

## 基于响应矢量优化的共形阵列稳健波束形成方法

徐艳红<sup>\*①</sup> 史小卫<sup>①</sup> 许京伟<sup>②</sup> 李平<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学天线与微波技术重点实验室 西安 710071)

<sup>②</sup>(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 针对共形阵列天线自适应波束形成中存在的主瓣保形困难、旁瓣电平高等问题, 该文提出基于波束响应矢量优化的自适应波束形成方法。在主瓣波束保形约束条件下, 通过自适应地调整波束响应矢量, 求得最优的响应矢量, 进而求得准最优自适应权。该方法将非凸的二次约束二阶优化问题转化到高维空间进行求解, 并通过半正定松弛(SDR)转化为凸优化问题, 高效求得准最优解。该方法不仅保持了期望的主瓣响应, 同时克服了传统线性约束最小方差(LCMV)自适应波束形成方法旁瓣高的缺点, 并且对阵列构型具有稳健性。仿真实验验证了该方法的有效性。  
**关键词:** 阵列天线; 响应矢量优化; 共形阵; 半正定松弛; 稳健波束形成

中图分类号: TN823

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)09-2220-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01670

## Robust Beamforming Based on Response Vector Optimization for Conformal Array

Xu Yan-hong<sup>①</sup> Shi Xiao-wei<sup>①</sup> Xu Jing-wei<sup>②</sup> Li Ping<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Key Laboratory of Science and Technology on Antenna and Microwave, Xidian University, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The mainbeam is difficult to maintain in adaptive beamforming for conformal array, and even worse, the sidelobe is very high. To alleviate these problems, an adaptive beamforming method is proposed based on the response vector optimization. Through adaptively adjusting the response vector under the well-maintained mainbeam constraint, the optimal response vector is derived, thus the sub-optimal adaptive weight is obtained. The proposed method converts the non-convex quadratically constrained quadratic optimizing problem into a higher-dimension subspace, then the problem is transformed into a convex optimization problem via SemiDefinite Relaxation (SDR), and then its sub-optimal solution is efficiently achieved. The method not only maintains the desired response of the mainbeam, but also overcomes the disadvantages of high sidelobe resulting from the conventional Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV) adaptive approach. Moreover, it is robust against the geometry of the array. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Array antenna; Response vector optimization; Conformal array; SemiDefinite Relaxation (SDR); Robust beamforming

### 1 引言

随着电子技术的不断发展, 单一的平面阵天线已满足不了现代军事与通信的需求。而与飞行载体表面相吻合的共形阵天线系统以其良好的空气动力学特性, 天线安装灵活方便, 可构成大孔径天线, 扫描范围宽等突出优势日益引起国内外学者的关注, 在各种飞行器、舰船等雷达及无线通信领域中取得广泛的应用<sup>[1]</sup>。

与平面阵相比, 由于阵元不一致性, 共形阵天

线方向图不再是阵因子与单元方向图的乘积, 其发射方向图综合一直以来都是研究的关键问题之一。常用的方法有泰勒综合法, 共轭匹配法, 最小二乘法, 投影矩阵法<sup>[2]</sup>, 幅相补偿法<sup>[3,4]</sup>、遗传算法, 粒子群算法<sup>[5-7]</sup>等。文献[2]提出了一种投影矩阵法的改进方法, 可以实现仅相位控制或仅幅度控制约束, 可满足不同的应用需求。针对共形阵列方向图综合问题, 遗传算法和粒子群算法通常得到的问题规模大, 计算复杂度高。文献[8]基于差分进化算法, 提出了一种有效的波束方向图综合技术。文献[9]采用极大极小准则, 使实际方向图的模值与期望方向图模值之间的误差最大峰值最小, 实现了共形阵低旁瓣方向图综合。然而, 实际中由于目标真实参数往

