新的完备高斯整数序列的构造方法

陈晓玉 许成谦* 李玉博
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要：该文提出了新的偶数周期的完备高斯整数序列构造方法。以整数集上的多电平完备序列为基础，并根据其周期的奇偶性，分别利用不同的组合和映射关系构造出完备高斯整数序列，所得到的完备高斯整数序列的周期等于或者 2 倍于多电平完备序列的周期。利用该方法可以得到新的完备高斯整数序列，从而实现了对现有完备高斯整数序列数量的扩展。

关键词：完备序列；高斯整数；多电平；交织
中图分类号：TN911.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2014)09-2081-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697

New Constructions of Perfect Gaussian Integer Sequences

Chen Xiao-yu Xu Cheng-qian Li Yu-bo
(*College of Information Science and Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: New constructions of perfect Gaussian integer sequence with even period are proposed. According to the parity of the multilevel perfect sequences over integer, different mappings and combined methods are used for constructing perfect Gaussian integer sequences. The length of the resultant sequence is equal to or twice that of the multilevel perfect sequence. New perfect Gaussian integer sequences are generated by the proposed construction and the number of the existing perfect Gaussian integer sequences is extended.

Key words: Perfect sequence; Gaussian integer; Multilevel; Interleaving

1 引言

完备序列在雷达测距系统、CDMA 系统、信道估计中均有广泛的应用[1−3]，但是完备序列的数量有限，目前得到的二进制完备序列在长度 $N < 548964900$ 的情况下仅存在长度为 4 的完备序列，最佳序列偶和最佳屏蔽序列偶的提出扩展了最佳信号的存在空间[4,5]。第 4 代移动通信系统要求数据速率提高到 100 Mb/s，该系统具有高速率传输信号的能力，而传统序列的元素取值均为单位圆上的复数根，很难利用传统信号传输高速率信息。高斯整数序列是一类实部和虚部都为整数的复数序列，并包含四进制序列和 QAM (Quadrature Amplitude Modulation) 序列为其特殊情况。与传统序列相比，高斯整数序列不再限制序列的幅度值，可以同时利用载波的幅度和相位传输信息，在相同序列长度的情况下，使用高斯整数序列可以增加带宽利用率，提高数据传输速率。

作为特殊的高斯整数序列，具有理想自相关值的四进制序列得到了广泛的研究，但遗憾的是，只存在长度为4,8,16的四进制完备序列。文献[6]构造了偶数周期的三值自相关四进序列偶，所得到的序列偶的最大副峰模值为2。文献[7]基于三值自相关二进制序列和逆 Gray 映射构造了一类偶数周期的三值自相关四进制序列，并且四进制序列保持了二进制序列的平衡性。文献[8]和文献[9]均利用交织技术和逆 Gray 映射构造了长度为 $N \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ 的平衡的具有理想自相关值的四进制序列，即异相自相关函数值 $R(\tau) \in \{0,-2\}$ 或者 $R(\tau) \in \{0,2\}$ 。文献[10]利用交织技术构造了几类具有最佳自相关特性的序列，包括理想自相关四进制序列，完备的 QPSK+ (Quadrature Phase Shift Keying +) 序列以及多电平完备序列。针对完备的 QAM 序列，文献[11]构造了长度为2,4,8,16的完备16-QAM 序列，由于完备的 QAM 序列数量有限，文献[12]构造了完备的 8-QAM+序列。目前具有良好自相关性的一般型高斯整数序列的研究成果不多。文献[13]利用元素取值为 $\{0,\pm1,\pm i\}$ 的8个基序列及其线性组合构造了偶数

2013-11-04 收到，2014-03-27 改回
国家自然科学基金 (61172094, 61201263)，河北省自然科学基金(No.F2012203171)，秦皇岛市科技支撑计划(201302A025)和燕山大学博士基金(B788)资助课题
*通信作者：许成谦 cqxu@ysu.edu.cn

长度(大于6)的完备高斯整数序列。文献[14]利用分圆类理论构造了长度为奇素数的完备高斯整数序列。文献[15]构造了长度为$N=p^m-1\equiv 0 \pmod N$的准完备高斯整数序列，即异相自相关函数仅在$N/4$，$N/2$和$3N/4$处不为零，其余处处为零。

