

基于符号相对熵的 Logistic 混沌系统时间不可逆性分析

徐红梅^{①②} 郭树旭^{*①}

^①(吉林大学电子科学与工程学院 长春 130012)

^②(延边大学工学院 延吉 133002)

摘要: 该文结合 Logistic 混沌系统特性随参数 μ 变化的关系, 以及相对熵能够反映系统远离平衡状态程度的特点, 提出一种基于符号相对熵估计 Logistic 混沌系统特性的新方法。从仿真结果得到, Logistic 混沌系统存在时间不可逆性, 并随着参数 μ 的增大而逐渐增强, 与初值 x_0 无关, 经分析推理得到一种新的可量化的非线性动力学行为指标, 为深入了解 Logistic 混沌特性和混沌控制提供理论依据。

关键词: 混沌系统; Logistic 系统; 符号时间序列; 相对熵; 时间不可逆

中图分类号: TM132

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)05-1242-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01262

Time Irreversibility Analysis of Logistic Chaos System Based on Symbolic Relative Entropy

Xu Hong-mei^{①②} Guo Shu-xu^①

^①(College of Electronic Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

^②(Institute of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Considering that the characteristic of Logistic chaos system varies in the relationship of the parameter μ , and the feature of that the relative entropy reflects the lack of equilibrium, this paper proposes a new method to estimate the characteristic of Logistic chaos system based on symbolic relative entropy. Numerical simulations prove that, Logistic chaos system possesses the property of time irreversibility which increases with parameter μ and is irrelevant with initial value x_0 . Accordingly, a novel quantifiable nonlinear dynamical behavior index is obtained, which provides the theoretical basis for understanding Logistic chaos characteristic and chaos control.

Key words: Chaos system; Logistic system; Symbolic time series; Relative entropy; Time irreversibility

1 引言

近年来, 随着混沌理论的发展, 信息技术、生物医学、电力电子及经济学等领域混沌现象的研究取得了突破性进展^[1-7]。

混沌现象是不含外加随机因素的完全确定性系统所表现出来的内部随机行为, 具有不可预测性和不确定性。在一定的控制方法和参数范围内, 系统会出现周期运动和混沌现象。现有的混沌研究方法主要有分岔图^[8], Lyapunov 指数^[9], Jacobian 矩阵法^[10]等。这些方法直观形象, 但是需要进行大量计算, 对于高维迭代映射, 不动点和 Jacobian 矩阵计算更加困难。因此, 采用解析方法分析混沌现象存在一定的局限。数学理论已经证明, 在 1 维非线性系统中得到的倍周期分岔序列与临界点附近的标度

性质对于高维系统普遍适用^[11]。因此, 研究 1 维非线性系统的混沌具有普遍而重要意义, 其中具有代表性的就是 Logistic 混沌系统。

从时间序列角度研究混沌, 始于文献[12]提出的相空间重构理论。在信息论范畴, 熵是对不确定性的最佳量化参数, 对混沌系统产生的时间序列进行离散化处理, 然后进行统计分析和量化, 从而使从时间序列研究混沌成为可能。文献[13]研究了噪声相互关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响, 文献[14]分析了 Logistic 混沌系统不同初值和系统参数的谱熵复杂性, 文献[15]研究了 Logistic 混沌系统突变时间序列临界预警, 文献[16]指出时间序列不对称性或不可逆性是混沌行为的重要标志, 文献[17]研究了脑电信号的时间不可逆性, 文献[18]研究了时间不可逆性与熵产之间的关系。

截止目前, 基于时间序列不对称性或不可逆性分析混沌行为的方法在医学领域已经取得突破性进

展, 但采用此种方法分析 Logistic 混沌系统特性却鲜有报道。在文献[16]的启示下, 本文拟从时间序列不对称性或不可逆性的角度研究 Logistic 混沌系统特性, 从而达到识别和量化混沌行为的目的。研究结果证明, Logistic 混沌系统的相对熵由参数 μ 决定, 与初值 x_0 无关, 并且随着参数 μ 增大, Logistic 混沌系统相对熵及相对熵变化范围增大, Logistic 混沌系统远离平衡状态程度增强, 从而证明了本文思路的正确性和可行性。