2013-10-29 收到, 2014-02-28 改回

国家自然科学基金(61072021)资助课题

\*通信作者: 徐艳红 yanhongxudian@163.com

往是不准确的,接收波束形成同样面临严重的问题,尤其当训练样本中包含目标信号时,传统自适应波束形成方法会由于目标相消而导致系统性能严重下降。文献[10]提出的对角加载技术可以一定程度地缓解目标相消,提高系统性能。然而由于对角加载因子没有解析的形式,因此通常采用噪声功率10倍作为加载量。最近,文献[11]和文献[12]分别提出了基于最差性能最优化的稳健波束形成方法和基于不确定集的稳健波束形成方法,从理论上解决了加载因子的不确定性。此外,文献[13]提出了基于特征空间的稳健波束形成方法,该方法在干扰与信号子空间估计准确的情况下具有良好的性能,然而该方法对信噪比较为敏感,容易产生子空间交叉现象,造成系统性能的恶化。线性约束最小方差(LCMV)波束形成方法<sup>[14,15]</sup>是一种对目标角度稳健的波束形成方法,其约束可以是多点约束也可以是导数约束,通过增加主瓣宽度以确保目标信号无损失。然而该方法存在旁瓣高的缺点,尤其是对于共形阵列天线,其旁瓣过高,容易受非平稳干扰的影响。文献[16]针对等距线阵提出了一种相位约束的LCMV方法,将主瓣的相位信息加入到约束中,不仅实现了主瓣区间的线性相位输出,同时其旁瓣电平也得到了有效的控制。

尽管 LCMV 方法具有一定的稳健性,但是其旁瓣电平较高,易受非平稳干扰的影响,尤其在共形阵列中性能更差。针对这一问题,本文考虑将约束主瓣的响应矢量作为优化参量,通过求解最优响应矢量,提高波束形成器性能。首先建立阵列输出功率随自适应权值的变化关系,通过约束主瓣响应的功率大于等于1(归一化),将问题表达为一个二次约束的二次规划问题。将问题转换到高维空间中,并通过半正定松弛方法,忽略权矩阵的秩1约束,从而将非凸二次约束二次规划问题转化为凸的半正定规划问题,进而可以进行高效求解。该方法克服了传统 LCMV 方法高旁瓣的缺点,适用于共形阵天线,大大提高了系统的性能。

## 2 信号模型及问题引出

图1所示为半圆形共形阵天线几何构型。假定该阵列由  $M$  个阵元组成,均匀分布在半径为  $R$  的半圆环上,  $\theta$  表示信号来波方向。则阵列中第  $m$  个阵元的位置矢量为  $\mathbf{p}_m = R \cos \alpha_m \hat{\mathbf{a}}_x + R \sin \alpha_m \hat{\mathbf{a}}_y$ , 其中  $\alpha_m$  表示该阵元与  $x$  轴的夹角,且  $\alpha_m = (m-1)\pi/(M-1)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ 。任意空间方向的波数矢量为  $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)(\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_y)$ 。则该阵列对应的导向矢量为

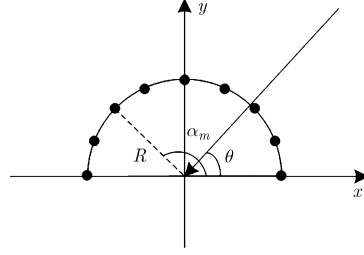


图1 半圆形共形阵列构型

$$\mathbf{a}(\theta) = [e^{jk \cdot \mathbf{p}_1}, e^{jk \cdot \mathbf{p}_2}, \dots, e^{jk \cdot \mathbf{p}_M}]^T \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。假设此处的阵元均是全向天线,那么该天线阵列接收到的窄带信号可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{i}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

其中,期望信号可以表示为:  $\mathbf{s}(t) = s(t)\mathbf{a}_s(\theta)$ ,  $s(t)$  是信号的波形函数,  $\mathbf{a}_s(\theta)$  是相应的信号导向矢量;  $\mathbf{i}(t)$  为干扰信号;  $\mathbf{n}(t)$  表示高斯白噪声。因此,该共形阵天线的输出可以表示为  $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ , 其中,自适应权值矢量可以由最小方差无失真响应(MVDR)波束形成器得到, MVDR 波束形成器可表示为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a} = 1 \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{R}$  是干扰与噪声的协方差矩阵。实际中,协方差矩阵通常由多次快拍估计得到,即

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^H \quad (4)$$

其中,  $L$  为样本数,  $\mathbf{x}_l$  为第  $l$  个快拍数据。众所周知,基于采样矩阵求逆的 MVDR 波束形成器对误差非常敏感。而实际中,目标信号参数往往是不精确的,尤其是当训练样本中出现目标信号时,还会造成目标信号相消,导致系统性能严重下降。为了克服目标约束不准确这一问题,LCMV 方法通过约束多个方向,使得主瓣区域响应为1,其数学描述为<sup>[14]</sup>

