

## 基于噪声子空间特征值重构的 DOA 估计算法

方庆园<sup>①</sup> 韩勇<sup>\*①</sup> 金铭<sup>①</sup> 宋立众<sup>①②</sup> 乔晓林<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(哈尔滨工业大学电子与信息工程学院 哈尔滨 150001)

<sup>②</sup>(毫米波国家重点实验室 南京 210096)

**摘要:** 该文针对非等功率信号波达方向(DOA)估计问题,提出一种基于噪声子空间特征值重构(Eigenvalue Reconstruction of Noise Subspace, ERNS)的超分辨算法。算法对接收信号自相关矩阵进行特征值分解,通过重构噪声子空间特征值以及引入虚拟信源来构造新的接收信号自相关矩阵,对该矩阵进行特征值分解得到新的噪声子空间特征值。当虚拟信源与实际信源入射方向相同时,新噪声子空间特征值与重构后噪声子空间特征值保持不变,利用这一特性来估计信源入射方向。该文给出算法的原理及实现步骤,并通过仿真进行原理验证与性能分析,仿真结果表明与其他子空间算法和 MUSIC 算法相比,ERNS 算法能够提高弱信号估计成功的概率。

**关键词:** 阵列信号处理; 高分辨率; 波达方向估计; 噪声子空间; 特征值重构

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)12-2876-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.02014

## DOA Estimation Based on Eigenvalue Reconstruction of Noise Subspace

Fang Qing-yuan<sup>①</sup> Han Yong<sup>①</sup> Jin Ming<sup>①</sup> Song Li-zhong<sup>①②</sup> Qiao Xiao-lin<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

<sup>②</sup>(State Key Laboratory of Millimeter Waves, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** This paper proposes an Eigenvalue Reconstruction method in Noise Subspace (ERNS) for Direction of Arrival DOA estimation with high resolution, provided that the powers of sources are different. The noise subspace eigenvalues belonging to the covariance matrix of received signals, obtained by EigenValue Decomposition (EVD), are modified to construct a new covariance matrix with respect to virtual source. The noise subspace eigenvalues corresponding to the new covariance matrix remain the same as before they are modified. The invariance of the noise subspace is utilized to estimate the DOA of emitters. The theory and process of ERNS algorithm are provided, at the same time, the theory and performance of ERNS algorithm is validated by computer simulations. The simulation results show that the ERNS algorithm has a better performance in successful probability of weak signal estimation compared with other subspace methods and MUSIC algorithm.

**Key words:** Array signal processing; High resolution; Direction of Arrival (DOA) estimation; Noise subspace; Eigenvalue reconstruction

### 1 引言

在基于天线阵列的众多超分辨波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计算法中,以多重信号分类(MUSIC)算法为代表的子空间类估计算法,因其良好的估计性能而被众多学者广泛而深入地研究,且取得了大量成果<sup>[1-3]</sup>。在对超分辨估计算法的研究中大多基于信号功率近似相等这一前提条

件,而在复杂的电磁环境下如电子对抗中,测向设备往往面临众多非合作信号,且信号间功率各不相同。且不等功率信号的估计问题在通信、电子战、电子侦察等领域都有极为重要的应用<sup>[4-7]</sup>。

当存在相邻非等功率信号在同一波束内入射时,强信号对弱信号的压制会使得 MUSIC 等超分辨估计算法对弱信号的估计发生较大偏差甚至无法估计<sup>[8,9]</sup>。针对不等功率入射信号的 DOA 估计目前大致有两种解决方案:(1)采用极大似然估计类算法同时估计出强弱信号的波达角<sup>[10,11]</sup>,(2)在强信号波达方向已知时,通过干扰阻塞方法对强信号进行抑制来估计弱信号的 DOA<sup>[12,13]</sup>。若强信号入射方向未知,则需首先确定强信号入射方向。例如文献[12]

2013-12-23 收到,2014-04-15 改回

国家自然科学基金(61171181),毫米波国家重点实验室开放课题(K201328),哈尔滨工业大学科技创新基金(HIT.NSRIF2013130)和哈尔滨工业大学(威海)校科学研究基金(HIT(WH)XBQD201022)资助课题

\*通信作者: 韩勇 han8662033@163.com

使用干扰阻塞法，利用强干扰信号的先验知识构造阻塞矩阵来抑制已知方位的强干扰，实现了特定区域内的低信噪比信号方位估计。但该算法仅限于均匀线阵且需预知强干扰的入射方向。对阻塞类算法来说当强弱信号角度相近时，算法在抑制强信号的同时也衰减了弱信号<sup>[14]</sup>。文献[13]将强信号导向矢量所在空间纳入噪声子空间，再在该扩展的噪声子空间上利用常规 MUSIC 算法进行弱信号的 DOA 估计。当强弱信号夹角较小时该方法也存在抑制强信号的同时衰减弱信号的问题<sup>[15]</sup>，只是对强信号的抑制较大。可见阻塞类算法与扩展噪声类算法均存在强信号对弱信号的压制问题。与上述两种方案不同，文献[16]提出了基于噪声子空间特征值不变性的超分辨估计算法，该方法在入射信号功率相等或不等条件下均有较好的估计性能。