2 时间序列符号化和相对熵理论

2.1 时间序列符号化

时间序列分析是由符号动力学、混沌时间序列分析和信息论衍生的形式较为简单的严格数学方法, 是实际动力系统的高度概括和抽象。根据时间序列与符号序列拓扑共轭的特性, 将若干个可能值上的离散时间序列转化为符号序列, 符号化后序列能够保持原有系统动力学特性, 从而将混沌系统变成一个遍历的信息源, 可以采用信息论来分析符号序列。以 1 维单峰映射 Logistic 函数为例说明时间序列符号化方法。

经典 Logistic 函数定义为

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) = \mu x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

根据式(1), 经推导可得

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) = -\mu \left(x_n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\mu}{4} \quad (2)$$

对于式(2), 任意给定参数 μ , 当 $x_n = 1/2$ 有最大值 $f_{\max}(\mu, x_n) = \mu/4$, 根据文献[19]的论述, 当 $x_n = \mu/4$ 时, 有最小值 $f_{\min}(\mu, x_n) = (\mu^2/4)(1 - \mu/4)$ 。

任意给定初值 x_0 , 代入式(1)得到离散数值序列 $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ 。根据拓扑判据分区方法^[20], Logistic 映射相空间临界点 C 将映射分成两个单调分支, 一个单调上升, 一个单调下降, 如图 1 所示。令

$$s_n = \begin{cases} 0, & x_n \leq x_c \\ 1, & x_n > x_c \end{cases} \quad (3)$$

其中 x_c 是临界点 C 的横坐标。通过式(3)将离散数值序列转换成一个由“0”和“1”组成的二进制符号序列 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ 。根据滑动时间窗方法选择合适编码字长 m 并转换成十进制代码序列, 计算代码序列中不同符号序列概率, 系统动力学特性就转化为对概率统计学规律的研究。

2.2 相对熵理论

根据 KL(Kullback-Leibler divergence)散度理论^[21], 离散型随机变量的相对熵定义为

$$D(P_f \| P_b) = \sum_{s \in S} P_f(s) \lg \frac{P_f(s)}{P_b(s)} \quad (4)$$

其中 $P_f(s)$ 和 $P_b(s)$ 分别为前向序列和逆向序列的概率分布, 且 $S = 2^m$, m 为编码长度。

相对熵具有以下性质: (1)当 P_f 和 P_b 各自总和均为 1, 且对于任何 s 均需满足 $P_f(s) \geq 0$ 和 $P_b(s) \geq 0$; (2)当 $P_f(s) = 0$ 或 $P_b(s) = 0$ 时, 规定其对应的相对熵为 0^[15]; (3)相对熵只是度量或距离函数, 不具有对称性, 即 $D(P_f \| P_b) \neq D(P_b \| P_f)$; (4)相对熵总是大于 0, 当且仅当两个序列分布相同时等于 0。

因为

$$\begin{aligned} D(P_f \| P_b) &= \sum_{s \in S} P_f(s) \left(\lg(1/P_b(s)) \right) \\ &\quad - \sum_{s \in S} P_f(s) \left(\lg(1/P_f(s)) \right) \\ &= \sum_{s \in S} P_f(s) \left(\lg(P_f(s)/P_b(s)) \right) \end{aligned}$$

由于 $-\log u$ 函数是凸函数, 根据詹森不等式有下面的关系:

$$\begin{aligned} D(P_f \| P_b) &= -\sum_{s \in S} P_f(s) \left(\lg(P_b(s)/P_f(s)) \right) \\ &= E \left(-\lg(P_b(s)/P_f(s)) \right) \\ &\geq -E \left(\lg(P_b(s)/P_f(s)) \right) \\ &= -\lg \left(\sum_{s \in S} P_f(s) \left((P_b(s)/P_f(s)) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