本文基于整数集上的多电平完备序列构造了新的完备高斯整数序列。当多电平完备序列的周期为偶数时，利用不同的映射关系给出两种构造完备高斯整数序列的方法，所构造的高斯整数序列的周期与多电平完备序列相同。当多电平完备序列的周期为奇数时，分别利用交织法和非交织法构造完备高斯整数序列，所得到的高斯整数序列的周期为多电平完备序列的2倍。

2 基本概念

定义 1 设序列 $u=(u(0),u(1),\cdots,u(N-1))$ 和 $v=(v(0),v(1),\cdots,v(N-1))$ 是两个周期为 N 的复数值序列，则 u 和 v 的周期互相关函数定义为

$$R_{u,v}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u(t)v^*(t+\tau) \tag{1}$$

其中$*$表示共轭复数，$t+\tau$ 取模 N 运算。当 $u=v$ 时，$R_{u,u}(\tau)$ 为序列 u 的自相关函数，简记为 $R_u(\tau)$。

定义 2 设序列 u 的自相关函数满足

$$R_u(\tau)=\begin{cases}E_u, & \tau\equiv 0 \pmod N\\ 0, & \tau\ne 0 \pmod N\end{cases} \tag{2}$$

其中 $E_u=\sum_{t=0}^{N-1}|u(t)|^2$，$E_u$ 是一个正实数，则称序列 u 为完备序列。

定义 3 设序列 $u_0=(u_0(0),u_0(1),\cdots,u_0(N-1))$ 和 $u_1=(u_1(0),u_1(1),\cdots,u_1(N-1))$ 是两个周期为 N 的复数值序列，定义序列 u_0 和 u_1 的交织序列 u 为

$$u=\mathrm{I}(u_0,u_1)=(u_0(0),u_1(0),u_0(1),u_1(1),\cdots,u_0(N-1),u_1(N-1)) \tag{3}$$

其中，I 表示交织操作。

设 $u=\mathrm{I}(u_0,u_1)$ 和 $v=\mathrm{I}(v_0,v_1)$ 分别为两个交织序列，则序列 u 和 v 在位移 $\tau=2\tau_1+\tau_2$ 处的互相关函数可以表示为

$$R_{u,v}(\tau)=\begin{cases}R_{u_0,v_0}(\tau_1)+R_{u_1,v_1}(\tau_1), & \tau_2=0\\ R_{u_0,v_1}(\tau_1)+R_{u_1,v_0}(1+\tau_1), & \tau_2=1\end{cases} \tag{4}$$

定义 4 设序列 $u=(u(0),u(1),\cdots,u(N-1))$，如果 $u(t)\in \boldsymbol{Z}$，其中 $0\le t\le N-1$，$\boldsymbol{Z}$ 指整数集，则称序列 u 为整数集上的多电平序列。

针对多电平序列，文献[16]构造了多电平完备序列，指出和二进制完备序列不同，存在任意长度的整数集上二电平完备序列，并且整数集上的四电平完备序列大量存在。本文将利用整数集上的多电平完备序列给出新的完备高斯整数序列的构造方法。

3 完备高斯整数序列的构造方法

本文根据整数集上多电平完备序列周期的奇偶性不同，分别给出不同的构造方法。

3.1 基于偶数长度的多电平完备序列的构造方法

定理 1 设 $N=2M$，序列 u 为整数集上周期为 N 的多电平完备序列，$R_u(0)=E_u$，构造序列 q 如下：

$$q(k)=(1+i)u(k)+(1-i)u(k+M) \tag{5}$$

其中，$0\le k\le N-1$，则 q 为完备高斯整数序列。

证明 根据序列自相关函数的定义，得到序列 q 的自相关函数如下：

$$\begin{aligned}R_q(\tau)&=\sum_{k=0}^{N-1}\left[(1+i)u(k)+(1-i)u(k+M)\right]\\&\quad\cdot\left[(1-i)u(k+\tau)+(1+i)u(k+M+\tau)\right]\\&=\sum_{k=0}^{N-1}2u(k)u(k+\tau)+2u(k)u(k+M+\tau)i\\&\quad-2u(k+M)u(k+\tau)i\\&\quad+2u(k+M)u(k+M+\tau)\\&=4R_u(\tau)\end{aligned}$$

