鉴文献[14-16]相关法思想估计周期项模型,如式(18)所示。

$$\begin{aligned}
 R(E_0) &= \Delta\tilde{t}(E) * P(E) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\tilde{t}(E) \cdot P(E_0 - E) dE_0 \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\tilde{t}(E) \cdot \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a' e'} \sin(E_0 - E) dE_0
 \end{aligned} \tag{18}$$

式中,  $R(E_0)$  为互相关函数,  $\Delta\tilde{t}(E)$  是频率调整后的时钟误差残差,与之卷积的是估计模型  $P(E)$ ,  $a'$ ,  $e'$  分别为轨道半径和偏心率估计值,  $E_0$  为初始轨道初始相位。设  $E'_0$  为初始轨道估计值,则通过求取最大相关度获得时钟相对论效应周期分量校正为

$$\Delta\tilde{t} = \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a' e'} \sin(E - E'_0) \tag{19}$$

图 3 为 Molniya1-93 星载时钟测量相对论效应周期误差和总相对论效应误差及补偿后残差曲线。由图 3 可见,采用前文的频率调整和周期误差预估实时补偿的方法能有效减少星载时钟测量误差。

#### 4 ECEF 坐标系下的时间转移与同步

GCRS 下的时空测量还可以采用 (TCG<sup>1</sup>,

ECEF<sup>3</sup>) 的形式,其中 ECEF 指地心固联坐标系 (Earth-Centred Earth-Fixed coordinate system)。根据坐标转移定理, (TCG<sup>1</sup>, ECI<sup>3</sup>) 坐标  $(t, x, y, z)$  到 (TCG<sup>1</sup>, ECEF<sup>3</sup>) 坐标  $(t', x', y', z')$  转移为

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{20}$$

则 ECEF 中任意一个时空坐标点  $(T', \mathbf{X}')$  的地球质心系度规张量表示为

$$g'_{00} = \frac{2U}{c^2} + \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{c^2} - 1, g'_{0j} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j}{c}, g'_{ij} = \delta_{ij} \tag{21}$$

将式(20), 式(21)代入式(1)同理可得 ECEF 坐标系下时钟测得固有时到 TCG 的转移关系为

$$\Delta t_{\text{TCG}} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[ 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2c^2} + \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}'}{c^2} + \frac{V'^2}{2c^2} \right] d\tau \tag{22}$$

式中,  $\mathbf{V}'$ ,  $V'$  为时钟在 ECEF 下的速度矢量和大小。

又因为  $U + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/2 - W_0 = W - W_0 \approx -gh$ , 则 ECEF 坐标系下时钟固有时到 TT 时的转移为

$$\Delta t_{\text{TT}} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[ 1 - \frac{gh}{c^2} + \frac{V'^2}{2c^2} \right] d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}'}{c^2} d\tau \tag{23}$$

式中,  $g \equiv -\partial W/\partial h$  为当地重力加速度。事实上如有必要,在卫星发射前对星载时钟频率调整也要考虑  $-gh/c^2$  的影响,代入到式(14)可得

$$f = (1 - K_E) f_0 = \left[ 1 + \frac{GM_E}{c^2 R_E} + \frac{gh}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{GM_E}{c^2 a'} \right] f_0 \tag{24}$$

