

相位噪声对时差估计的影响分析

钟森 夏威* 何子述
(电子科技大学电子工程学院 成都 611731)

摘要: 在到达时间差(TDOA)测量中,两异地接收站所配备的本振都会存在相位噪声,该相位噪声会影响时差测量的性能。该文分析了相位噪声对经典的互相关法时差估计无偏性的影响,同时推导了仅考虑相位噪声时 TDOA 估计精度的克拉美罗下限(CRLB)。并进一步得到了相位噪声与加性噪声都存在时的 CRLB 及其相对于加性噪声环境下的 CRLB 退化系数。仿真结果验证了理论分析的结果。

关键词: 信号处理;到达时间差(TDOA);相位噪声;克拉美罗下限(CRLB);互相关法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)11-2614-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01909

Analysis of the Effect of Phase Noise on Time Difference Estimation

Zhong Sen Xia Wei He Zi-shu

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: In the Time Difference Of Arrival (TDOA) measurement system, the performance of time difference estimation degrades due to the inevitable presence of phase noises of local oscillators at spatially separated receivers. The effect of the phase noise on the unbiasedness of classic cross-correlation time difference estimator is discussed herein, as well as the Cramér-Rao Lower Bound (CRLB) of estimation is derived in the phase noise environment. Furthermore, the CRLB of time difference estimation in additive noise environment with phase noise considered is derived. The CRLB degradation coefficient with respect to the CRLB in the additive noise environment is also given. The theoretical analysis is validated by the simulation results.

Key words: Signal processing; Time Difference Of Arrival (TDOA); Phase noise; Cramér-Rao Lower Bound (CRLB); Cross-correlation method

1 引言

时差测量广泛应用于雷达、声呐、语音增强等信号处理领域。时差测量有很多种方法,如文献[1-5]等,但这些方法一般都假设用于时差测量的接收机是理想的接收机,接收机内部不会对接收到的信号间的时差关系产生影响。在高精度时差测量中信号非理想接收是不得不考虑的问题。为了具体说明非理想接收对时差测量的影响,本文着眼于辐射源信号到达两异地接收站的到达时间差测量,辐射源信号经过接收机内部的混频、采样等处理得到的观测信号间的时差关系将会受到两异地接收机内混频频率一致性误差、采样频率一致性误差、相位噪声等非理想因素的影响。

接收机内部的混频、采样等所需的时钟通常都来自于本地系统时钟,两不同接收机中系统时钟虽然标称频率相同,但其实际工作频率总会与标称频率存在偏差,且由于两系统时钟的各自独立运行,

其各自的频率偏差也是不相同的。针对这样的情况,文献[6-8]分析了时钟频率相位误差对时差测量或时延估计的影响并给出了其解决办法,但是关于系统时钟的相位噪声对时差测量的影响分析,却很少有文献讨论该问题。直到2012年瑞典国防研究院(Swedish Defense Research Agency)的研究人员在文献[9]中用实验证实了相位噪声对时差测量的影响,并提出了利用非相干数据融合(Incoherent Data Fusion, IDF)的方法来减小相位噪声对时差测量的影响。虽然该文献提出了减小相位噪声对时差测量影响的方法,但是相位噪声对时差测量影响有多大并没有从理论上给出详细的分析。

为了从理论上分析清楚相位噪声对时差测量的影响,本文分析相位噪声对经典相关法^[1]时差估计无偏性的影响,并给出了相位噪声下时差估计精度的克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB),并与加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)下时差估计的 CRLB 进行比较,在相位噪声与加性噪声下 CRLB 相同的准则下,得出了相位噪声功率与加性噪声功率间的等效关系式,

2013-12-06 收到, 2014-04-15 改回

国家自然科学基金(61101173)资助课题

*通信作者: 夏威 wx@uestc.edu.cn

通过这一关系式可以直接计算出该相位噪声对应多大加性噪声对时差测量的影响，以便在系统设计时方便时钟器件的选择以及时差测量精度的分析。在此基础上，本文进一步推导得到了相位噪声与 AWGN 同时存在时的时差估计 CRLB，以及该 CRLB 相对 AWGN 环境下的 CRLB 间的退化系数闭式表达式。通过相位噪声与 AWGN 都存在时的 CRLB 表达式，可以更准确地分析时差测量的理论精度。通过退化系数表达式，可以计算出系统所选用的时钟器件会对时差测量精度造成多大的影响。另外，这些理论分析结果也可以帮助工程人员按照时差测量精度指标选定系统时钟。本文也给出了在典型时差估计方法下的仿真结果，通过比较该仿真结果与理论分析结果，进一步说明了本文理论分析结果的适用范围。