因此，$R_q(\tau)=\begin{cases}4E_u, & \tau=0\\ 0, & \tau\ne 0\end{cases}$。 证毕

定理 2 设 $N\equiv 2 \pmod 4$，序列 u 为整数集上周期为 N 的多电平完备序列，令 $N=2M$，$R_u(0)=E_u$，构造序列 q 如下：

$$\left.\begin{aligned}q(2k)&=(1+i)u(2k)+(1-i)u(2k+M)\\ q(2k+1)&=(1+i)u(2k+1)-(1-i)u(2k+1+M)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中，$0\le k\le M-1$，则 q 为完备高斯整数序列。

证明 设 $\tau=2\tau_1+\tau_2$，根据两种情况讨论序列 q 的自相关函数：

(1) $\tau_2=0$

$$\begin{aligned}R_q(\tau)&=\sum_{k=0}^{M-1}\left[(1+i)u(2k)+(1-i)u(2k+M)\right]\\&\quad\cdot\left[(1-i)u(2k+\tau)+(1+i)u(2k+M+\tau)\right]\\&\quad+\left[(1+i)u(2k+1)-(1-i)u(2k+1+M)\right]\\&\quad\cdot\left[(1-i)u(2k+1+\tau)-(1+i)u(2k+1+M+\tau)\right]\\&=4R_u(\tau)\end{aligned}$$

在这种情况下，当 $\tau=0$ 时，$R_q(\tau)=4E_u$；当 $\tau\ne 0$ 时，$R_q(\tau)=0$。

(2) $\tau_2=1$

$$\begin{aligned}R_q(\tau)=&\sum_{k=0}^{M-1}\big[(1+i)u(2k)+(1-i)u(2k+M)\big]\\&\cdot\big[(1-i)u(2k+\tau)-(1+i)u(2k+M+\tau)\big]\\&+\big[(1+i)u(2k+1)-(1-i)u(2k+1+M)\big]\\&\cdot\big[(1-i)u(2k+1+\tau)+(1+i)u(2k+1+M+\tau)\big]\\=&\sum_{k=0}^{M-1}2u(2k)u(2k+\tau)-2u(2k+M)u(2k+M+\tau)\\&-2u(2k)u(2k+M+\tau)i\\&-2u(2k+M)u(2k+\tau)i\\&+2u(2k+1)u(2k+1+\tau)\\&-2u(2k+1+M)u(2k+1+M+\tau)\\&+2u(2k+1)u(2k+1+M+\tau)i\\&+2u(2k+1+M)u(2k+1+\tau)i\end{aligned}$$

由于 M 为奇数，所以

$$\sum_{k=0}^{M-1}-2u(2k)u(2k+M+\tau)i+2u(2k+1+M)u(2k+1+\tau)i=0$$

$$\sum_{k=0}^{M-1}-2u(2k+M)u(2k+\tau)i+2u(2k+1)u(2k+1+M+\tau)i=0$$

因此，在这种情况下，$R_q(\tau)=0$。

通过对以上两种情况的分析可知，q 为完备高斯整数序列。 证毕

定理 1 和定理 2 基于偶数周期的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列，所得到的高斯整数序列的周期与多电平完备序列的周期相同。文献[13]构造了长度为偶数且大于等于 6 的完备高斯整数序列，而利用本文的构造方法可以得到任意偶数长度的完备高斯整数序列。

例 1 序列 $u=(-1,1,1,1)$ 为周期为 4 的完备序列，利用定理 1 构造完备高斯整数序列 q_1 如下：$q_1=(-2i,2,2i,2)$。q_1 的自相关函数为 $\{R_{q_1}(\tau)\}_{\tau=0}^{3}=\{16,0,0,0\}$。