相对熵反映符号序列前向分布和逆向分布的差异性。熵的本质是变化的方向性和时间的方向性, 只要相对熵可以计算且大于等于零, 就表明存在时间不可逆性^[21]。自然界的一切自发进行过程都是朝熵增方向进行的, 在熵增原理的前提下, 熵值较小对应于比较有序的状态, 熵值较大对应于比较无序的状态, 可逆过程的熵值为零。

3 Logistic 混沌系统相对熵

当参数 $\mu \in (0, 4]$ 时, 所有的 $x \in [0, 1]$, Logistic 混沌系统分岔图如图 2 所示。从图 2 可以得出, 随着参数 μ 增大, 混沌序列取值范围扩大, 分布越来越均匀。根据倍周期分岔定理^[19], Logistic 混沌系统发生倍周期分岔点称为定点, 定点对应失稳边界 $f'(\mu, x) = -1$ 。当 $\mu \geq 1$ 时, Logistic 混沌系统定点 x_p 随参数 μ 变化曲线如图 3 所示。定点随参数 μ 增大呈现递增趋势, 但是不同初值 x_0 对固定点分布不产生影响。

当参数 $\mu > 3.500$ 时, Logistic 混沌系统处于混沌状态, 为了进一步观察 Logistic 混沌系统序列分布情况, 取数据长度 $L = 100000$, 数值 $[0, 1]$ 之间采用 0.01 步长进行分区, 分区区间 $M = 100$, 分别取

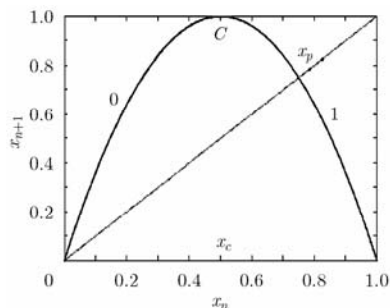
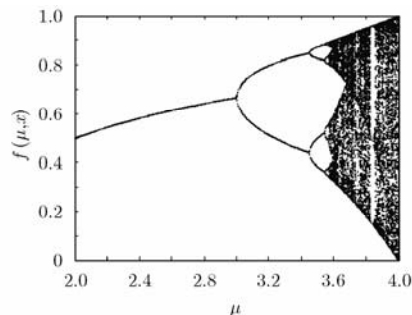
图1 Logistic 返回映射($\mu=4$)

图2 Logistic 混沌系统分岔图

参数 $\mu = 3.730$ 和 $\mu = 3.995$ 时的混沌序列分布, 区间统计情况如图 4 所示。从图 4 可以看出, 参数 $\mu = 3.730$ 时, 序列有一些零值分布, 参数 $\mu = 3.995$ 时, 除了在上、下边界分布较多数值, 其余数值均匀分布在整个数值空间, Logistic 映射处于强混沌状态, 不同初值 x_0 对序列分布几乎没有影响, 不同参数 μ 对应的序列分布显著不同^[22]。因此, 本文将探讨不同初值 x_0 和参数 μ 对序列分布产生的影响, 并将这种影响用相对熵的形式进行量化。

3.1 相对熵与数据长度关系

取 Logistic 映射符号序列数据长度 $L=300$, 图 5 为前向和逆向符号序列, 其中图 5(a) 为参数 $\mu = 3.995$ 时前向序列和逆向序列, 图 5(b) 为参数 $\mu = 3.500$ 时前向序列和逆向序列, 图中可以明显看出处于混沌状态和周期状态时前向序列和逆向序列的差别。

当参数 $\mu = 3.995$ 时, Logistic 映射符号序列数据长度 L 从 1000 开始取到 7000, 每隔 500 取一点, 共取 13 个点, 分别计算不同长度符号序列相对熵变化区间和对应的标准差, 得到相对熵变化区间与数据长度 L 的关系如图 6 所示。由图 6 中相对熵变化区间和标准差曲线可知:

(1) 当数据长度 $L < 4000$ 时, 相对熵变化区间和标准差范围较大。主要是因为数据长度较短时, 符号序列转化为编码过程中会丢失一些状态, 使转化后序列长度小于理论计算数据长度, 从而造成相对熵变化区间和标准差较大;

(2) 当数据长度大于 4000 时, 实际数据长度与理论要求一致, 相对熵变化区间和标准差趋于稳定。

从计算精确度考虑, 数据长度越小, 算法运算速度越快, 数据长度越大, 其统计分布越接近实际分布, 计算的准确性越高。综合实验结果, 取数据长度 $L=5000$, 相对熵变化区间和标准差趋于稳定范围, 同时可以保证实验精度要求。

3.2 相对熵与编码长度关系

Logistic 映射符号序列数据长度 $L=5000$, 编码长度 m 从 3 取到 10, 分别计算参数 $\mu = 3.995$ 和 $\mu = 3.730$ 时的相对熵变化范围, 得到相对熵变化区

间与编码长度 m 的关系如图 7 所示。

由图 7 中相对熵变化范围可知: (1) 编码长度小于 8 位时, 相对熵变化趋势不明显, 编码长度增至 $m=8$ 时, 相对熵变化区间迅速增大; (2) 参数 $\mu = 3.995$ 时相对熵的变化范围明显高于 $\mu = 3.730$ 时的相对熵变化范围。随着系统进入强混沌状态, 相对熵值增大, 同时变化范围也增大, 反映出系统远离平衡状态程度随着参数 μ 的增大而增强。

编码长度 m 越长实验效果越明显, 考虑到算法复杂度及在实际应用中的实用性, 编码长度应取得短一些, 综合考虑以上诸因素, 编码长度取 8 位就能得到理想的实验结果。

3.3 数据长度 $L=5000$, 编码长度 $m=8$ 时相对熵特性

为了得到更普遍适用的结论, 对 Logistic 映射取数据长度 $L=5000$, 编码长度 $m=8$, 系统初值 x_0 取值范围为 $[0.01 \sim 0.99]$, 步长 0.01, 参数 μ 在 $[3.500 \sim 3.999]$ 之间取值, 步长 0.01, Logistic 映射离散混沌数据由式(1)产生, 取值范围在 $[0, 1]$ 之间, 所有数据均计入计算, 得到 Logistic 映射符号序列对应相对熵如图 8 所示。

由图 8 中 Logistic 映射混沌数据反映的信息归纳如下: (1) 当 Logistic 映射处于周期态时, 相对熵值保持恒定, 且随着周期数增加, 相对熵值增大; (2) 在参数 μ 取值范围内, 无论系统初值如何, Logistic 系统相对熵值变化趋势相同, 变化范围及相应标准差数据分析如图 9 所示, 从而证明 Logistic 混沌系统的相对熵不具有初值依赖性; (3) 随着参数 μ 增加, 抛开突变点情况, 相对熵值增大, 相对熵变化范围同时增大。随着参数 μ 增加, 混沌序列取值范围增大, Logistic 系统远离平衡状态程度增强, 从而使得序列相对熵值随着参数 μ 的增加而增大; (4) 在熵值递增过程中会出现一些突变点情况, 即在特定参数 μ 下, Logistic 映射没有进入混沌状态, 而是停留在周期分岔状态, 并且周期点附近数据稠密, 所有数据都集中在某几个统计区间, 导致这些突变点的相对熵值迅速增大。图 10 所示序列分布图也证明了这一点。