在文献[16]基础上，本文提出一种噪声空间特征值重构的 DOA 估计方法。通过优化噪声空间特征值的分布，使得噪声空间特征值改变量对虚拟辐射源 A 的入射角度更加敏感从而提高了算法的估计性能。仿真实验证明了本文所提出的基于噪声子空间特征值重构(ERNS)DOA 估计方法的有效性。

## 2 阵列接收信号模型

假设天线接收阵列为均匀圆阵，位于 YOZ 平面内，阵元间距为  $d$ ，阵元个数为  $M$ 。信号入射的俯仰角  $\varphi$  定义为入射方向与 XOZ 平面夹角，方位角  $\theta$  为入射方向在 XOZ 平面的投影与 X 轴正向夹角，如图 1 所示。考虑空间存在  $p$  个波长为  $\lambda_0$  的窄带远场辐射源，所有辐射源入射角的集合定义为  $\Theta = \{(\theta_i, \varphi_i) | 1 \leq i \leq p\}$ ，其中  $(\theta_i, \varphi_i)$  为第  $i$  个信号的入射角。则阵列接收到的数据可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$  为阵列接收数据矢量， $T$  表示矩阵转置； $\mathbf{n}(t)$  为  $M \times 1$  维噪声矢量； $\mathbf{s}(t)$  为  $P \times 1$  维信号矢量； $\mathbf{A}(\Theta)$  为  $M \times P$  维阵列导向矢量。

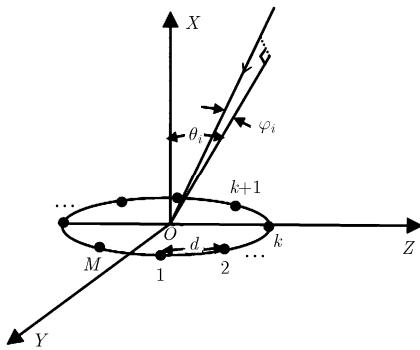


图 1 接收阵列示意图

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1) \ \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_p, \varphi_p)] \quad (2)$$

式中  $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$  为导向矢量函数，其第  $m$  个元素  $\mathbf{a}(\theta, \varphi)_m = \exp(j2\pi \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k} / \lambda_0)$ ， $\mathbf{r}_m$  为第  $m$  个阵元的位置矢量， $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi + \mathbf{e}_z \sin \theta \cos \varphi$  为入射方向  $(\theta, \varphi)$  的单位向量。

假设通道间噪声为独立同分布的高斯白噪声服从  $N(0, \sigma_n^2)$ ，且噪声与信号独立。则阵列接收数据的协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H]$  表示信号协方差矩阵， $\sigma_n^2$  为噪声功率， $\mathbf{I}$  为  $M$  维单位矩阵。

## 3 基于噪声空间特征值重构的 DOA 估计算法原理

将接收数据的协方差矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征值分解得

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H \quad (4)$$

其中  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$  为特征值构成的对角阵， $\text{diag}(\bullet)$  为对角化函数； $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_M]$  为相应的特征向量矩阵。将特征值从大到小排列：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_M = \sigma_n^2 \quad (5)$$

令  $\mathbf{\Sigma}_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ， $\mathbf{\Sigma}_N = \text{diag}(\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_M)$  对应的特征向量矩阵记为  $\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_N$ ，则式(4)为

$$\mathbf{R} = [\mathbf{U}_S \ \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_S & \\ & \mathbf{\Sigma}_N \end{bmatrix} [\mathbf{U}_S \ \mathbf{U}_N]^H \quad (6)$$

由子空间原理知，空间  $\text{span}(\mathbf{U}_S) = \text{span}(\mathbf{A})$  为信号子空间， $\text{span}(\mathbf{U}_N) \perp \text{span}(\mathbf{U}_S)$  为噪声子空间。

### 3.1 基于噪声空间特征值不变性的 DOA 估计原理

在现有辐射源的基础上，假设  $(\theta', \varphi')$  方向还存在一个功率为  $\sigma_A^2$  的虚拟辐射源 A，该虚拟辐射源与真实信源及各通道噪声独立，构造接收信号的自相关矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} \triangleq \mathbf{R} + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta', \varphi') \mathbf{a}(\theta', \varphi')^H \quad (7)$$