例 2 序列 $u=(1,-1,1,-1,1,2)$ 为周期为 6 的三电平完备序列，利用定理 2 构造完备高斯整数序列 q_2 如下：$q_2=(2i,-2,3-i,-2,2i,1+3i)$。$q_2$ 的自相关函数为 $\{R_{q_2}(\tau)\}_{\tau=0}^{5}=\{36,0,0,0,0,0\}$。

3.2 基于奇数长度的多电平完备序列的构造方法

本节将分别利用非交织法和交织法构造完备高斯整数序列，并分别给出扩展完备高斯整数序列数量的方法。

方法 1： 非交织方法

定理 3 设 $N\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，序列 u 和 v 为整数集上周期为 N 的多电平完备序列，$R_u(0)=R_v(0)=E$，构造序列 q 如下：

$$\left.\begin{aligned}q(2k)&=(1+i)s_0(2k)+(1-i)s_1(2k)\\q(2k+1)&=(1+i)s_0(2k+1)-(1-i)s_1(2k+1)\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

其中，$0\le k\le N-1$，s_0 和 s_1 分别表示如下：

$$s_0(t)=\begin{cases}u(t), & 0\le t\le N-1\\ u(t-N), & N\le t\le 2N-1\end{cases}$$

$$s_1(t)=\begin{cases}v(t), & 0\le t\le N-1\\ v(t-N), & N\le t\le 2N-1\end{cases}$$

则 q 为完备高斯整数序列。

证明 设 $\tau=2\tau_1+\tau_2$，根据两种情况讨论序列 q 的自相关函数：

(1) $\tau_2=0$

$$\begin{aligned}R_q(\tau)=&\sum_{k=0}^{N-1}\big[(1+i)s_0(2k)+(1-i)s_1(2k)\big]\\&\cdot\big[(1-i)s_0(2k+\tau)+(1+i)s_1(2k+\tau)\big]\\&+\big[(1+i)s_0(2k+1)-(1-i)s_1(2k+1)\big]\\&\cdot\big[(1-i)s_0(2k+1+\tau)-(1+i)s_1(2k+1+\tau)\big]\\=&2R_{s_0}(\tau)+2R_{s_1}(\tau)\end{aligned}$$

在这种情况下，当 τ=0 时，$R_q(\tau)=8E$，当 $\tau\ne 0$ 时，$R_q(\tau)=0$。

(2) $\tau_2=1$

$$\begin{aligned}R_q(\tau)=&\sum_{k=0}^{N-1}\big[(1+i)s_0(2k)+(1-i)s_1(2k)\big]\\&\cdot\big[(1-i)s_0(2k+\tau)-(1+i)s_1(2k+\tau)\big]\\&+\big[(1+i)s_0(2k+1)-(1-i)s_1(2k+1)\big]\\&\cdot\big[(1-i)s_0(2k+1+\tau)+(1+i)s_1(2k+1+\tau)\big]\\=&0\end{aligned}$$

通过对以上两种情况的分析可知，q 为完备高斯整数序列。 证毕

如果 $v(t)=L^{\lambda}(u(t))$ 或者 $v(t)=L^{\lambda}(u(N-1-t))$，其中 L 为左循环移位算子，$0\le\lambda\le N-1$，则序列 u 和 v 满足定理 3 中条件 $R_u(0)=R_v(0)$。

对序列 u 和 v 做移位操作，即将定理 3 中序列 s_0 和 s_1 变换为

$$s_0(t)=\begin{cases}u(t+e_0), & 0\le t\le N-1\\ u(t+e_0-N), & N\le t\le 2N-1\end{cases}$$

$$s_1(t)=\begin{cases}v(t+e_1), & 0\le t\le N-1\\ v(t+e_1-N), & N\le t\le 2N-1\end{cases}$$

其中，$0\le e_0,e_1\le N-1$。可以通过变换 e_0,e_1，得到多个完备高斯整数序列。

方法 2：交织方法

定理 4 设 $N \equiv 1 \pmod 2$，序列 u 和 v 为整数集上周期为 N 的多电平完备序列，$R_u(0)=R_v(0)=E$，构造序列 q 如下：

$$q = I[q_1, q_2] \tag{8}$$

q_1 和 q_2 分别表示如下：

$$q_1(k) = (1+i)u(k) + (1-i)v(k)$$

$$q_2(k) = (1-i)v\left(k+\frac{N+1}{2}\right) - (1+i)u\left(k+\frac{N+1}{2}\right)$$