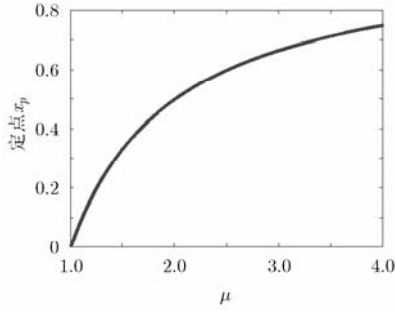


图3 Logistic 混沌系统固定点随参数 μ 变化曲线

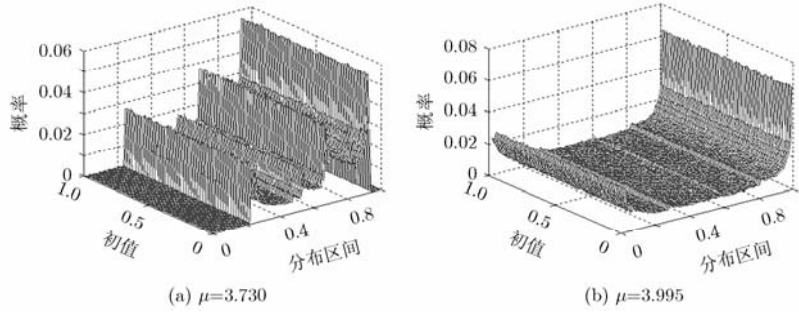
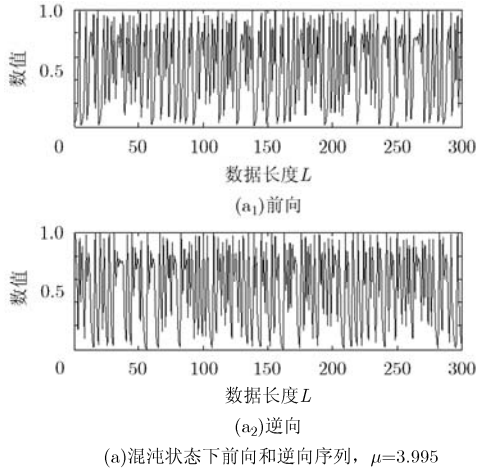
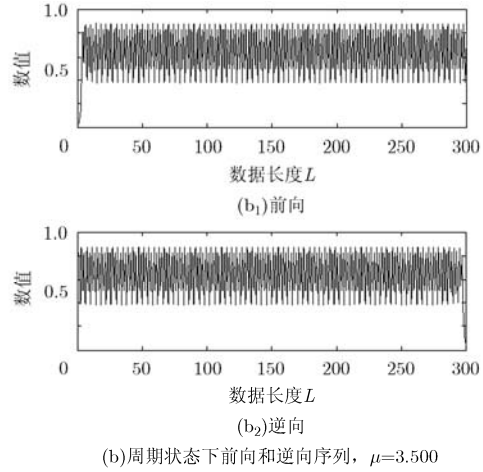