式(23)右端第 2 项是由地球自转引起的运动时

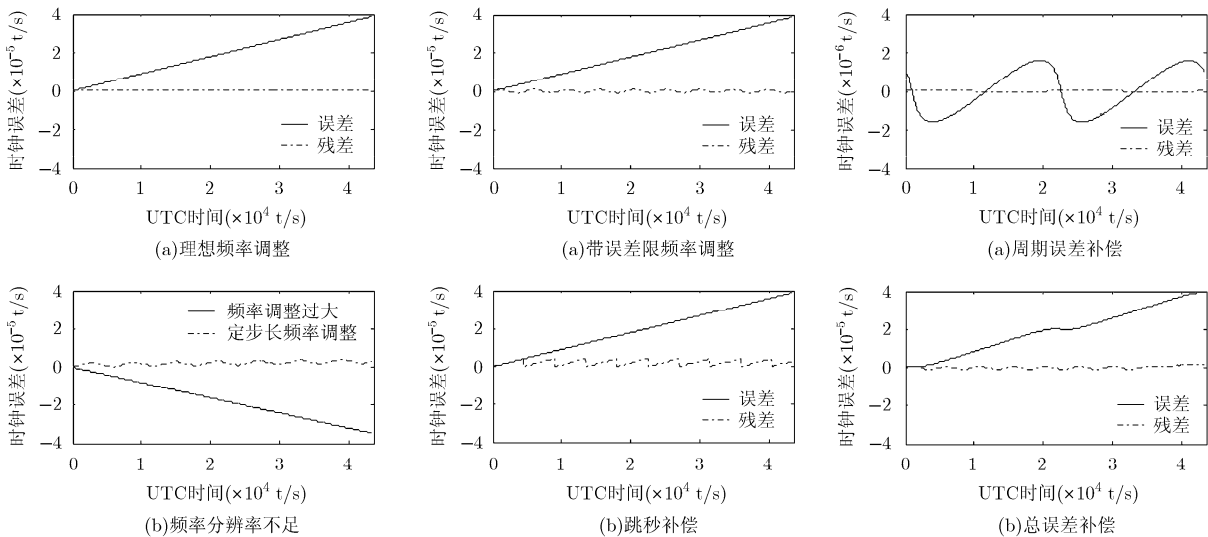


图 1 星载时钟测量理想调整、分辨率不足及定步长频率调整

图 2 星载时钟测量带误差限频率调整及跳秒补偿

图 3 星载时钟测量周期误差、总误差及补偿

钟的 Sagnac 效应, 可以表示为

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}'}{c^2} d\tau = \frac{R_E^2 \omega}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \cos^2 \phi d\lambda \quad (25)$$

对于在 ECEF 下从 A 点  $(x_A, y_A)$  运动到 B 点  $(x_B, y_B)$  的星载时钟, Sagnac 效应又可以表示为

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c^2} (x_A y_B - x_B y_A) \quad (26)$$

将文献[16]中 1971 年 Hafele-Keating 飞行时钟实验的实测数据代入式(25)分段积分后所得结果如表 2 所示, 预测与实测数据最大误差在 10%以内, 分析可知主要误差源有 3 点: (1)飞行数据误差; (2)原子时钟误差; (3)数学模型近似误差。

表 2 时钟测量相对论效应误差飞行试验预测

实验飞行平均参数	东向	西向
载机速度(m/s)	243.0	218.0
载机高度(km)	8.90	9.36
测量持续时间(h)	41.2	48.6
航迹纬度(北纬)(deg)	34.0	31.0
引力项相对论效应预测(ns)	144	179
速度项相对论效应预测(ns)	-51	-47
Sagnac effect 预测(ns)	-133	143
总相对论效应预测(ns)	-40	275
相对论效应实验测量值(ns)	-59 ± 10	273 ± 7

从图 4 中可以看出随着高度的增加等高线变得陡峭, 表明高度越高时钟测量对速度变化越敏感。图 4 中 Hafele-Keating 飞行实验的预测和实测结果对应点在对高度等高线之外, 由式(25)知误差是由机载时钟所处纬度非零造成的。

综上所述, 在 ECEF 下无论航空器时钟还是卫星时钟依然满足相对论时间转移原理, 时钟长期误

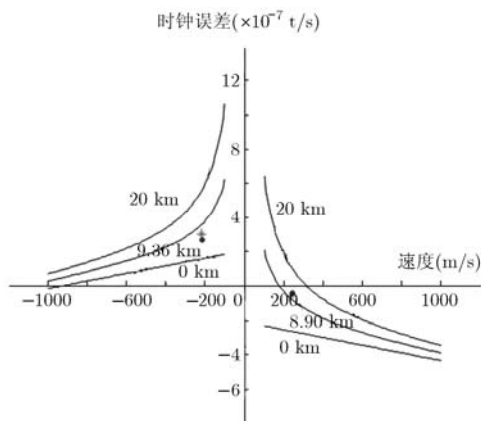


图 4 环赤道不间断飞行时钟测量相对论效应预测等高曲线

差控制的方法与 ECI 下相同, 而周期误差还要考虑地球自转引起的 Sagnac 效应。

### 5 月球探测过程中的时间转移与同步

根据轨道拼接理论可以把月球探测转移过程视为若干条以地球质心为焦点的轨道拼接。为了便于求解, 根据文献[6]的矢量分解方法可将式(3)分解为与时钟位置有关项和无关项, 令  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \dot{\mathbf{R}}$ ,  $\mathbf{r}_L, \mathbf{v}_L$  分别为月球质心在地心坐标系中的位置和速度矢量,  $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$  为月球探测器相对于月球质心的位置和速度矢量, 可得绕月轨道星载时钟固有时到 TCG 的转移为