2 相位噪声下时差测量模型

考虑混频本振相位噪声作用下，且假定接收到 RF 信号经过混频器直接混频到基带输出 I/Q 两路信号。参考接收站与辅助接收站接收到的复基带信号 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= s(t - \tau_1) e^{j\varphi_{1,\text{mix}}(t - \tau_1)} \\ x_2(t) &= as(t - \tau_2) e^{j\varphi_{2,\text{mix}}(t - \tau_2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 τ_1 与 τ_2 分别表示辐射源信号到两个接收站的传播时延， a 表示实值的幅度系数， $\varphi_{1,\text{mix}}(t - \tau_1)$ 与 $\varphi_{2,\text{mix}}(t - \tau_2)$ 分别表示两接收站中混频引入的时变相位噪声。假定信号 $s(t)$ 为未知的确定信号，且不是单频信号。经采样后的离散基带信号模型可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &= s[n - D_1] e^{j\varphi_{1,\Sigma}[n - D_1]} \\ x_2[n] &= as[n - D_2] e^{j\varphi_{2,\Sigma}[n - D_2]} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 $D_i \triangleq \tau_i / T_s$, $i = 1, 2$, $x[n] \triangleq x(nT_s)$, T_s 表示采样周期，且

$$\varphi_{i,\Sigma}[n - D_i] = \varphi_{i,\text{mix}}[n - D_i] + \varphi_{i,\text{sam}}[n - D_i], \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

式(3)中时变相位 $\varphi_{i,\text{sam}}[n - D_i]$ 表示由 A/D 采样时钟相位噪声引起的相位噪声。在离散时间信号模型下，时差 $\tau_{2,1} \triangleq \tau_2 - \tau_1$ 的估计问题也就等效于估计出时差 $D_{2,1} \triangleq D_2 - D_1$ 。在 A/D 转换过程中，量化噪声为加性噪声，可以将其与系统其它加性噪声统一考虑，并假定为高斯白噪声，而这里考虑的相位噪声为乘性噪声，在考虑乘性噪声时，暂不考虑加性噪声对时差测量的影响。

时变的本振相位噪声通常可认为是维纳过程^[10,11]，这里假定两相位噪声都为维纳过程，且它们分别服

从 $\varphi_{1,\Sigma}[n] \sim N(0, \sigma_{1,\Sigma}^2 n)$ 与 $\varphi_{2,\Sigma}[n] \sim N(0, \sigma_{2,\Sigma}^2 n)$ 分布，这里 $\sigma_{1,\Sigma}^2$ 与 $\sigma_{2,\Sigma}^2$ 分别表示两相位噪声过程增量方差（相位噪声功率）。振荡器相位噪声增量方差 σ_{LO}^2 可采用式(4)测定^[11-13]

$$\sigma_{\text{LO}}^2 = 2\pi W T_s \quad (4)$$

这里常数 W 表示振荡器洛伦兹谱的单边 3 dB 带宽。由式(3)可知，信号中的相位噪声由两部分构成，这两部分都来自于振荡器相位噪声，于是信号中的相位噪声可近似为两倍的振荡器相位噪声，其相位噪声功率

$$\sigma_{i,\Sigma}^2 \approx 8\pi W T_s, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

这里假定两接收机所用本振洛伦兹谱的单边 3 dB 带宽 W 相同。

3 相位噪声对相关峰的影响

传统的时差测量通常通过搜索两路接收信号相关峰所对应的时延位置来测量时差^[1]，本段通过在相位噪声出现时推导相关函数的表达式来考察相关峰是否受到影响以及受到怎样的影响。在信号模型式(2)下，两观测信号的相关函数为

$$\begin{aligned} r[n, m] &= aE \left\{ x_1[n] x_2^*[n + m] \right\} \\ &= aE \left\{ s[n - D_1] s^*[n - D_2 + m] \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{j(\varphi_{1,\Sigma}[n - D_1] - \varphi_{2,\Sigma}[n - D_2 + m])} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $E\{\cdot\}$ 与上标 $*$ 分别表示数学期望与共轭。由相位噪声的随机特性，可假定相位噪声与信号不相关，同时由于两相位噪声分别来自独立运行的两系统时钟，故可假定两相位噪声相互独立，故有

$$\begin{aligned} r[n, m] &= ar_s[m - D_{2,1}] E \left\{ e^{j\varphi_{1,\Sigma}[n - D_1]} \right\} \\ &\quad \cdot E \left\{ e^{-j\varphi_{2,\Sigma}[n - D_2 + m]} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

这里无噪平稳信号的自相关函数在 $m - \tau_{2,1} / T_s$ 延迟处定义为

$$r_s[m - D_{2,1}] \triangleq E \left\{ s[n - D_1] s^*[n - D_2 + m] \right\} \quad (8)$$