图4 Logistic 混沌系统统计分布图 $L=100000, M=100$



(a) 混沌状态下前向和逆向序列, $\mu=3.995$



(b) 周期状态下前向和逆向序列, $\mu=3.500$

图5 Logistic 混沌系统前向和逆向序列

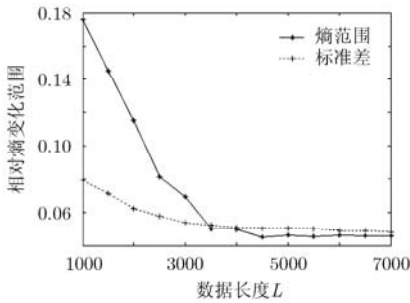


图6 Logistic 混沌系统相对熵与数据长度 L 的关系

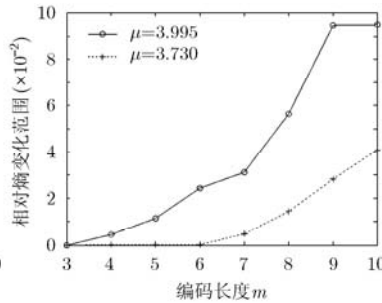


图7 Logistic 混沌系统相对熵与编码长度 m 的关系

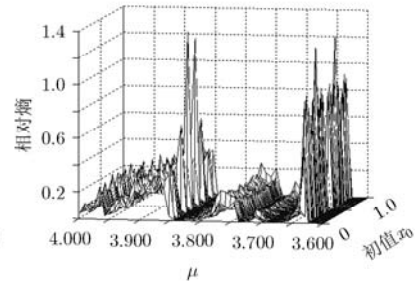


图8 $L=5000, m=8$, Logistic 混沌系统符号序列相对熵 3 维图

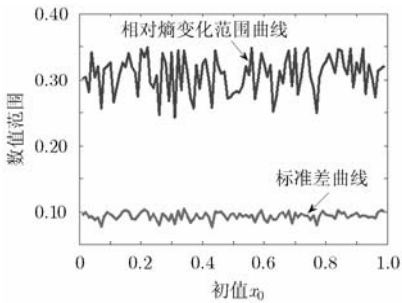


图9 Logistic 混沌系统相对熵变化范围及相应标准差曲线

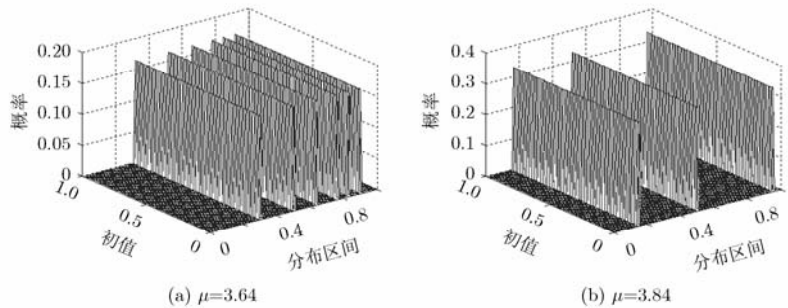


图10 $L=5000, m=8$, Logistic 混沌系统序列分布图

4 结论

本文提出一种采用离散符号序列和相对熵理论

分析Logistic混沌特性的新方法。给出描述符号序列总体统计特征的相对熵定义及其性质，结合数学仿

真实验, 得到Logistic混沌序列的特性: (1)使用离散符号序列的前向概率和逆向概率分布计算符号序列的相对熵, 由于相对熵可以计算且大于等于零, 从而证明Logistic混沌系统存在时间不可逆性; (2)初值 x_0 的变化基本没有改变序列的相对熵值变化趋势, 相对熵变化范围及标准差趋于稳定, 从而进一步证明了并非混沌系统的所有特征参数都具有初值依赖性; (3)随着参数 μ 的增加, 序列的相对熵值及相对熵变化范围增大, 表明Logistic混沌系统的相对熵特性基本由参数 μ 决定, 与初值 x_0 无关; (4)根据熵增原理, 将物理学和统计学结合起来, 实现了利用统计学理论量化混沌系统离开平衡状态程度。