对  $\mathbf{D}$  进行特征值分解，并将分解所得特征值从大到小排列得  $\mathbf{\Sigma}_D = \text{diag}(\lambda_{D1}, \lambda_{D2}, \dots, \lambda_{DM})$ ，同时前  $p$  个特征值构成对角阵  $\mathbf{\Sigma}_{DS}$ ，其余特征值构成对角阵  $\mathbf{\Sigma}_{DN}$ ，相应的特征向量矩阵分别记为  $\mathbf{U}_{DS}$  和  $\mathbf{U}_{DN}$ ，则式(7)可表示为

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_D \mathbf{\Sigma}_D \mathbf{U}_D^H = [\mathbf{U}_{DS} \ \mathbf{U}_{DN}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{DS} & \\ & \mathbf{\Sigma}_{DN} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_{DS} \ \mathbf{U}_{DN}]^H \quad (8)$$

**定理 1** 当且仅当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \in \Theta$  (即虚拟信源 A 与  $P$  个真实信源中的任意一个入射方向相同)时，噪声空间特征值保持不变<sup>[16]</sup>，即  $\mathbf{\Sigma}_{DN} = \mathbf{\Sigma}_N$ 。反之  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$ ，则  $\mathbf{\Sigma}_{DN} \neq \mathbf{\Sigma}_N$ 。

**证明** 当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \in \Theta$ ,

$$\begin{aligned} \text{令 } (\theta', \varphi') &= (\theta_i, \varphi_i), i \in [1, 2, \dots, P], \\ \mathbf{e} &= [\mathbf{0}_{1 \times (i-1)}, 1, \mathbf{0}_{1 \times (M-i)}]^T \end{aligned} \quad (9)$$

则自相关矩阵  $\mathbf{D}$  可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} + \sigma_A^2\mathbf{A}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}^H \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{D_s}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{R}_{D_s}(m, n) = \begin{cases} \mathbf{R}_s(m, n) + \sigma_A^2, & m = n = i \\ \mathbf{R}_s(m, n), & \text{其它} \end{cases} \quad (11)$$

由式(10)与式(11)得  $\mathbf{D}\mathbf{U}_{DN} = \mathbf{U}_{DN}\boldsymbol{\Sigma}_N$ , 即当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \in \Theta$  时  $\boldsymbol{\Sigma}_{DN} = \boldsymbol{\Sigma}_N$ 。

当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$  时, 即虚拟信源 A 与  $P$  个信源中的任意一个入射方向均不同。则

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta', \varphi')\mathbf{a}(\theta', \varphi')^H \\ &= [\mathbf{A}, \mathbf{a}(\theta', \varphi')] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_A^2 \end{bmatrix} [\mathbf{A}, \mathbf{a}(\theta', \varphi')]^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}'\mathbf{R}_{D_s}\mathbf{A}'^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (12)$$

由式(12)知, 当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$  时引入虚拟信源相当于在原有信源的基础上又增加了 1 维入射信号, 则特征值矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_D = \text{diag}(\lambda_{D1}, \lambda_{D2}, \dots, \lambda_{DM})$  中元素按照从大到小为

$$\lambda_{D1} \geq \lambda_{D2} \geq \dots \geq \lambda_{DP+1} \geq \lambda_{DP+2} = \dots = \lambda_{DM} = \sigma_n^2 \quad (13)$$

对比式(13)与式(5)可得,  $\text{Rank}(\mathbf{U}_{DN}) = M - P - 1$  而  $\text{Rank}(\mathbf{U}_N) = M - P$ , 所以  $\boldsymbol{\Sigma}_{DN} \neq \boldsymbol{\Sigma}_N$ 。  
证毕

由定理 1 构造算法的空间谱表达式为

$$F(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sum_{i=P+1}^M (\lambda_{Di} - \lambda_i)} \quad (14)$$

### 3.2 噪声空间特征值重构算法原理

3.1 节已证明了噪声空间特征值不变性, 若改变阵列接收信号的自相关矩阵的噪声特征值, 则信源的 DOA 估计性能也会发生改变, 因此可以通过重构噪声空间特征值来提高算法的估计性能。对式(6)中  $\mathbf{R}$  的特征值分解所得噪声空间特征值进行重构。令重构后的接收信号自相关矩阵为  $\bar{\mathbf{R}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{U}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{U}^H = [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_S - \sigma_r^2\mathbf{I} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N]^H \\ &= [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_S \\ \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N \end{bmatrix} [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N]^H \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_N$  为式(6)中矩阵  $\mathbf{R}$  的信号空间与噪声空