由维纳过程的平稳独立增量过程特性及增量服从高斯分布的特性，并利用高斯概率密度函数的积分等于 1 的性质得到结论：

$$E \left\{ e^{j\varphi[n]} \right\} = \exp(-\sigma^2 n / 2) \quad (9)$$

这里 $\varphi[n]$ 为维纳过程，且均值为 0，增量方差为 σ^2 。利用式(7)与式(9)可得到

$$r[n, m] = a \cdot c \cdot r_s[m - D_{2,1}] \cdot h(n, m) \quad (10)$$

这里常数 c 与二元函数 $h(n, m)$ 分别为

$$c = \exp\left(\left(\sigma_{1,\Sigma}^2 D_1 + \sigma_{2,\Sigma}^2 D_2\right) / 2\right) \quad (11)$$

$$h(n, m) = \exp\left(-\left(\left(\sigma_{1,\Sigma}^2 + \sigma_{2,\Sigma}^2\right)n + \sigma_{2,\Sigma}^2 m\right) / 2\right) \quad (12)$$

在不考虑相位噪声时,可知两观测信号的相关函数为 $a \cdot r_s[m - D_{2,1}]$,由自相关函数峰值位于零点的性质可知,其峰值位置出现在 $m = D_{2,1}$ 处,于是通过相关峰搜索即可求得无偏的时差估计。然而当相位噪声出现时,从式(10)可知,相位噪声使得相关峰位置可能会发生变化。从相关函数的性质可以看出两路基带信号为非联合平稳过程,该非平稳特性来源于调制相关函数的二元指数函数 $h(n, m)$,该函数只与相位噪声的分布有关而与信号无关。这说明相位噪声破坏了观测信号间的联合平稳特性。于是在实际工程中不能通过时间平均来代替统计平均以求取相关函数。即使能够求得非平稳下的2维相关函数,那么由于 $h(n, m)$ 的影响也无法确保得到无偏的时差估计值。

为了进一步直观的说明二元指数函数 $h(n, m)$ 对相关峰造成的影响,图1给出了在 $n = 0$ 时刻,几种不同相位噪声功率下的指数函数 $h(0, m)$ 。从图1可知,当相位噪声功率增大到一定程度后,原本无偏的时差估计将变为有偏估计(例如:相关峰在零点 $m = 0$ 处),若相关峰比较平坦或是相关函数旁瓣幅度较高,那么都有可能造成相关峰位置偏离零点。另一方面从图1也可看出较小的相位噪声功率(如 $\sigma_{1,\Sigma}^2 \leq 0.0001 \text{ rad}^2$)对相关峰的影响很小,这时可以通过多次测量的平均来获得较准确的时差测量结果,但当相位噪声功率很大时,由于估计的有偏性,通过多次测量的平均也无法获得较准确的时差测量结果。

4 相位噪声下时差估计的CRLB

第3节讨论了在相位噪声下时差估计的均值性能,本节将讨论时差估计的均方误差(Mean Square Error, MSE)性能,也即是时差测量的精度。对于无偏估计精度的理论极限通常采用CRLB来进行描述,下面给出了其具体的推导过程与结论。

在相位噪声环境下时差估计的CRLB推导中,暂不考虑加性噪声,对观测数据模型式(2),取相角得到

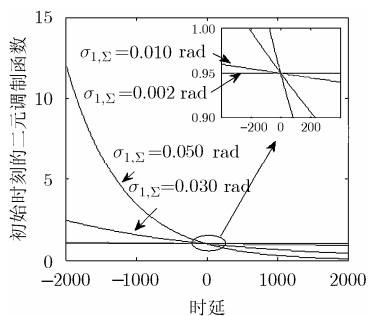


图1 不同相位噪声功率下的指数调制函数初始时刻的值 $h(0, m)$

$$\left. \begin{aligned} \text{angle}\{x_1[n]\} &= \text{angle}\{s[n - D_1]\} + \varphi_{1,\Sigma}[n - D_1] \\ \text{angle}\{x_2[n]\} &= \text{angle}\{as[n - D_2]\} + \varphi_{2,\Sigma}[n - D_2] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这里 $\text{angle}\{\cdot\}$ 表示取相角,其相角主值区间为 $(-\pi, \pi)$ 。对相角观测量差分得到输出信号(根据维纳过程的增量分布特性可知,维纳相位噪声差分输出为高斯白噪声^[14]:

$$y_i[n] = u[n - D_i] + (\varphi_{i,\Sigma}[n+1 - D_i] - \varphi_{i,\Sigma}[n - D_i]), \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

这里

$$y_i[n] = \text{angle}\left\{\frac{x_i[n+1]}{x_i[n]}\right\}, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$$u[n - D_i] = \text{angle}\left\{\frac{s[n+1 - D_i]}{s[n - D_i]}\right\}, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