参 考 文 献

- [1] Zhuang Qun-tao, Gao Xun, Ouyang Qi, *et al.* Dynamical topology and statistical properties of spatiotemporal chaos[J]. *Chaos*, 2012, 22(4): 043133.
- [2] Wang Wen-xu, Yang Rui, Lai Ying-cheng, *et al.* Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(4): 154101-1-154101-4.
- [3] 郑建伟, 王万良, 蒋一波, 等. 概率型稀疏核 Logistic 多元分类机[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(7): 1632-1638. Zheng Jian-wei, Wang Wan-liang, Jiang Yi-bo, *et al.* Probabilistic sparse kernel Logistic multi-classifier[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(7): 1632-1638.
- [4] 侯凤贞, 黄晓林, 庄建军, 等. 多尺度策略和替代数据检验——HRV 时间不可逆性分析的两个要素[J]. 物理学报, 2012, 61(22): 220507-1-220507-6. Hou Feng-zhen, Huang Xiao-lin, Zhuang Jian-jun, *et al.* Multi-scale strategy and data surrogating test: two elements for the detection of time irreversibility in heart rate variabilities[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(22): 220507-1-220507-6.
- [5] Giaouris D, Banerjee S, Imrayed O, *et al.* Complex interaction between tori and onset of three-frequency quasi-periodicity in a current mode controlled boost converter[J]. *IEEE Transactions on Circuits, and Systems-I*, 2012, 59(1): 207-214.
- [6] Laugesen J L, Mosekilde E, and Zhusubaliyev Z T. Bifurcation structure of the C-type period-doubling transition[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2012, 241(5): 488-496.
- [7] Chen Yan-feng, Tse C K, Qiu Shui-sheng, *et al.* Coexisting fast-scale and slow-scale instability in current-mode controlled DC/DC converters: analysis, simulation and experimental results[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2008, 55(11): 3335-3347.
- [8] De S, Dutta P S, and Banerjee S. Tours destruction in a nonsmooth noninvertible map[J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(4): 400-406.
- [9] Yao Tian-liang, Liu Hai-feng, Xu Jian-liang, *et al.* Estimating the largest lyapunov exponent and noise level from chaotic time series[J]. *Chaos*, 2012, 22(3): 033102.
- [10] Kapat S, Patra A, and Banerjee S. Achieving monotonic variation of spectral composition in DC-DC converters using pulse skipping modulation[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2011, 58(8): 1958-1966.
- [11] 吴祥兴. 混沌学导论[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1997: 7-8.
- [12] Packard J P, Crutchfield J P, Fanner J D, *et al.* Geometry from a time series[J]. *Physical Review Letters*, 1980, 45(9): 712-716.
- [13] 杨林静, 戴祖诚. 噪声相互关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响[J]. 物理学报, 2012, 61(10): 100509-1-100509-4. Yang Lin-jing and Dai Zu-cheng. The effects of correlated time between noises on stability of unstable state in logistic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(10): 100509-1-100509-4.
- [14] 孙克辉, 贺少波, 何毅, 等. 混沌伪随机序列的谱熵复杂性分析[J]. 物理学报, 2013, 62(1): 010501-1-010501-8. Sun Ke-hui, He Shao-bo, He Yi, *et al.* Complexity analysis of chaotic pseudo-random sequences based on spectral entropy algorithm[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(1): 010501-1-010501-8.
- [15] 颜鹏程, 侯威, 胡经国. 基于 Logistic 模型的均值突变时间序列临界预警研究[J]. 物理学报, 2012, 61(18): 189202-1-189202-8. Yan Peng-cheng, Hou Wei, and Hu Jing-guo. The critical warning research of the mean time series mutations based on Logistic model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(18): 189202-1-189202-8.
- [16] Porporato A, Rigby J R, and Daly E. Irreversibility and fluctuation theorem in stationary time series[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(9): 094101-1-094101-4.
- [17] 张梅, 王俊. 基于改进的符号相对熵的脑电信号时间不可逆性研究[J]. 物理学报, 2013, 62(3): 038701-1-038701-5. Zhang Mei and Wang Jun. Modified symbolic relative entropy based electroencephalogram time irreversibility analysis[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(3): 038701-1-038701-5.
- [18] Roldán E and Parrondo J M R. Estimating dissipation from single stationary trajectories[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(15): 150607-1-150607-4.
- [19] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1993: 13-14.
- [20] Wang Xue-mei, Zhang Bo, and Qiu Dong-yuan. The Quantitative characterization of symbolic series of a boost converter[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2011, 26(8): 2101-2105.
- [21] Rached Z, Alajaji F, and Campbell L L. The Kullback-Leibler divergence rate between markov sources[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(5): 917-921.
- [22] 潘欣裕, 赵鹤鸣. Logistic 混沌系统的熵特性研究[J]. 物理学报, 2012, 61(20): 200504-1-200504-7. Pan Xin-yu and Zhao He-ming. Research on the entropy of logistic chaos[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(20): 200504-1-200504-7.

徐红梅: 女, 1975年生, 博士生, 研究方向为智能开关变换及控制、混沌动力学、无线通信技术。

郭树旭: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为数字图像处理、高功率半导体激光器、无线通信技术。