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{f}^T \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{C}$  是约束矩阵,其列矢量由多个约束方向对应的导向矢量构成;  $\mathbf{f}$  是对应的响应矢量,  $\mathbf{f}$  的每个元素对应各个约束方向的期望响应,通常  $\mathbf{f}$  为全1矢量。由拉格朗日乘法可得 LCMV 波束形成器最优权为

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (6)$$

LCMV 波束形成器在目标信号约束不准确时具有一定的稳健性。然而,其波束形成主瓣损失严重,并且旁瓣比较高,因此在非平稳环境下性能不佳,特别是存在非平稳干扰时,目标检测受到旁瓣干扰的影响。

### 3 基于响应矢量优化的稳健波束形成方法

本节考虑构造约束矢量的代价方程, 将原始的非凸优化问题转化为半正定规划问题, 通过优化响应矢量, 获得准最优权, 来提高共形阵天线波束形成性能, 并将其推广至发射波束形成。

#### 3.1 接收端稳健自适应波束形成

传统 LCMV 方法将响应矢量设置为全 1, 意味着对不同方向的相位响应均为 0, 这无疑加强了约束。因此, 本节通过选取合适的响应矢量代替全 1 的响应矢量来提高 LCMV 波束形成器的稳健性。考虑响应矢量中的每一个元素都是复数, 因此, 式(6)可以表达为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{u}^T \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_K)^T = (\alpha_1 e^{j\beta_1}, \alpha_2 e^{j\beta_2}, \dots, \alpha_K e^{j\beta_K})^T$$

是  $K$  维复值响应矢量, 因此可构造无约束方程为

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w} + (\mathbf{w}^H \mathbf{C} - \mathbf{u}^T) \boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

其中  $\boldsymbol{\xi}$  为罚因子矢量, 由复数域拉格朗日乘法可得最优权为

$$\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{u}^* \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)的目标函数, 得到

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T (\mathbf{C}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{u}^* \quad (10)$$

因此, 希望在响应矢量  $\mathbf{u}$  的约束条件下进一步最小化目标函数值。令  $\mathbf{Q} = (\mathbf{C}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C})^{-1}$ , 因此  $\mathbf{Q}$  是厄米矩阵, 即满足  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H$ 。而且注意到  $\mathbf{Q}$  是厄米半正定矩阵, 也就是  $\mathbf{Q} \succeq 0$  ( $\succeq$  表示矩阵半正定)。为了获得最小  $f(\mathbf{u})$ , 假设响应矢量的每个元素的幅度都大于 1, 因此可得

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}^*, \quad \text{s.t. } |u_i|^2 \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

表示为矩阵形式:

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}^*, \quad \text{s.t. } \mathbf{u}^H \mathbf{B}_i \mathbf{u} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{B}_i = \{b_{p,q}\}$ , 当且仅当  $p$  和  $q$  都等于  $i$  的时候,  $b_{p,q}$  等于 1, 否则  $b_{p,q}$  等于 0。也就是

$$\mathbf{B}_i = \left\{ \begin{array}{l} b_{p,q} = 1, \quad p = i, \quad q = i; \\ b_{p,q} = 0, \quad p \neq i \text{ 或 } q \neq i \end{array} \right\} \quad (13)$$

这是一个非凸的二次约束二次规划(QCQP)问题, 该问题可以进一步描述为一个高维空间的优化问题。式(11)的目标函数可以变形为

$$\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u} = \text{tr} \{ \mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u} \} = \text{tr} \{ \mathbf{Q} \mathbf{U} \} \quad (14)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{U} = \mathbf{u} \mathbf{u}^H$ , 是厄米半正定矩阵, 可以描述为  $\mathbf{U} \succeq 0$ 。显然地,  $\mathbf{U}$  的秩为 1, 即  $\text{rank}(\mathbf{U}) = 1$ , 那么式(12)可以等价表示为

$$\min_{\mathbf{U}} \text{tr} \{ \mathbf{Q} \mathbf{U} \}, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \text{tr} \{ \mathbf{B}_i \mathbf{U} \} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \\ \mathbf{U} \succeq 0, \quad \text{rank}(\mathbf{U}) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