其中，$0 \le k \le N-1$，则 q 为完备高斯整数序列。

证明 设 $\tau = 2\tau_1 + \tau_2$，根据两种情况讨论序列 q 的自相关函数：

(1) $\tau_2 = 0$

$$\begin{aligned}R_q(\tau) &= R_{q_1}(\tau_1) + R_{q_2}(\tau_1)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\left[(1+i)u(k)+(1-i)v(k)\right]\\ &\quad\cdot\left[(1-i)u(k+\tau_1)+(1+i)v(k+\tau_1)\right]\\ &\quad+\left[(1-i)v\left(k+(N+1)/2\right)\right.\\ &\quad\left.-(1+i)u\left(k+(N+1)/2\right)\right]\\ &\quad\cdot\left[(1+i)v\left(k+(N+1)/2+\tau_1\right)\right.\\ &\quad\left.-(1-i)u\left(k+(N+1)/2+\tau_1\right)\right]\\ &=4R_u(\tau_1)+4R_v(\tau_1)\end{aligned}$$

在这种情况下，当 $\tau_1 = 0$，$R_q(\tau) = 8E$；当 $\tau_1 \ne 0$，$R_q(\tau) = 0$。

(2) $\tau_2 = 1$

$$\begin{aligned}R_q(\tau) &= R_{q_1,q_2}(\tau_1) + R_{q_2,q_1}(\tau_1+1)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\left[(1+i)u(k)+(1-i)v(k)\right]\\ &\quad\cdot\left[(1+i)v\left(k+(N+1)/2+\tau_1\right)\right.\\ &\quad\left.-(1-i)u\left(k+(N+1)/2+\tau_1\right)\right]\\ &\quad+\left[(1-i)v\left(k+(N+1)/2\right)\right.\\ &\quad\left.-(1+i)u\left(k+(N+1)/2\right)\right]\\ &\quad\cdot\left[(1-i)u(k+\tau_1+1)+(1+i)v(k+\tau_1+1)\right]\\ &=0\end{aligned}$$

证毕

与非交织方法类似，可以通过对序列 u 和 v 做移位操作来扩展高斯完备序列的数量，并且可以对定理 4 做如下修改：$q' = I[q_1', q_2']$。其中，q_1' 和 q_2' 分别表示如下：

$$q_1'(k) = (1-i)u(k) - (1+i)v(k)$$

$$q_2'(k) = (1+i)v\left(k+\frac{N+1}{2}\right) + (1-i)u\left(k+\frac{N+1}{2}\right)$$

或者 $q'' = I[q_1'', q_2'']$。其中，q_1'' 和 q_2'' 分别表示如下：

$$q_1''(k) = (1+i)u(k) + (1-i)v(k)$$

$$q_2''(k) = (1+i)u\left(k+\frac{N+1}{2}\right) - (1-i)v\left(k+\frac{N+1}{2}\right)$$

则序列 q' 和 q'' 均为完备高斯整数序列，证明过程这里不再赘述。

例 3 设序列 $u = (7,7,-7,-14,-14,7,-14)$，序列 $v = (-20,8,8,8,8,8,8)$，u 和 v 分别为周期为 7 的三电平和二电平完备序列，利用定理 3 构造完备高斯整数序列 q_3 如下：

$$\begin{aligned}q_3 = (&-13+27i,-1+15i,1-15i,\\ &-22-6i,-6-22i,-1+15i,-6-22i,\\ &27-13i,15-i,-15+i,-6-22i,\\ &-22-6i,15-i,-22-6i)\end{aligned}$$

q_3 的自相关函数为 $\{R_{q_3}(\tau)\}_{\tau=0}^{13} = \{6272,0,0,\cdots,0\}$。

例 4 序列 $u = (1,1,-1,-2,-2,1,-2)$ 为周期为 7 的三电平完备序列，取 v 为其逆序序列，即 $v = (-2,1,-2,-2,-1,1,1)$，利用定理 4 构造完备高斯整数序列 q_4 如下：