定义矢量

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{y}_i = [y_i[0], y_i[1], \dots, y_i[N-2]]^T, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_i = [u[0 - D_i], u[1 - D_i], \dots, u[(N-2) - D_i]]^T, \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

根据先前的无噪信号确定性假定与维纳相位噪声假定,建立最大似然函数式(21)为

$$p(\mathbf{y}; D_{2,1}) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{C})} \cdot \exp\left[-(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}(D_1, D_2))^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}(D_1, D_2))\right] \quad (21)$$

式(21)中 $\boldsymbol{\mu}(D_1, D_2)$ 与 \mathbf{C} 分别表示观测信号矢量 \mathbf{y} 的均值与协方差矩阵,其定义分别为

$$\boldsymbol{\mu}(D_1, D_2) \triangleq \mathbf{E}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{u}(D_1, D_2)\} = \mathbf{u}(D_1, D_2) \quad (22)$$

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{E}\left\{(\mathbf{y} - \mathbf{E}\{\mathbf{y}\})(\mathbf{y} - \mathbf{E}\{\mathbf{y}\})^H\right\} = \mathbf{E}\begin{bmatrix} \varphi_{1,\Sigma} \varphi_{1,\Sigma}^H & \varphi_{1,\Sigma} \varphi_{2,\Sigma}^H \\ \varphi_{2,\Sigma} \varphi_{1,\Sigma}^H & \varphi_{2,\Sigma} \varphi_{2,\Sigma}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,\Sigma}^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{2,\Sigma}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

这里 $\varphi_{1,\Sigma}$ 与 $\varphi_{2,\Sigma}$ 分别定义为

$$\begin{aligned} \varphi_{i,\Sigma} &\triangleq [\varphi_{i,\Sigma}[1 - D_i] - \varphi_{i,\Sigma}[0 - D_i], \\ &\varphi_{i,\Sigma}[2 - D_i] - \varphi_{i,\Sigma}[1 - D_i], \dots, \\ &\varphi_{i,\Sigma}[N-1 - D_i] - \varphi_{i,\Sigma}[N-2 - D_i]]^T, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (24)$$

可见观测矢量的均值与参数 $D_{2,1}$ 有关,而观测量矢量的协方差矩阵与参数 $D_{2,1}$ 无关。

在实观测信号模型下(这里的实观测信号是指用于建立似然函数的观测矢量 \mathbf{y} , 这并不与前面基带复信号假定矛盾), Fisher 信息矩阵的第 1 行 1 列元素为^[15]

$$J_{1,1} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H(D_1, D_2)}{\partial D_{2,1}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(D_1, D_2)}{\partial D_{2,1}} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial D_{2,1}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial D_{2,1}} \right] = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H(D_1, D_2)}{\partial D_{2,1}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(D_1, D_2)}{\partial D_{2,1}} \quad (25)$$

由式(22)、式(23)与式(25), 推导得到

$$J_{1,1} = \sigma_{1,\Sigma}^{-2} \frac{\partial \mathbf{u}_1^H(D_1)}{\partial D_{2,1}} \frac{\partial \mathbf{u}_1(D_1)}{\partial D_{2,1}} + \sigma_{2,\Sigma}^{-2} \frac{\partial \mathbf{u}_2^H(D_2)}{\partial D_{2,1}} \frac{\partial \mathbf{u}_2(D_2)}{\partial D_{2,1}} = \sigma_{1,\Sigma}^{-2} \dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1 + \sigma_{2,\Sigma}^{-2} \sigma_{\varphi_2,\Sigma}^{-2} \dot{\mathbf{u}}_2^H \dot{\mathbf{u}}_2 \quad (26)$$

这里

$$\dot{\mathbf{u}}_i \triangleq (\partial \mathbf{u}_i(D_i)) / \partial D_i, \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

于是得到乘性相位噪声下时差估计的 CRLB 为

$$\text{CRLB}_\times(\widehat{D}_{2,1}) = J_{1,1}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{1,\Sigma}^{-2} \dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1 + \sigma_{2,\Sigma}^{-2} \dot{\mathbf{u}}_2^H \dot{\mathbf{u}}_2} \quad (28)$$

在式(28)中 $\sigma_{i,\Sigma}^{-2} \dot{\mathbf{u}}_i^H \dot{\mathbf{u}}_i, i = 1, 2$ 是导信号 $\dot{\mathbf{u}}_i$ 功率与相位噪声功率的比值, 该比值越大其 CRLB 值越小。这里信号 \mathbf{u}_i 是信号 \mathbf{s} 经过 FM 解调后的信号。特别说明: 对于调频(FM)信号来说, \mathbf{u}_1 与 \mathbf{u}_2 是 FM 解调后的基带信号, 其基带信号均方带宽(信号 \mathbf{u}_i 的均方带宽为 $\dot{\mathbf{u}}_i$ 的能量与 \mathbf{u}_i 的能量之比^[15])越大 CRLB 值越小, 也即是估计精度越好。