从式(15)可以看到, 该优化问题是矩阵变量  $\mathbf{U}$  的线性函数。然而, 秩 1 约束是非凸约束: 任意两个秩为 1 的矩阵的和, 其秩可能不为 1。半正定松弛(SDR)提供了一种有效地解决该方法。式(15)经过半正定松弛可得

$$\min_{\mathbf{U}} \text{tr} \{ \mathbf{Q} \mathbf{U} \}, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \text{tr} \{ \mathbf{B}_i \mathbf{U} \} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \\ \mathbf{U} \succeq 0 \end{cases} \quad (16)$$

通过将响应矢量构造到代价函数中, 并且将式(11)中非凸的响应矢量优化问题转化为式(16)中的半正定规划问题。式(16)中最优约束矢量可以通过文献[17]中内点法进行高效求解。若  $\mathbf{U}$  的秩为 1, 那么所得式(16)的解即最优解; 然而, 通常  $\mathbf{U}$  的秩大于 1, 因此需要通过秩 1 近似得到秩 1 解<sup>[17]</sup>。假定  $\mathbf{U}^*$  为式(16)的解, 且

$$\mathbf{U}^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (17)$$

其中  $r = \text{rank}(\mathbf{U}^*)$ ,  $\lambda_i$  为  $\mathbf{U}$  的特征值,  $\mathbf{v}_i$  为对应的特征矢量。假定  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ , 那么可取  $\lambda_1$  对应的特征矢量  $\mathbf{v}_1$  为最优约束矢量, 即  $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}_1$ 。

此外, 高斯随机处理同样也可以求解秩 1 解。针对本问题, 构造  $P$  个随机矢量  $\boldsymbol{\xi}_p$ ,  $p=1, 2, \dots, P$ , 且  $\boldsymbol{\xi}_p \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{U}^*)$ , 则取

$$\boldsymbol{\eta}_p = \frac{\boldsymbol{\xi}_p}{\sqrt{\min_{i=1,2,\dots,K} \boldsymbol{\xi}_p^H \mathbf{B}_i \boldsymbol{\xi}_p}} \quad (18)$$

因此所得最优约束矢量为

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}_p} \boldsymbol{\eta}_p^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}_p \quad (19)$$

至此得到了问题式(15)的近似解(秩为 1)。

通常为了方便求解, 常将问题转化到实数域进行<sup>[18]</sup>。定义

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{u} \\ \text{Im } \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{Q} & \text{Im } \mathbf{Q} \\ -\text{Im } \mathbf{Q} & \text{Re } \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

得到

$$\min_{\hat{\mathbf{u}}} \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{u}}, \quad \text{s.t. } \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{B}}_i \hat{\mathbf{u}} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (21)$$

采用式(13)~式(16)中的方法, 式(21)可以通过 SDR 方法进行松弛求解。即

$$\min_{\hat{\mathbf{U}}} \text{tr} \{ \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{U}} \}, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \text{tr} \{ \hat{\mathbf{B}}_i \hat{\mathbf{U}} \} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K \\ \hat{\mathbf{U}} \succeq 0 \end{cases} \quad (22)$$

通过上述秩 1 近似可求得式(22)的解。因此, 稳健自适应波束形成器的响应矢量为

$$\mathbf{u}^* = \pm \left( [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_K]^T + j [\hat{u}_{M+1}, \hat{u}_{M+2}, \dots, \hat{u}_{2K}]^T \right) \quad (23)$$

该问题与式(16)中的问题等价，“±”表示  $\mathbf{u}_0^*$  和  $-\mathbf{u}_0^*$  均为该问题的解。换句话说，如果  $\mathbf{u}_0^*$  是问题式(23)的解，那么  $-\mathbf{u}_0^*$  必然也是该问题的解。

### 3.2 发射方向图综合方法

根据收发互易原理，本文方法经过适当的变换可推广应用到共形阵天线低旁瓣发射方向图综合，将旁瓣积分功率以及主瓣积分功率考虑进代价函数中，在约束主瓣响应不损失的情况下，尽量降低旁瓣功率。此时，发射权值的每个元素的幅度和相位对应为各个阵元所需馈入电流的幅度和相位。考虑实际中共形阵天线发射方向图的低旁瓣设计要求，可构造式(24)的优化问题

$$\min_w \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{H} \mathbf{w} \geq 1 \quad (24)$$