$$\Delta t_{\text{TCG}} = \Delta\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left( U_{\text{ext}}(\mathbf{r}_L) + \frac{v_L^2}{2} \right) d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \frac{U_L(\mathbf{R})}{c^2} + \frac{\dot{R}^2}{2c^2} \right) d\tau + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{R}) \Big|_{\tau_0}^{\tau} \quad (27)$$

式(27)右端第 2 项为与时钟位置无关的月球质心在地心惯性系中运动引起的引力红移和时间膨胀,  $\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{R}/c^2$  为有限的 4 维平直时空下从地心惯性系观测月心坐标系中关联运动的狭义相对论校正。

类似于地球轨道航天器时间转移的推导, 同理得月球探测器星载时钟测量转移与同步模型如下:

绕月轨道探测器时钟固有时到月心惯性系坐标时(Selenocentric Coordinate Time, TCS)的转移为

$$\Delta t_{\text{TCS}} \approx \left( 1 + \frac{3GM_L}{2ac^2} \right) \Delta\tau + \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_L a} e \sin E \quad (28)$$

绕月轨道探测器时钟测得固有时到 LT 的转移为

$$\Delta t_{\text{LT}} \approx \left( 1 + \frac{3GM_L}{2ac^2} - \frac{W_{0L}}{c^2} \right) \Delta\tau + \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_L a} e \sin E \quad (29)$$

绕月轨道探测器时钟测得固有时到 TCG 转移为

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{TCG}} - \Delta t_{\text{TCS}} &= L_{\text{CL}} \Delta\tau + P_{\text{L/E}} + \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{R}/c^2 \Big|_{\tau_0}^{\tau} \\ &\approx \frac{3GM_E}{2a_L c^2} \Delta\tau + \frac{2}{c^2} \sqrt{GM_E a_L} e_L \cdot \sin E_L + \frac{\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{R}}{c^2} \Big|_{\tau_0}^{\tau} \end{aligned} \quad (30)$$

月球时(Lunar Time, LT)到 TCG 的转移模型为

$$\Delta t_{\text{TCG}} - \Delta t_{\text{LT}} \approx L_{\text{CL}} \Delta\tau + P_{\text{L/E}} + L_L \Delta\tau + \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{R}/c^2 \Big|_{\tau_0}^{\tau} \quad (31)$$

综上可得从 TT 到 LT 的时间测量转移同步模型为

$$\Delta t_{\text{LT}} - \Delta t_{\text{TT}} = (\Delta t_{\text{TCG}} - \Delta t_{\text{TT}}) - (\Delta t_{\text{TCG}} - \Delta t_{\text{LT}}) \quad (32)$$

式中,  $M_L, R_L$  和  $\omega'$  分别为月球质量、半径和自转角速度;  $L_L = 3.141 \times 10^{-11} \approx 2.7(\mu\text{s}/\text{d})$  为 LT 到 TCS

的转移尺度系数； $a_L, e_L, E_L, v_L$  和  $v_L$  为地心惯性系中月球轨道长半轴、偏心率、偏近点角、速度矢量和大小； $L_{CL} = 1.731 \times 10^{-11} \approx 1.5(\text{ms/d})$  是 LT 到 TCG 的尺度系数，周期项  $P_{L/E}$  幅值为  $0.48 \mu\text{s}$ 。