5 相位噪声与加性噪声下的 CRLB

在加性噪声模型下, 时差估计的 CRLB 为^[16]

$$\text{CRLB}_+(\widehat{D}_{2,1}) = 1 / [\sigma_1^{-2} \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1 + \sigma_2^{-2} a^2 \dot{\mathbf{s}}_2^H \dot{\mathbf{s}}_2] \quad (29)$$

这里 σ_1^2 与 σ_2^2 分别表示加性噪声的功率, 信号矢量 \mathbf{s}_i 与 $\dot{\mathbf{s}}_i$ 分别定义为

$$\mathbf{s}_i \triangleq [s[0 - D_i], s[1 - D_i], \dots, s[(N - 2) - D_i]]^T, \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_i \triangleq (\partial \mathbf{s}_i(D_i)) / \partial D_i, \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

在信号数据足够长的情况下近似为

$$\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1 \approx \dot{\mathbf{u}}_2^H \dot{\mathbf{u}}_2 \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1 \approx \dot{\mathbf{s}}_2^H \dot{\mathbf{s}}_2 \quad (33)$$

且进一步假定两观测信号的相位噪声功率相同(在选用同型号同批次的本振, 这个条件可近似满足), 加性高斯白噪声的功率也相同(这个条件在接收机

软硬件系统相同时也可近似满足), 根据式(28)与式(29)可分别得到乘性相位噪声环境与加性高斯白噪声环境下的 CRLB 为

$$\text{CRLB}_\times(\widehat{D}_{2,1}) = \sigma_{1,\Sigma}^2 / (2\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1) \quad (34)$$

$$\text{CRLB}_+(\widehat{D}_{2,1}) = \sigma_1^2 / [(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1] \quad (35)$$

由式(34)等于式(35)得到

$$\sigma_{1,\Sigma}^2 = \frac{2\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1}{(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1} \sigma_1^2 \quad \text{或} \quad \sigma_1^2 = \frac{(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1}{2\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1} \sigma_{1,\Sigma}^2 \quad (36)$$

也即是相位噪声的方差与加性高斯白噪声的方差满足式(36)时, 其分别单独作用下的时差估计的 CRLB 相同。由于无法直接推导相位噪声与加性噪声同时作用下的 CRLB, 这里利用等效关系式(36), 将相位噪声的功率等效为加性噪声后进行相位噪声与加性噪声同时作用下的 CRLB 等效计算, 由于相位噪声与加性噪声相互独立, 所以其共同作用时的等效加性噪声功率为

$$\sigma_\Sigma^2 = \left\{ [(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1] / (2\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1) \right\} \sigma_{1,\Sigma}^2 + \sigma_1^2 \quad (37)$$

于是等效的 CRLB 为

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_\Sigma(\widehat{D}_{2,1}) &= \sigma_\Sigma^2 / [(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1] \\ &= \left[\frac{(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1}{2\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1} \sigma_{1,\Sigma}^2 + \sigma_1^2 \right] / [(1 + a^2) \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1] \end{aligned} \quad (38)$$

从而可以用式(38)来确定在一定相位噪声功率与加性噪声功率下时差估计的理论精度下限以指导时钟器件的选择以及系统时差测量指标的确定等。

相位噪声与加性噪声同时存在下的 CRLB 与仅存在加性噪声下的 CRLB 间的关系可写为

$$\text{CRLB}_\Sigma(\widehat{D}_{2,1}) = \xi \cdot \text{CRLB}_+(\widehat{D}_{2,1}) \quad (39)$$

这里 CRLB 退化系数(degradation coefficient) ξ 定义为

$$\xi \triangleq 1 + [(1 + a^2) \sigma_{1,\Sigma}^2 \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1] / (2\sigma_1^2 \dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1) \quad (40)$$

这里退化系数是指在相位噪声与加性噪声同时存在时时差估计的 CRLB 与加性噪声环境下时差估计的 CRLB 间的比值。它反映的是相位噪声的出现所造成的时差估计 CRLB 放大倍数。由式(40)可知退化系数 $\xi \geq 1$, 也即是 $\text{CRLB}_\Sigma(\widehat{D}_{2,1}) \geq \text{CRLB}_+(\widehat{D}_{2,1})$ 。所以在相位噪声存在时, 时差估计的 MSE 性能恶化不可避免¹⁾。同时也可以看出当不存在相位噪声时,