式中，目标函数表示旁瓣积分功率，约束条件为主瓣积分功率大于等于 1，其中

$$\mathbf{H} = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \mathbf{c}(\theta) \mathbf{c}^H(\theta) d\theta \quad (25a)$$

$$\mathbf{G} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{c}(\theta) \mathbf{c}^H(\theta) d\theta + \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{c}(\theta) \mathbf{c}^H(\theta) d\theta \quad (25b)$$

其中  $\mathbf{c}(\theta)$  为阵列导向矢量， $[-\theta_1, \theta_1]$  为主瓣半功率波瓣范围， $\pm\theta_1$  为主瓣峰值下降 3 dB 对应的角度， $[-\frac{\pi}{2}, -\theta_2] \cup [\theta_2, \frac{\pi}{2}]$  为旁瓣范围。由此，可通过半正定松弛方法得

$$\min_w \text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{W}), \quad \text{s.t. } \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{W}) \geq 1 \\ \mathbf{W} \succeq 0 \end{cases} \quad (26)$$

其中  $\mathbf{W} = \mathbf{w} \mathbf{w}^H$ 。

由此，通过采用半正定规划可有效求解发射最优权矢量。实际中，可以通过对式(25a)和式(25b)中积分矢量加权来调节波束响应，由此可得最优发射波束矢量，实现低旁瓣发射方向图综合。

## 4 仿真实验

为验证本文基于响应矢量优化的自适应波束形

成以及发射天线方向图综合方法的正确性，本节对提出的方法进行了仿真实验，具体仿真参数如表 1 所示。

表 1 共形阵天线仿真参数

天线工作波长(m)	0.03	阵元数	17
阵元间距(m)	0.015	快拍数	200
目标来波方向(°)	2	干扰来波方向(°)	30
天线主瓣指向(°)	0	干噪比(dB)	30
信噪比(dB)	10		

### 4.1 目标信号存在情况下波束形成比较

实际中，目标信号方向通常是不确知的，因此天线波束指向与目标方向往往存在偏差。在训练样本中存在目标信号的情况下，本节对最小方差无畸变响应(MVDR)波束形成器，LCMV 波束形成器以及本文提出的基于半正定松弛(SDR)的波束形成器进行了分析比较。图 2 给出了 MVDR, LCMV 以及采用两种秩 1 近似求解最优约束矢量的 SDR-LCMV 波束形成器的天线方向图，其中图 2(b)为天线方向图主瓣区间的相位响应。由图可见，由于训练样本中包含目标信号，MVDR 波束形成器将目标信号作为干扰信号而进行抑制，从而在目标方向形成零陷，造成目标相消，此时天线相位响应在目标方向处出现突变。LCMV 通过约束多个方向，使得波束主瓣展宽，提高了波束形成器的稳健性，然而 LCMV 波束形成器主瓣损失比较严重。而本文提出的 SDR-LCMV 波束形成器不仅能够保持主瓣没有畸变，而且通过优化所得最优约束矢量，其旁瓣电平得到了有效的控制。两种秩 1 近似方法所得的波束形成器基本重合，因此两种方法求解得到的最优约束矢量近似相同，并且其主瓣区间相位响应保持良好的线性特性。