间特征向量。且  $\sigma_r^2$  满足  $\sigma_r^2 < \lambda_P$ , 其中  $\lambda_P$  为式(5)中  $\mathbf{R}$  的信号空间特征值中的最小值。 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_S = \boldsymbol{\Sigma}_S - \sigma_r^2\mathbf{I}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N = \mathbf{0}_{(M-P) \times (M-P)}$  分别为特征值重构后的信号空间与噪声空间的特征值对角阵。利用重构后的自相关矩阵  $\bar{\mathbf{R}}$  构造含有虚拟信源 A 的矩阵  $\bar{\mathbf{D}}$

$$\bar{\mathbf{D}} \triangleq \bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta', \varphi')\mathbf{a}(\theta', \varphi')^H \quad (16)$$

其中  $\sigma_A^2 > 0$ ,  $\mathbf{a}(\theta', \varphi')$  代表虚拟信源 A 的入射方向, 同理将  $\bar{\mathbf{D}}$  进行特征值分解得

$$\bar{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\tilde{\mathbf{U}}^H = [\tilde{\mathbf{U}}_S \tilde{\mathbf{U}}_N] \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_S \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_N \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{U}}_S \tilde{\mathbf{U}}_N]^H \quad (17)$$

其中  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_M)$  为  $\bar{\mathbf{D}}$  的特征值对角矩阵。

**推理 1** 当且仅当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \in \Theta$  时, (即虚拟信源 A 与  $P$  个真实信源中的任意一个入射方向相同)时, 噪声空间特征值依然保持不变, 即  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_N = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N$ 。反之当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$ , 则  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_N \neq \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N$ 。

**证明** 当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \in \Theta$  时, 不妨设  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') = (\theta_i, \varphi_i)$ ,  $i \in [1, 2, \dots, P]$ 。则矩阵  $\bar{\mathbf{D}}$  可表示为

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H \quad (18)$$

将式(18)两边同时乘以  $\mathbf{U}_N$ , 其中  $\mathbf{U}_N$  为式(6)中矩阵  $\mathbf{R}$  的噪声空间特征向量。

$$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{U}_N = [\bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H]\mathbf{U}_N \quad (19)$$

其中  $\bar{\mathbf{R}}\mathbf{U}_N$  为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{U}_N &= [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_S - \sigma_r^2\mathbf{I} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N]^H \mathbf{U}_N \\ &= [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_S - \sigma_r^2\mathbf{I} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{I}]^T \\ &= \mathbf{0}_{M \times (M-P)} \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}\mathbf{U}_N &= [\bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H]\mathbf{U}_N \\ &= \mathbf{0}_{M \times (M-P)} + \sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H\mathbf{U}_N \\ &= \mathbf{0}_{M \times (M-P)} \end{aligned} \quad (21)$$

由于  $\text{span}(\mathbf{U}_S) = \text{span}(\mathbf{A})$  且  $\text{span}(\mathbf{U}_S) \perp \text{span}(\mathbf{U}_N)$ , 所以  $\sigma_A^2\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)^H\mathbf{U}_N = \mathbf{0}_{M \times (M-P)}$ 。由式(21)知  $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{P+1} \ \mathbf{u}_{P+2} \ \dots \ \mathbf{u}_M]$  为  $\bar{\mathbf{D}}$  的特征向量, 且特征向量  $\mathbf{u}_i, i = P+1, P+2, \dots, M$  所对应的特征值为 0。即

$$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{U}_N = \mathbf{U}_N\mathbf{0} \quad (22)$$

因此, 由式(22)可得

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_N = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N \text{ 即 } \tilde{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i = 0, i = P+1, P+2, \dots, M \quad (23)$$

接下来证明, 当  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$  时,  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_N \neq \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_N$ 。若  $\mathbf{a}(\theta', \varphi') \notin \Theta$ , 令  $\mathbf{a}(\theta', \varphi')\mathbf{a}(\theta', \varphi')^H$  表示为  $[\mathbf{U}_S \ \mathbf{U}_N]$  的

线性组合。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta, \varphi) &= [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] [\mathbf{c}_S \mathbf{c}_N]^T = \mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N \\ &= [\mathbf{U}_S \mathbf{U}_N] \mathbf{c} \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{P+1} \mathbf{u}_{P+2} \cdots \mathbf{u}_M]_{M \times (M-P)}$ , 令  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N$ , 则  $\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1 \in \text{span}(\mathbf{U}_S, \mathbf{v}_1)$ 。  $\mathbf{U}_N$  中含有  $M-P$  维列向量, 除去  $\mathbf{v}_1$  将  $\mathbf{U}_N$  中剩余  $M-P-1$  维列向量分别与  $\mathbf{v}_1$  进行单位化与正交化, 使得  $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_1, i = 2, 3, \dots, M-P$ 。