¹⁾这里不考虑 $s[n]$ 为直流或单频复指数信号的情况, 此时式(40)中等号右边第 2 项分母为零。

也即是 $\sigma_{1,\Sigma}^2 = 0$ 时, 退化系数 $\xi = 1$, $\text{CRLB}_{\Sigma}(\widehat{D}_{2,1})$ 与 $\text{CRLB}_{+}(\widehat{D}_{2,1})$ 相同。

为了直观的说明式(38)给出的 CRLB 及式(40)给出的退化系数, 这里采用零中频 FM 信号(基带未解调 FM 信号)来进行数值试验, 以展示 CRLB 与相位噪声功率及 AWGN 噪声功率的关系。试验中零中频 FM 信号由式(41)产生

$$s[n] = \exp\left\{j \cdot \frac{\Delta f \sin(2\pi f_b n T_s)}{f_b}\right\}, n=0, 1, \dots, N-1 \quad (41)$$

这里采样周期 $T_s = 4 \mu\text{s}$, 调制信号频率 $f_b = 100 \text{ Hz}$, 频偏 $\Delta f = 50 \text{ kHz}$, 数据长度 $N = 2048$ 。

当幅度系数 $a = 1$ 时, 其 CRLB 与退化系数分别为

$$\text{CRLB}_{\Sigma}(\widehat{D}_{2,1}) = \frac{\left[(\dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1) / (\dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1)\right] \sigma_{1,\Sigma}^2 + \sigma_1^2}{2\dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1} \quad (42)$$

$$\xi = 1 + \left(\sigma_{1,\Sigma}^2 \dot{\mathbf{s}}_1^H \dot{\mathbf{s}}_1\right) / \left(\sigma_1^2 \dot{\mathbf{u}}_1^H \dot{\mathbf{u}}_1\right) \quad (43)$$

下面将在式(41)定义的信号下, 计算 $\text{CRLB}_{\Sigma}(\widehat{D}_{2,1})$ 与退化系数 ξ 。

图 2 给出了在相位噪声与加性高斯白噪声环境下的 CRLB, 可见在加性噪声功率不变时, 相位噪声功率越大, 时差估计的 CRLB 越大, 而在相位噪声功率不变时, 加性噪声功率越大时差估计的 CRLB 越大。

图 3 给出了在几种特定的相位噪声功率下 CRLB 退化系数与 SNR 的关系。SNR 的定义为无噪声信号功率与加性噪声平均功率之比。注意到由式(41)所给出的参考接收机的接收信号 $s[n]$ 功率恒为 1, 故 $\text{SNR} = 1/\sigma_1^2$ 。仿真结果表明, 当 SNR 较低时, 退化系数较小; 但随着 SNR 的增大, 退化系数迅速增大。这主要是因为, 低 SNR 情况下, 加性噪声更多地影响了时差估计 CRLB, 而相位噪声的影响相对较小; 而在高 SNR 情况下, 时差估计的 CRLB 受到相位噪声的显著影响。

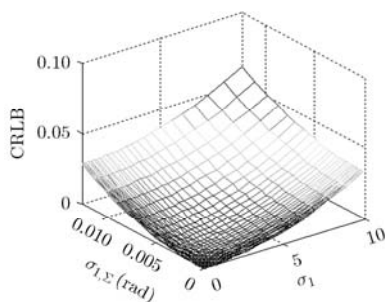


图 2 CRLB 与相位噪声及加性高斯白噪声间的关系

例如, 在两路接收信号的噪声功率都为 0.1, 也即是这里 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.1$, 信号幅度系数 a 为 1, 且信号为式(41)所给定的信号, 那么通过式(38), 就可以得到能够满足不同时差测量精度的相位噪声功率门限(表 1 列出了几个比较典型的值), 从而可以根据该门限来选择合适的时钟器件装配于时差定位系统。

表 1 不同时差测量精度对相位噪声功率的要求

时差测量的 RMSE (单位: ns)	100	200	400	800
$\sigma_{1,\Sigma}$ (单位: rad)	0.0036	0.0074	0.0148	0.0296

6 仿真比较

在下面的仿真中, 仿真信号与第 5 节中 CRLB 数值试验时相同, 并设置真实时差 $D_{2,1} = 1.2T_s$ 。Monte Carlo 独立试验 $Q = 1000$ 次, 且在仿真中采用基于 sinc 内插的相关峰搜索法得到分数时延估计(也称为子采样时延估计), sinc 内插实现子采样时延估计参见文献[2, 8]。这些设置在下面各仿真中相同。