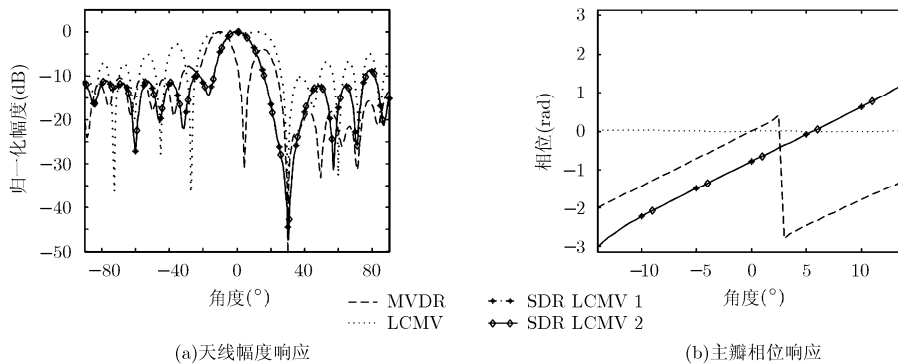


图 2 共形阵列天线方向图比较

图 3 给出了约束矢量的极坐标表示。如图所示，传统 LCMV 方法约束为全 1，相当于约束多个方向的幅度响应均为 1，相位响应均为 0。这一约束不符合共形阵列响应特性，因此本文考虑对该约束矢量进行优化。如图 3 所示，优化所得的约束矢量为复数，幅度近似为 1，相位呈递增趋势。并且两种秩 1 近似所得的最优约束矢量近似相同。这表明经过半正定松弛后问题式(16)的解接近原问题式(15)的解。

图 4 给出了小样本情况(样本数为 20)下几种波束形成器的天线方向图比较。传统 MVDR 波束形成器和传统 LCMV 波束形成器受协方差矩阵估计误差的影响较大。而本文提出的波束形成器在样本量较少的情况下，依然能够保持主瓣无畸变。同样地，由于目标信号的存在，传统 MVDR 波束形成器存在目标相消现象，并且在样本量较少的情况下，波束主瓣畸变严重。传统 LCMV 波束形成器，在样本量少时出现旁瓣电平抬高的现象。

考虑非平稳噪声环境对本文方法性能的影响，图 5 给出了在 3 种噪声背景下的本文方法自适应波束形成方向图结果，仿真实验中 Lognormal 和 Weibull 分布的尺度参数和形状参数取值相同，分别为 1 和 1.5<sup>[19]</sup>。由图 5 可见，非平稳噪声环境下，本文方法性能具有一定的稳健性。其主瓣保形性能接近，并且旁瓣电平在 3 种噪声背景下均得到有效的控制。

### 4.2 DOA 误差情况下的性能比较

图 6(a)给出了训练样本中包含目标信号时几种波束形成方法的输出 SINR 随输入 SNR 变化的性能曲线。由图可见，MVDR 波束形成器对输入 SNR 非常敏感，在高 SNR 情况下其性能下降明显。传统的 LCMV 波束形成器以及本文提出的 SDR-LCMV 波束形成器对于 SNR 较为稳健。如图所示，本文提出的 SDR-LCMV 波束形成器两种秩 1 近似求解方法性能基本相同，并且相对于传统 LCMV 波束形成

器，SDR-LCMV 波束形成器有明显的性能改善。图 6(b)给出了输出 SINR 随快拍数的变化曲线。如前所述，由于传统 LCMV 波束形成器主瓣损失比较严重，因此其性能随快拍数的增加提高有限。MVDR 波束形成器由于存在目标信号相消现象，性能损失更为严重；本文提出的 SDR-LCMV 波束形成器通过求解准最优响应矢量，性能优于其它波束形成器。

图 7 分析了上述几种波束形成器对目标 DOA 误差的容忍度。如图 7 所示，对于 MVDR 波束形成器，即使较小的估计误差也会造成严重的性能下降；而传统的 LCMV 波束形成器和本文提出的 SDR-LCMV 波束形成器对 DOA 失配在较大的范围内性能损失较小，且本文所提 SDR-LCMV 波束形成器相比传统 LCMV 波束形成器性能改善明显。另外，由于两种秩 1 近似求解得到的准最优响应矢量基本相等，因此基于两种秩 1 近似的 SDR-LCMV 波束形成器性能接近。当 DOA 相差不超过 5° 时，其性能损失的最大值不超过 1 dB。

### 4.3 发射方向图综合

本节考虑发射天线方向图综合问题，传统共形阵列天线方向图综合困难，尤其是宽波束发射，其方向图旁瓣电平较高。由 3.2 节的分析可知，本文方法经适当推广可应用于共形阵列天线发射方向图综合。图 8 给出了发射方向图仿真结果。其中图 8(a)给出了窄波束发射情形，图 8(b)给出了宽波束发射情形。表 2 给出了对应图 8(a)和图 8(b)的发射方向图主瓣积分功率与旁瓣积分功率的比值。由图可见，传统窄波束发射天线方向图旁瓣电平较高，本文方法可以进一步降低旁瓣功率，并且保持较少的功率损失。在宽波束发射情况，共形阵列天线发射方向图综合受阵列构型的影响，传统发射方向图综合方法所得天线方向图旁瓣电平非常高。本文方法能够有效地降低旁瓣功率，且其主瓣范围与期望的主瓣相吻合。