(1) 首先证明矩阵  $\tilde{\mathbf{D}}$  的噪声子空间中含有  $M-P-1$  个 0 特征值。

令  $\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_1 \tilde{\mathbf{V}}] = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_{M-P}]_{M \times (M-P)}$ , 则有  $\mathbf{v}_1 \perp \text{span}(\tilde{\mathbf{V}})$ 。因  $\text{span}(\mathbf{U}_S) \perp \text{span}(\mathbf{U}_N)$ , 所以有  $\text{span}(\mathbf{U}_S) \perp \text{span}(\mathbf{V}_N)$ ,  $\text{span}(\mathbf{U}_S) \perp \text{span}(\tilde{\mathbf{V}})$  进而得到  $\text{span}(\mathbf{U}_S, \mathbf{v}_1) \perp \text{span}(\tilde{\mathbf{V}})$ 。将  $\tilde{\mathbf{V}}$  乘以式(18)左右两边得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{V}} &= (\bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi)) \tilde{\mathbf{V}} \\ &= \mathbf{O}_{M \times (M-P-1)} + \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1) \\ &\quad \cdot (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1)^H \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{O}_{M \times (M-P-1)} \end{aligned} \quad (25)$$

由式(25)知  $\tilde{\mathbf{D}}$  有  $M-P-1$  为 0 的特征值, 相应的特征向量为  $\tilde{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_{M-P}]_{M \times (M-P-1)}$ 。

(2) 其次证明, 矩阵  $\tilde{\mathbf{D}}$  除  $M-P-1$  个 0 特征值外其余特征值不为 0。

将式(18)左右两边同时乘以  $\mathbf{v}_1$  得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{v}_1 &= \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v}_1 + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{O}_{M \times 1} + \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N) \\ &\quad \cdot (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N)^H \mathbf{v}_1 = \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1) \\ &\quad \cdot (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1)^H \mathbf{v}_1 = \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (26)$$

由式(26)得若  $\mathbf{c}_S = \mathbf{0}$ , 则  $\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{v}_1 = \sigma_A^2 \mathbf{v}_1$ , 即特征向量  $\mathbf{v}_1$  所对应的特征值为  $\sigma_A^2 > 0$ 。若  $\mathbf{c}_S \neq \mathbf{0}$ , 由式(26)得  $\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{v}_1 \neq h \mathbf{v}_1$ , 其中  $h \in \mathbb{R}$ 。即  $\mathbf{v}_1$  不是  $\tilde{\mathbf{D}}$  的特征向量。接下来利用反证法证明当  $\mathbf{v}_1$  不是  $\tilde{\mathbf{D}}$  的特征向量时, 除了  $M-P-1$  个 0 特征值外  $\tilde{\mathbf{D}}$  其它特征值大于 0。

不妨设  $\tilde{\mathbf{u}}_s$  为矩阵  $\tilde{\mathbf{D}}$  的除  $[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{M-P}]$  外的另一个特征向量, 令

$$\tilde{\mathbf{u}}_s = \sum_{k=1}^P \rho_k \mathbf{u}_k + \rho_{P+1} \mathbf{v}_1 \quad (27)$$

设与特征向量  $\tilde{\mathbf{u}}_s$  对应的特征值为  $\lambda_s$ , 由假设可得

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{u}}_s = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}_s + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \tilde{\mathbf{u}}_s = \tilde{\mathbf{u}}_s \lambda_s \quad (28)$$

将式(28)左右同时左乘以  $\mathbf{v}_1^H$  得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^H \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}_s + \mathbf{v}_1^H \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \tilde{\mathbf{u}}_s \\ = \mathbf{v}_1^H \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N) (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{U}_N \mathbf{c}_N)^H \tilde{\mathbf{u}}_s \\ = \sigma_A^2 (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1)^H \tilde{\mathbf{u}}_s = \lambda_s \rho_{P+1} \end{aligned} \quad (29)$$

将式(28)左右两边同时左乘以  $\mathbf{u}_i^H, i \in [1, 2, \dots, P]$ , 且利用式(29)的结果可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^H \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}_s + \mathbf{u}_i^H \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \tilde{\mathbf{u}}_s \\ = \lambda_i \rho_i + \sigma_A^2 \mathbf{c}_{S_i} (\mathbf{U}_S \mathbf{c}_S + \mathbf{v}_1)^H \tilde{\mathbf{u}}_s \\ = \lambda_i \rho_i + \mathbf{c}_{S_i} \lambda_s \rho_{P+1} = \lambda_s \rho_i \end{aligned} \quad (30)$$

整理式(30)得

$$\lambda_i \rho_i = \lambda_s (\rho_i - \mathbf{c}_{S_i} \rho_{P+1}), \quad i \in [1, 2, \dots, P] \quad (31)$$