图 5 显示嫦娥一号月球探测器从 24 Oct 2007 18:25:00.000(UTC) 星际分离时刻开始到到达预定环月轨道环绕 10 圈为止的飞行过程中相对论效应对时钟测量的影响。各轨道段部分关键参数如表 3 所示，在嫦娥一号月球探测器整个飞行过程中，时钟测量相对论效应周期项幅值出现在转移轨道阶段为  $6.277 \mu\text{s}$ ，而绕月阶段虽然轨道长半轴增大了但探测器公转轨道(即月球绕地轨道)近圆而使周期项迅速减小，则可知通过时间比对获得的导航信息最大误差在千米级别，因此在探月飞行过程中可以时钟测量相对论效应周期性影响在精度范围内可以忽略。随着轨道半长轴增加，长期项曲线斜率变小即钟差增长率减小，原因是引力项相对论效应影响变小，而长期项曲线末端斜率的增加正好说明了嫦娥探测器被月球引力俘获而进入月球环绕轨道。图 5 中曲线走势则说明，在探月飞行过程中，时钟测量相对论效应影响的主要决定组成是其长期项效应，而应轨道分段进行频率调整的方法能很好地解决星载时钟与地面时间的协调同步问题。

表 3 嫦娥一号星载时钟相对论效应误差

轨道类型	周期 (h)	圈	半长轴 (km)	偏心	钟差 ( $\mu\text{s}$ )	幅值 ( $\mu\text{s}$ )
停泊	15.808	1.5	31978.135	0.794	17.765	1.996
	15.957	1.5	32178.135	0.783	17.820	1.974
	24.000	2	42241.115	0.834	27.223	2.411
	48.000	1	67053.591	0.896	17.150	3.260
转移	114	-	213262.157	0.967	12.806	6.277
	12.000	2	6142.578	0.684	2.648	3.224
绕月	3.500	6	2701.522	0.283	3.601	3.163
	2.127	10	1938.200	0	4.561	3.140

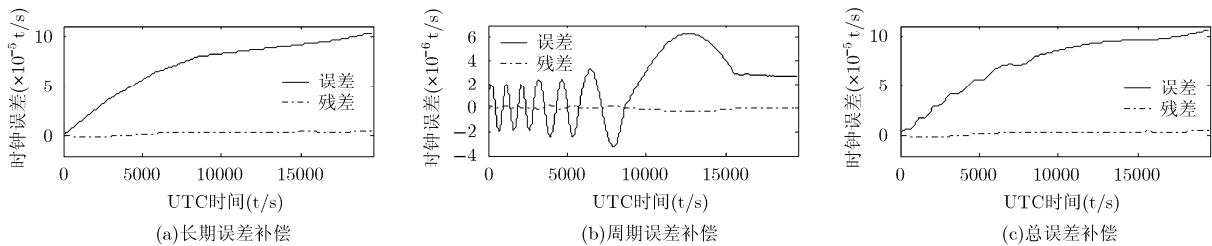


图 5 嫦娥一号星载时钟测量相对论效应误差及校正

参考文献

[1] Hellings R W. Relativistic effects in astronomical timing measurements[J]. *Astronomical Journal*, 1986, 91(3): 650-659.  
 [2] Ashby N. Relativity in the Global Positioning System[J].

若要使得航天器转入月球轨道或者降落在月球表面时所携带的星载时钟与地面时间同步，则还要用式(25)做频率反向调整。而月球探测全过程若要求星载时钟时刻与地面时钟保持同步，则可根据表 4 所列步骤顺序调整即可，当然地球停泊轨道、转移轨道和环月探测目标轨道也可能不是一次性到位的，可能分别需要通过多次助推升轨和制动降高来实现，因此在此过程中也需要相应的星载时钟频率调整。其他行星及行星卫星探测时间转移同步与月球探测器时间转移同步原理相同，在此不再赘述。

表 4 月球探测器星载时钟频率方案

轨道类型	调整步骤	频率调整值	调整依据
停泊轨道	调频 1	$\Delta f = f - f_0$	$\Delta t_{TT}$
转移轨道	调频 2	$\Delta f_1 = f_1 - f$	$\Delta t_{TT1}$
环月球轨道	调频 3	$\Delta f_2 = f_2 - f_1$	$\Delta t_{TT2} - \Delta t_{TCS}$
月球表面	调频 4	$\Delta f_3 = f' - f_2$	$\Delta t_{TT3} - \Delta t_{LT}$