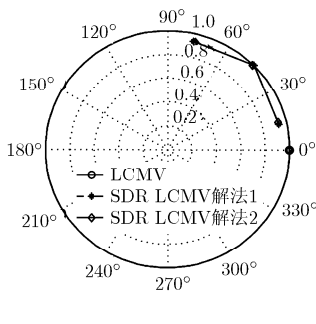


图 3 最优约束矢量极坐标图

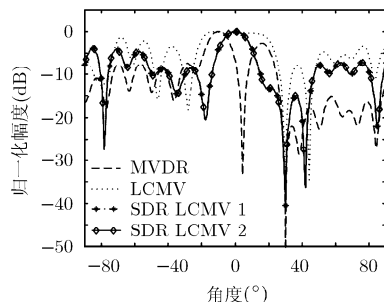


图 4 小样本情况波束形成器天线方向图比较

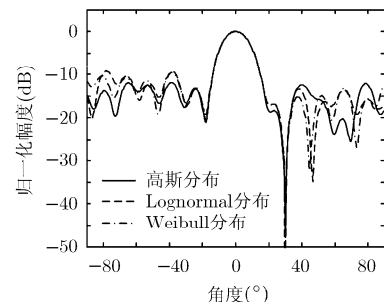
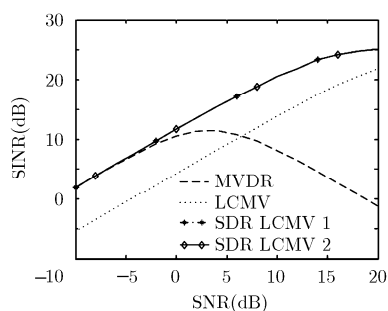
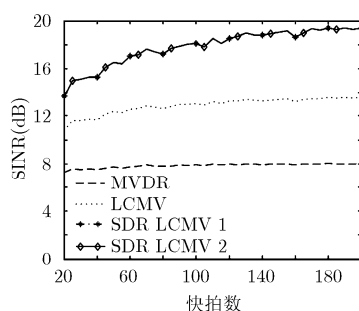


图 5 3 种噪声背景下本文波束形成方法方向图比较



(a) SINR随输入SNR的变化



(b) SINR随快拍数的变化

图 6 输出 SINR 性能比较

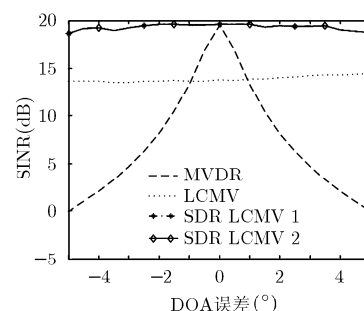
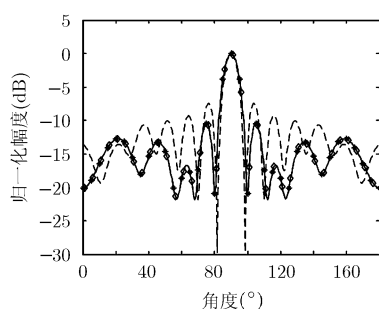
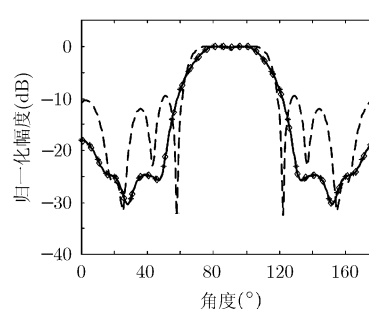


图 7 输出 SINR 随 DOA 误差的变化



(a)窄发射方向图



(b)宽发射方向图

图 8 SDR-LCMV 发射方向图俯视图

表 2 主瓣积分功率与旁瓣积分功率比值

	最优普通发射方向图	基于 SDR 的发射方向图 1	基于 SDR 的发射方向图 2
窄发射方向图	0.9175	1.8672	1.8673
宽发射方向图	10.1051	29.5665	29.6591