由式(30)得若  $\lambda_s = 0$ , 由于  $\lambda_i \neq 0, i \in [1, 2, \dots, P]$ , 则  $\rho_i = 0$  即  $\tilde{\mathbf{u}}_s = \rho_{P+1} \mathbf{v}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  的对应于特征向量  $\mathbf{v}_1$  的特征值为 0。但这与由式(26)得到的  $\tilde{\mathbf{D}}$  的特征向量  $\mathbf{v}_1$  所对应的特征值为  $\sigma_A^2 > 0$  的结论矛盾。因此, 特征向量  $\tilde{\mathbf{u}}_s$  对应的特征值为  $\lambda_s \neq 0$ 。由于  $\tilde{\mathbf{D}}$  为正定矩阵, 因此  $\lambda_s > 0$ 。

经上述证明可知当  $\mathbf{a}(\theta, \varphi) \notin \Theta$  时,  $\tilde{\mathbf{D}}$  的特征值为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \bar{\lambda}_i = 0, \quad i = P+2, P+3, \dots, M \\ \tilde{\lambda}_i &> 0 \neq \bar{\lambda}_i, \quad i = P+1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

因此当  $\mathbf{a}(\theta, \varphi) \notin \Theta$  时,  $\tilde{\Sigma}_N \neq \bar{\Sigma}_N$ 。证毕  
根据推理 1, 在自相关矩阵  $\bar{\mathbf{R}}$  的基础上, 令

$$\underline{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}} + \sigma_r^2 \mathbf{I} \quad (33)$$

然后构造矩阵  $\underline{\mathbf{D}}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}} &\triangleq \bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \\ &= \bar{\mathbf{R}} + \sigma_r^2 \mathbf{I} + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \\ &= \tilde{\mathbf{D}} + \sigma_r^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{U}}^H + \sigma_r^2 \mathbf{I} \\ &= [\tilde{\mathbf{U}}_S \tilde{\mathbf{U}}_N] \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_S \\ \tilde{\Sigma}_N + \sigma_r^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{U}}_S \tilde{\mathbf{U}}_N]^H \end{aligned} \quad (34)$$

由式(33)知  $\underline{\mathbf{R}}$  的噪声空间特征值矩阵为  $\bar{\Sigma}_N + \sigma_r^2 \mathbf{I}$ 。由式(34)知  $\underline{\mathbf{D}}$  的噪声空间特征值矩阵为  $\tilde{\Sigma}_N + \sigma_r^2 \mathbf{I}$ 。根据推理 1 得当  $\mathbf{a}(\theta, \varphi) \in \Theta$  时,  $\tilde{\Sigma}_N + \sigma_r^2 \mathbf{I} = \bar{\Sigma}_N + \sigma_r^2 \mathbf{I}$ 。即经噪声空间特征值重构之后, 当虚拟信源与真实信源入射方向一致时, 矩阵  $\underline{\mathbf{D}}$  与自相关矩阵  $\underline{\mathbf{R}}$  的噪声空间特征值保持不变。

#### 4 算法的 DOA 估计流程

根据第 3 节证明, 本算法 DOA 估计步骤如下。

(1) 如果采样快拍数为  $L$ , 则接收信号采样协方差矩阵的估计  $\mathbf{R}$  为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{x}(j) \mathbf{x}^H(j) \quad (35)$$

(2)对  $\mathbf{R}$  特征值分解得  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H$ , 其中  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ , 对应的噪声空间特征值为  $\lambda_i, i = P + 1, P + 2, \dots, M$ 。

(3)对  $\mathbf{R}$  中噪声空间特征值进行重构, 令  $\bar{\mathbf{\Sigma}} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{P+1}, \dots, \bar{\lambda}_M)$ ,  $\bar{\mathbf{\Sigma}}_S = \mathbf{\Sigma}_S$ 。根据实验仿真确定噪声空间特征值为

$$\bar{\lambda}_{P+1} = \bar{\lambda}_{P+2} \dots = \bar{\lambda}_M = (\lambda_P + \lambda_{P+1})/2 \quad (36)$$

(4)令  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{U}^H$ , 其中  $\mathbf{U}$  为步骤(2)中  $\mathbf{R}$  分解所得特征向量。

(5)引入虚拟信源  $\mathbf{A}$ , 构造矩阵  $\bar{\mathbf{D}} \triangleq \bar{\mathbf{R}} + \sigma_A^2 \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi)$ , 其中  $\sigma_A^2 = \text{tr}(\bar{\mathbf{R}})/M$  [16]。对  $\mathbf{A}$  的每个入射方向  $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$ , 进行特征值分解得  $\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{\Sigma}}\bar{\mathbf{U}}^H$ 。其中  $\bar{\mathbf{\Sigma}} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_M)$ , 噪声空间特征值按照从大到小的顺序为  $\bar{\lambda}_{P+1} \geq \bar{\lambda}_{P+2} \geq \dots \geq \bar{\lambda}_M$ 。