为了直观的展示相位噪声对时差估计的影响, 这里仿真了仅存在相位噪声下的时差估计与仅存在加性噪声下的时差估计。图 4 绘制了根均方误差(Root Mean Square Error, RMSE)相等时相位噪声与加性噪声功率等效关系曲线; 该图同时给出了单独考虑相位噪声(此时不考虑 AWGN)与 AWGN(此时不考虑相噪)时, 获得相同 CRLB, 所对应的相位噪声功率与 AWGN 功率间的关系。如图 4 所示, 在高 SNR 条件下(AWGN 功率较小时), 相关峰搜索法仿真结果与 CRLB 的理论预测结果更为接近; 而在低 SNR 条件下(AWGN 功率较大时), 仿真结果明显偏离了 CRLB 理论预测结果。这一现象也反映了 CRLB 在 SNR 较高时能较好地描述估计精度的理论下限, 而在 SNR 较低时 CRLB 并不是一个紧的下界。

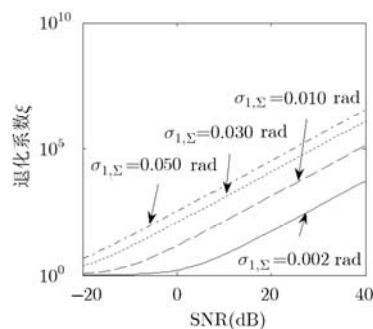


图 3 不同相位噪声功率下的 CRLB 退化系数

图 5 与图 6 中分别给出了同时存在相位噪声与 AWGN 时差估计的偏差和 RMSE 仿真结果。在仿真中, 辅助接收站的接收信号幅度系数 $a = 1$ 。时差估计偏差定义为 Q 次相关法时差估计结果的均值与真实时差间的差值。时差估计的 RMSE 定义为 Q 次时差估计误差的均方根。

从图 5 可以看出适度的相位噪声对时差估计的均值影响很小, 但当相位噪声大到一定程度时, 时差估计出现较大偏差, 且该偏差有正有负, 而第 3 节中相位噪声下指数函数 $h(n, m)$ 对相关峰的影响分析表明: 指数函数 $h(n, m)$ 会使得相关峰位置向负延迟方向偏移, 也即是时差估计的偏差仅存在负数。仿真结果似乎与理论分析相矛盾, 但实际上是不矛盾的, 这是因为 $h(n, m)$ 对相关峰的影响分析是建立

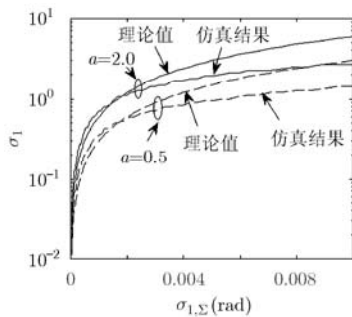


图 4 相位噪声与加性噪声功率等效对应关系

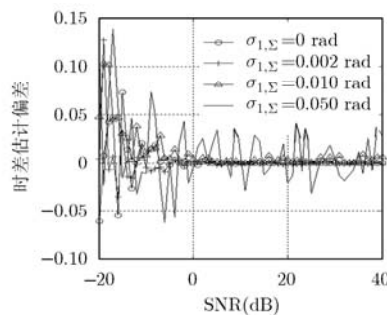


图 5 时差估计的均值性能

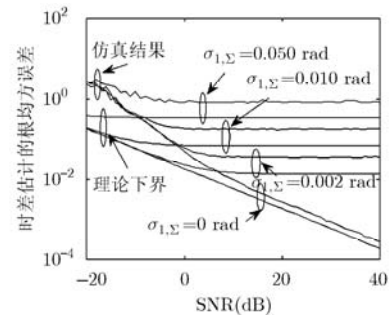


图 6 时差估计的 RMSE 与理论下限

从图 6 可以看出在仅存在加性噪声时 RMSE 的理论下限最小, 随着相位噪声功率的增大, 当 SNR 大于一定门限时 RMSE 理论下限几乎不再随 SNR 的增大而减小, 并且该 SNR 门限会随着相位噪声功率的增大而减小。利用相关法估计时差的仿真结果也有类似的变化规律, 且相关法时差估计仿真结果的 RMSE 在无相位噪声时与理论下限最靠近(SNR 大于一定门限的情况下), 而在相位噪声出现时与理论下限间的距离变大²⁾。同时图 6 也反映了时差估计的 RMSE 与理论下限在高 SNR 环境下更接近的特点, 这与图 4 中相位噪声功率与加性噪声功率较小时仿真结果与理论分析结果相对更接近的结论一致。