$$\begin{aligned}q_4 = (&-1+3i,1+3i,2,-2i,-3+i,3+i,-4,\\ &-3+i,-3-i,-2i,2,-1+3i,-1-3i,4i)\end{aligned}$$

q_4 的自相关函数为 $\{R_{q_4}(\tau)\}_{\tau=0}^{13} = \{128,0,0,\cdots,0\}$。

4 结论

本文基于整数集上的多电平完备序列构造了新的偶数长度的完备高斯整数序列，根据多电平完备序列周期的奇偶性不同，分别对其做不同的映射与组合变换，所得到的完备高斯整数序列的周期等于或者2倍于多电平完备序列的周期，整数集上多电平完备序列的大量存在保证了本文方法的实现。同时本文给出了扩展完备高斯整数序列数量的方法，可以为雷达系统、CDMA 系统等提供更多的完备序列。

参 考 文 献

[1] Suehiro N. A signal design without co-channel interference for approximately synchronized CDMA systems[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1994, 12(5): 837-843.

[2] Milewski A. Periodic sequences with optimal properties for channel estimation and fast start-up equalization[J]. *IBM Journal of Research and Development*, 1983, 27(5): 426-431.

[3] Levenon N and Freedman A. Periodic ambiguity function of CW signals with perfect periodic autocorrelation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(2): 387-395.

[4] 毛飞, 吴宁, 周正. 最佳三元序列偶理论研究[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(11): 2622–2625.
Mao Fei, Wu Ning, and Zhou Zheng. Search on perfect ternary sequence pair[J]. *Journal of Electronics & Information Technology* , 2008, 30(11): 2622–2625.

[5] 施炯, 蒋挺, 周正. 第一类最佳屏蔽二进序列偶及应用研究[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(12): 2919–2924.
Shi Jiong, Jiang Ting, and Zhou Zheng. The research and application of first kind of perfect punctured binary sequence pair[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(12): 2919–2924.

[6] 彭秀平, 许成谦, 李刚. 周期为偶数的三值自相关四进序列偶[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(10): 1999–2004.
Peng Xiu-ping, Xu Cheng-qian, and Li Gang. Even period quaternary sequence pair with three-level autocorrelation[J]. *System Engineering and Electronics*, 2012, 34(10): 1999–2004.

[7] Chung J H, Han Y K, and Yang K. New quaternary sequences with even period and three-valued autocorrelation [J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2010, E93-A(1): 309–315.

[8] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al.*. A unified construction for yielding quaternary sequences with optimal periodic autocorrelation[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2013, E96-A(7): 1593–1601.

[9] Tang Xiao-hu and Ding Cun-sheng. New classes of balanced quaternary and almost balanced binary sequences with optimal autocorrelation value[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(12): 6398–6405.

[10] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zeng Xiao-yong, *et al.*. Several types of sequences with optimal autocorrelation properties[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2013, E96-A(1): 367–372.

[11] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al.*. Perfect 16-QAM sequences and arrays[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2012, E95-A(10): 1740–1748.

[12] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zeng Xiao-yong, *et al.*. Perfect 8-QAM+ sequences[J]. *IEEE Wireless Communcations Letters*, 2012, 1(4): 388–391.

[13] Hu W W, Wang S H, and Li C P. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6074–6079.

[14] Yang Yang, Tang Xiao-hu, and Zhou Zheng-chun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(10): 615–618.

[15] Fan Ping-zhi and Darnell M. Maximal length sequences over Gaussian integers[J]. *Electronics Letter*, 1994, 30(16): 1286–1287.

[16] Li Xu-dong, Fan Ping-zhi, Mow W H, *et al.*. Multilevel perfect sequences over integers[J]. *Electronics Letters*, 2011, 47(8): 496–497.

陈晓玉： 女，1983 年生，博士生，研究方向为扩频序列设计.
许成谦： 男，1961 年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.
李玉博： 男，1985 年生，讲师，研究方向为扩频序列设计.