(6)当  $(\theta, \varphi) = (\theta_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots, P$  时, 谱函数  $F(\theta, \varphi)$  取得极大值

$$F(\theta, \varphi) = 1 / \sum_{j=P+1}^M (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_j) \quad (37)$$

此时  $(\theta, \varphi)$  为真实信源的入射方向。

(7)在感兴趣区域内搜索  $F(\theta, \varphi)$  的极大值点, 相应的  $(\theta, \varphi)$  为所要估计的信源 DOA。

### 5 仿真结果及分析

为验证本文算法的估计性能, 采用 Matlab 进行仿真实验。实验条件如下: (1)接收阵列为均匀圆阵, 阵元数  $M = 8$ , 阵元间距为  $d = 0.5\lambda_0$ 。(2)入射信源个数  $N = 2$ 。(3)采样快拍数  $L = 1000$ 。(4)蒙特卡洛实验次数 500 次。

**仿真 1** 入射信号为两个功率相差 20 dB 的强弱信号。弱信号入射的方位与俯仰角度为  $(0^\circ, 0^\circ)$ , 信噪比为 5 dB。强信号入射的方位角与俯仰角为

$(1^\circ \sim 12^\circ, 0^\circ)$ , 变化的步长为  $0.5^\circ$ , 信噪比为 25 dB。强信号的俯仰角固定, 方位角变化。随着强信号入射方位角度变化 3 种算法成功估计弱信号的概率如图 2 所示。

由图 2 可以看出强弱信号之间的夹角越小时, 本文算法对弱信号估计的成功概率很有优势。当强弱夹角小于  $2^\circ$  时本文算法估计成功的概率为 0.25, 而其他两种算法基本无法区分两信号。当两信号夹角为  $2^\circ$  时, 本文算法估计成功的概率接近 0.5, 而文献[16]的算法约为 0.13。

**仿真 2** 弱信号入射的方位角与俯仰角为  $(0^\circ, 0^\circ)$ , 强信号入射的方位角与俯仰角为  $(5^\circ, 0^\circ)$ 。强弱信号的信噪比相差 20 dB, 则随弱信号信号信噪比 SNR 的变化, 对弱信号估计成功的概率如图 3 所示。弱信号信噪比小于 6 dB 时, 本文算法的成功概率均高于其他两种算法, 而 MUSIC 算法基本无法估计出弱信号。

**仿真 3** 弱信号入射的方位角与俯仰角为  $(0^\circ, 0^\circ)$ , 强信号入射的方位角与俯仰角为  $(5^\circ, 0^\circ)$ 。强弱信号的信噪比相差 15 dB, 则随弱信号信号信噪比 SNR 的变化, 对弱信号估计的均方根误差如图 4 所示。可以看出当弱信号信噪比大于 5 dB 时, 本文算法与文献[16]算法对弱信号估计的均方根误差基本相同, 且均比 MUSIC 算法小。最终 3 种算法的估计精度趋于一致。

### 6 结论

本文提出了一种基于噪声空间特征值重构的 DOA 估计算法。通过重构噪声空间特征值, 减小了信号空间泄漏到噪声空间的能量, 从而提高了算法性能。本文所提算法对天线接收阵列形式无特殊要求, 对 1 维与 2 维 DOA 估计均适用。

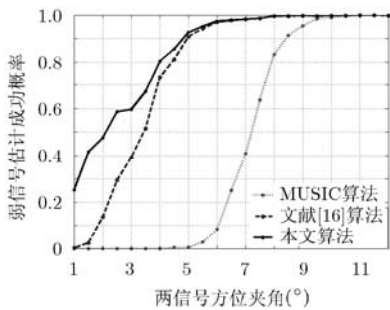


图 2 随两信号方位夹角变化弱信号估计成功的概率

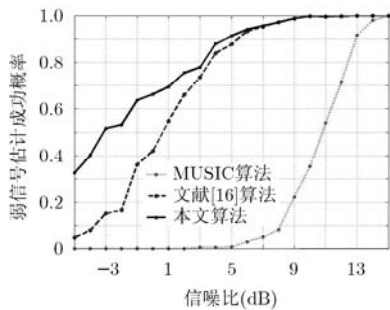


图 3 不同信噪比下弱信号估计的成功概率

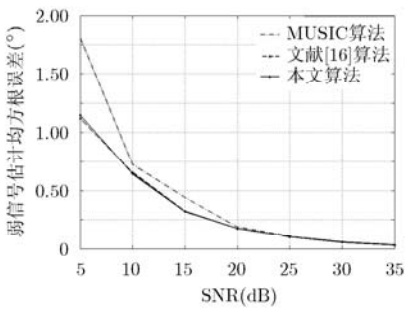


图 4 随弱信号信噪比变化弱信号估计值的均方根误差

### 参考文献

[1] Agarwal K, Li Pan, Legong Y K, et al. Parctical applications

of multiple signal classification[J]. *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, 2012, 22(3):