7 结束语

本文针对时差测量系统中时钟器件的相位噪声对时差测量的影响进行了理论分析, 给出了时变的乘性相位噪声对时差估计准确度的影响, 推导了时

在正确求取联合非平稳信号互相关函数基础上, 而仿真中采用的是联合平稳下时间平均代替统计平均来求取相关函数, 所以仿真结果的偏差并不会仅存在负的偏差。

在实际工程中, 目前常用的本振器件相位噪声水平基本能够确保在 $T_s = 4 \mu\text{s}$ 时使得信号相位噪声增量标准差低于 0.010 rad (根据本振器件参数依据式(4)可计算相位噪声标准差)。在这样的相位噪声功率下, 可以通过多次时差测量的平均来提高时差估计的准确性。虽然在实际工程中, 本振有限的相位噪声功率下时差估计结果的一阶统计特性较理想, 但是其二阶统计特性却会受到相位噪声的明显影响, 图 6 证实了这一事实。

差估计精度的理论极限, 并根据相位噪声与 AWGN 单独作用下的时差估计 CRLB 相等反推得到相位噪声功率与 AWGN 功率间的等效关系, 并根据该等效关系得到相位噪声与 AWGN 都存在时的 CRLB 及其相对于 AWGN 环境下的 CRLB 的退化系数。并且通过典型算法的仿真结果与理论分析结果比较说明了理论分析适用范围。本文所得到的相位噪声与 AWGN 都存在情况下时差估计的 CRLB 可以用来评估不同时差估计算法性能的优劣, 退化系数可以用来评估相位噪声对时差测量的具体影响, 而相位噪声与 AWGN 功率等效对应关系可以在时差测量系统设计时用来指导时钟源器件的选择。

参考文献

- [1] Carter G C. Coherence and time delay estimation[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1987, 75(2): 236-255.
- [2] So H C, Ching P C, and Chan Y T. A new algorithm for explicit adaptation of time delay[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(7): 1816-1820.
- [3] Ge Feng-xiang, Shen Dong-xu, Peng Ying-ning, et al. Super-resolution time delay estimation in multipath environments[J]. *IEEE Transactions on Circuits and*

²⁾这是因为在 AWGN 环境下相关法时差估计是最优估计^[1], 而当相位噪声出现时, 相关法时差估计不再是最优估计。

- Systems-I: Regular Papers*, 2007, 54(9): 1977–1986.
- [4] Li X, Ma X, Yan S, *et al.*. Super-resolution time delay estimation for narrowband signal[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2012, 6(8): 781–787.
- [5] Jiang F, Kuang Y, and Astrom K. Time delay estimation for TDOA self-calibration using truncated nuclear norm regularization[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Vancouver, Canada, 2013: 3885–3889.
- [6] Falk J, Handel P, and Jansson M. Effects of frequency and phase errors in electronic warfare TDOA direction-finding systems[C]. *Military Communications Conference (MILCOM)*, Boston, MA, USA, 2003: 118–123.
- [7] Lin Jia-Chin and Hsu Heng-Yuan. Timing-delay and frequency-offset estimations for initial synchronization on time-varying Rayleigh fading channels[J]. *IET Communications*, 2013, 7(6): 562–576.
- [8] Zhong Sen, Xia Wei, and He Zi-shu. Approximate maximum likelihood time differences estimation in the presence of frequency and phase consistence errors[C]. *IEEE Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT)*, Athens, Greece, 2013: 305–308.
- [9] Johansson M and Hedstrom P. On the effect of tuner phase noise on TDOA measurements[C]. *IEEE Communications and Information Systems Conference (MCC)*, Gdansk, 2012: 1–4.
- [10] Ghozlan H and Kramer G. On Wiener phase noise channels at high Signal-to-Noise Ratio[C]. *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT)*, Istanbul, 2013: 2279–2283.
- [11] Mehrpouyan H, Nasir A A, Blostein S D, *et al.*. Joint estimation of channel and oscillator phase noise in MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(9): 4790–4807.
- [12] Chorti A and Brookes M. A spectral model for RF oscillators with power law phase noise[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Paper*, 2006, 53(9): 1989–1999.
- [13] Demir A, Mehrotra A, and Roychowdhury J. Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(5): 655–674.
- [14] 陈良均, 朱庆棠. 随机过程及应用[M]. 第 1 版, 北京: 高等教育出版社, 2003: 78–81.
Chen Liang-jun and Zhu Qing-tang. *Random Process and Its Applications*[M]. First Edition, Beijing: Higher Education Press, 2003: 78–81.
- [15] Kay S M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993: 23–52.
- [16] Fowler M L and Hu X. Signal models for TDOA/FDOA estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(4): 1543–1550.
- 钟 森: 男, 1984 年生, 博士生, 研究方向为时差测量与辐射源定位等.
- 夏 威: 男, 1980 年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为自适应及阵列信号处理、雷达信号处理等.
- 何子述: 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为 MIMO 雷达、相控阵雷达信号处理等.