### 5 结束语

本文针对共形阵列提出了一种基于波束响应矢量优化的自适应波束形成方法。通过将响应矢量构造到代价函数中自适应地调整波束响应矢量，并将原始的非凸二次约束二次规划问题转化为半正定规划问题，通过半正定松弛方法求得准最优响应矢量。该波束形成方法不仅保持了期望的主瓣响应，还克服了传统线性约束最小方差(LCMV)稳健自适应波束形成方法旁瓣高的缺点。同时本文所提 SDR-LCMV 波束形成器对输入目标信号较为稳健，相比传统 LCMV 波束形成器性能有明显改善。此外，该波束形成器对阵列构型具有稳健性，适用于共形阵天线，经过适当变换可推广应用到发射方向图综合，提高发射方向图主瓣功率与旁瓣功率的比值。

### 参考文献

- [1] Theodoros N K and John N S. Design and performance aspects of an adaptive cylindrical beamforming array[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2012, 54(1): 51-65.
- [2] 刘肖萌, 高文军, 邓云凯, 等. 基于投影矩阵法的阵列天线波束形成方法[J]. *雷达学报*, 2012, 1(1): 50-57.  
Liu Xiao-meng, Gao Wen-jun, Deng Yun-kai, et al. Beam synthesis technique for array antenna based on projection matrix algorithm[J]. *Journal of Radars*, 2012, 1(1): 50-57.
- [3] Thomas A W. Element directivity compensation for beamforming a curved array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(10): 845-848.
- [4] Vaskelainen L I. Phase synthesis of conformal array antennas[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, 48(6): 987-991.
- [5] Bai Y Y, Xiao S Q, Liu C R, et al. A hybrid IWO/PSO algorithm for pattern synthesis of conformal phased arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(4): 2328-2332.
- [6] 赵菲, 齐会颖, 邱磊, 等. 自适应动态 Meta 粒子群优化算法综合多方向图共形阵列[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(6): 1476-1482.  
Zhao Fei, Qi Hui-ying, Qiu Lei, et al. Adaptive dynamic

- Meta particle swarm optimization algorithm synthesizing multiple-pattern conformal array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(6): 1476–1482.
- [7] Allard R J and Wemer D H. Radiation pattern synthesis for arrays of conformal antenna mounted on arbitrarily-shaped three-dimensional platforms using genetic algorithms[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(5): 1054–1062.
- [8] Li X, Li W T, Shi X W, *et al.*. Modified differential evolution algorithm for pattern synthesis of antenna arrays[J]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2013, 137: 371–388.
- [9] Wang F, Balakrishnan V, and Zhou Y. Optimal array pattern synthesis using semidefinite programming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(5): 1172–1183.
- [10] Cox H, Zeskind R M, and Owen M M. Robust adaptive beamforming[J]. *IEEE Transactions on Acoustic Speech, Signal Processing*, 1987, 35(10): 1365–1376.
- [11] Vorobyov S A, Gershman A B, and Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 313–324.
- [12] Li J, Stoica P, and Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702–1715.
- [13] Feldman D D and Griffiths L J. A projection approach to robust adaptive beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(4): 867–876.
- [14] Forst O L. An algorithm for linearly constrained adaptive processing[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1972, 60(8): 926–935.
- [15] Tseng C Y and Griffiths L J. A unified approach to the design of linear constraints in minimum variance adaptive beamformers[J]. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 1992, 40(12): 1533–1542.
- [16] Xu J W, Liao G S, and Zhu S Q. Robust LCMV beamforming based on phase response constraint[J]. *Electronics Letters*, 2012, 48(20): 1304–1306.
- [17] Luo Z Q, Ma W K, and Anthony M C. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(3): 20–34.
- [18] Tourbabin V, Agmon M, and Rafaely B. Optimal real-weighted beamforming with application to linear and spherical arrays[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2012, 20(9): 2575–2585.
- [19] 何友, 关键, 彭应宁. 雷达自动检测与恒虚警处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999, 第 7 章.
- 徐艳红: 女, 1989 年生, 博士生, 研究方向为阵列天线.
- 史小卫: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能天线、阵列天线、射频识别及电磁兼容.
- 许京伟: 男, 1987 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理.