6 结论

地球轨道卫星时钟乃至月球时间、火星时间与地面时钟转移与同步的精度要求越来越高，成为当前航天器设计必须考虑的难题。相对论效应能引起 Beidou 卫星星载时钟  $46.6 \mu\text{s/d}$  的长期性误差，引起嫦娥一号从发射到入轨约  $103.574 \mu\text{s}$  的时钟偏差。基于此，本文研究了相对论效应如何影响地球范围内不同时空坐标系之间的转移，确定了时钟测量相对论效应误差组成与数量级。针对普遍类型的地球轨道卫星、航空飞行器以及月球探测器与地面时钟转移与同步，本文提出在时钟频率调整分辨率不足时，可采取定步长时钟频率调整、带误差限的时钟频率调整或“跳秒”的形式控制长期误差。在无法实时获得航天器位置和速度时，可以根据互相关法预估周期误差。文中的仿真说明了这些方法的有效性，并为月球探测器自主时间同步提供了方案。

- Living Review Relativity*, 2003, 6(1): 5-40.
- [3] 费保俊. 相对论在现代导航中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 85-103.  
Fei Bao-jun. Application of Relativity in Modern Navigation[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007: 85-103.
- [4] Nelson R A. Relativistic time transfer in the vicinity of the Earth and in the solar system[J]. *Metrologia*, 2011, 48(4): 171-180.
- [5] Prestage J D and Weaver G L. Atomic clocks and oscillators for deep-space navigation and radio science[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(11): 2235-2247.
- [6] Moritz H. The figure of the Earth[M]. Karlsruhe: Wichmann, 1990: 11.
- [7] Nelson R A. Relativistic time transfer in the solar system[C]. Frequency Control Symposium & 21st European Frequency and Time Forum, IEEE, Geneva Switzerland, 2007: 1278-1283.
- [8] Hećimivić Ž. Relativistic effects on satellite navigation[J]. *Technical Gazette*, 2013, 20(1): 195-203.
- [9] 杨效果, 赵静, 党亚民, 等. 相对论效应计算方法的精度研究[J]. 测绘科学, 2012, 37(3): 29-30, 62.  
Yang Xiao-guo, Zhao Jing, Dang Ya-min, *et al.* Effect of relativity in GNSS with different methods[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2012, 37(3): 29-30, 62.
- [10] Sheikh S I, Hellings R W, and Matzner R A. High-order pulsar timing for navigation[C]. Proceedings of ION 63rd Annual Meeting, 2007: 432-443.
- [11] 任红飞, 魏子卿, 翟振和, 等. 1PN近似下脉冲星导航的观测方程及精度分析[J]. 测绘学报, 2012, 41(1): 41-47.  
Ren Hong-fei, Wei Zi-qing, Zhai Zhen-he, *et al.* The timing equation of pulsar navigation in 1PN approximation and its accuracy analysis[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(1): 41-47.
- [12] Metal S. The IAU2000 resolutions for astronomy, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement[J]. *Astron Journal*, 2003, 126(6): 2687-2706.
- [13] 陈小鱼, 齐建中, 宋鹏. 一种精确 GPS 授时方法的研究与实现[C]. 第三届中国卫星导航学术年会电子文集, 广州, 2012: 76-80.  
Chen Xiao-yu, Qi Jian-zhong, and Song Peng. Research and Implementation of a method of precise time transfer with GPS[C]. 3rd China Satellite Navigation Conference, Guangzhou, 2012: 76-80.
- [14] Speth M, Classen F, and Meyr H. Frame synchronization of OFDM systems in frequency selective fading channels[C]. IEEE 47th in Vehicular Technology Conference, Phoenix, USA, 1997: 1807-1811.
- [15] Almuzaini K K and Gulliver T A. A new time synchronization technique for OFDM systems[C]. IEEE 68th in Vehicular Technology Conference, Calgary, Canada, 2008: 1-5.
- [16] 王磊, 徐大专. 一种抗频偏的时间精同步方法及性能分析[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(2): 300-303.  
Wang Lei and Xu Da-zhuan. An anti frequency offset fine time synchronization method and its performance analysis[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(2): 300-303.
- 张 科: 男, 1968 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为导航、制导与控制.
- 薛 舜: 男, 1982 年生, 博士生, 研究方向为空间飞行器导航、制导与控制.
- 吕梅柏: 男, 1982 年生, 讲师, 研究方向为飞行器设计、仿真与嵌入式系统开发.