- 359-369.
- [2] Rangarao K V and Venkatanarasimhan S. Gold-MUSIC: a variation on MUSIC to accurately determine peaks of the spectrum[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(4): 2263-2268.
- [3] 闫锋刚, 金铭, 乔晓林. 适用任意阵列的变换域二维波达角快速估计算法[J]. *电子学报*, 2013, 41(5): 936-942.  
Yan Feng-gang, Jin Ming, and Qiao Xiao-lin. Fast 2-D DOA estimation method in transformed domain with arbitrary arrays[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(5): 936-942.
- [4] 王凌, 李国林, 谢鑫, 等. 非圆信号二维 DOA 和初始相位联合估计方法[J]. *雷达学报*, 2012, 1(1): 43-49.  
Wang Ling, Li Guo-lin, Xie Xin, et al. Joint 2-D DOA and noncircularity phase estimation method[J]. *Journal of Radars*, 2012, 1(1): 43-49.
- [5] Qu J Y, Li X, and Wen Y J. A new method for weak signals' DOA estimation in the presence of strong interferences[C]. International Conference on Signal Processing, Beijing, 2012: 320-323.
- [6] He J, Swamy M N S, and Ahmad M O. Joint DOD and DOA estimation for MIMO array with velocity receive sensors[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(7): 399-402.
- [7] 朱伟, 陈伯孝. 强相干扰下微弱信号波达方向估计[J]. *电波科学学报*, 2013, 28(2): 212-219.  
Zhu Wei and Chen Bai-xiao. Weak signal DOA estimation under coherent intensive interferences[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2013, 28(2): 212-219.
- [8] 柴立功, 罗景青. 一种强干扰条件下微弱信号 DOA 估计的新方法[J]. *电子与信息学报*, 2005, 27(10): 1517-1520.  
Chai Li-gong and Luo Jing-qing. A novel algorithm for weak signals' DOA estimation under intensive interferences[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(10): 1517-1520.
- [9] 程正东, 罗景青, 樊祥, 等. 信号源功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(5): 1088-1091.  
Cheng Zheng-dong, Luo Jing-qing, Fan Xiang, et al. Effect of power difference of two signal sources on resolving performance of MUSIC algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(5): 1088-1091.
- [10] Stoica P and Sharman K C. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, 38(7): 1132-1143.
- [11] Cedervall M and Moses R L. Efficient maximum likelihood DOA estimation for signals with known waveforms in the presence of multipath[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 1997, 45(3): 808-812.
- [12] 陈辉, 苏海军. 强干扰/信号背景下的 DOA 估计新方法[J]. *电子学报*, 2006, 34(3): 530-534.  
Chen Hui and Su Hai-jun. A new approach to estimate DOA in presence of strong jamming/signal suppression[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(3): 530-534.
- [13] 张静, 廖桂生, 张洁. 强信号背景下基于噪声子空间扩充的弱信号 DOA 估计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(6): 1279-1283.  
Zhang Jing, Liao Gui-sheng, and Zhang Jie. DOA estimation based on extended noise subspace in the presence of strong signals[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(6): 1279-1283.
- [14] 贺顺, 杨志伟, 张娟, 等. 自适应加权修正的强弱信号 Capon 谱估计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(5): 905-908.  
He Shun, Yang Zhi-wei, Zhang Juan, et al. Modified Capon approach with adaptive weighted for discriminating strong and weak signals[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(5): 905-908.
- [15] 徐亮, 曾操, 廖桂生, 等. 基于特征波束形成的强弱信号波达方向与新源数估计方法[J]. *电子与信息学报*. 2011, 33(2): 321-325.  
Xu Liang, Zeng Cao, Liao Gui-sheng, et al. DOA and source number estimation method for strong and weak signals based on eigen beamforming[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(2): 321-325.
- [16] Olfat A and Nader-Esfahani S. A new signal subspace processing for DOA estimation[J]. *Signal Processing*, 2004, 84(4): 721-728.
- 方庆园: 女, 1987 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理与天线技术.
- 韩 勇: 男, 1976 年生, 讲师, 主要研究方向为阵列信号处理、DOA 估计及目标识别.