

基于半正定秩松弛方法的稳健波束形成

罗涛 刘宏伟 严俊坤 纠博* 卢红喜
(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘要: 现有的向量加权稳健波束形成方法只有在指向误差较小的情况下才能有效估计目标的信号功率; 矩阵加权波束形成方法在指向误差较大时, 虽然可以估计目标的信号功率, 但是它的系统实现复杂度与向量加权稳健波束形成方法相比较较大。针对以上问题, 该文提出基于半正定秩松弛(SDR)方法的稳健波束形成, 该方法优化模型中的目标函数与 Capon 算法的目标函数相同, 优化变量为加权向量的协方差矩阵, 并约束方向图的主瓣幅度波动范围、旁瓣电平, 协方差矩阵的秩为 1。应用 SDR 方法求得加权向量的协方差矩阵, 将该矩阵中的每一行(列)转化为加权向量, 然后选择使得方向图主瓣与 0 dB 之间失真最大值最小的一个加权向量。该方法的系统实现复杂度与传统向量加权方法一致, 对信号功率的估计性能与矩阵加权方法相当。仿真实验验证了该文方法可以得到理想的方向图形状, 并且可以在大指向误差条件下有效估计信号功率。

关键词: 雷达信号处理; 半正定秩松弛; 主瓣幅度波动范围约束; 秩 1 约束; 加权向量选择

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)07-1545-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01046

Robust Beamforming via Semidefinite Rank Relaxation

Luo Tao Liu Hong-wei Yan Jun-kun Jiu Bo Lu Hong-xi

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The existing vector weighted robust beamforming is able to estimate the signal power of target only in situations of a small steering angle error. For a larger steering angle error case, although the matrix weighted beamforming can effectively estimate the signal power of the target as well, the system implementation is more complicated than above mentioned vector weighted. In order to solve these problems, this paper presents a new robust beamforming approach based on SemiDefinite rank Relaxation (SDR). Detailed description of the proposed method are given as follows: the optimal model has the same objective as that of the Capon algorithm; the optimization variable is the covariance matrix of weight vector with constraints posed on the ripple of mainlobe amplitude and sidelobe level, and the rank of covariance matrix is 1; the covariance matrix of the weight vector can be obtained by the SDR method, and each row or column of the matrix is translated into weight vector, then a weight vector is chosen which allows it become minimal one in the maximum distortions between the mainlobe of beampattern and 0 dB. The system implementation complexity of the proposed method is the same as the vector weighted methods, and the signal power estimation performance is similar to the matrix weighted method. The simulation results show that the desired beampattern shape and effective estimation of signal power can be obtained under the condition that the large steering angle error exists.

Key words: Radar signal processing; SemiDefinite rank Relaxation (SDR); Ripple constrain of mainlobe amplitude; Rank-one constraint; Selected weight vector

1 引言

波束形成是阵列信号处理中一个重要的研究方向, 在雷达、通信、声呐、声学、医学影像以及空

间科学中都有着广泛的应用^[1-10]。波束形成可以分为依赖于接收数据的自适应波束形成方法和不依赖于接收数据的离线波束形成方法。这里我们重点讨论自适应波束形成方法, 传统的自适应波束形成方法^[11-15]采用向量加权, 它针对每次快拍数据做一次加权, 形成单个接收波束; 文献[16]提出了一种矩阵加权的自适应波束形成方法, 它是对每次快拍数据形成一组接收波束, 这组波束累加形成总的接收波

2013-07-17 收到, 2014-02-25 改回

国家自然科学基金(61271291, 61201285), 新世纪优秀人才支持计划(NCET-09-0630), 全国优秀博士学位论文作者专项资金(FANEDD-201156)和中央高校基本科研业务费专项资金资助课题

*通信作者: 纠博 bojiu@mail.xidian.edu.cn

束。虽然矩阵加权波束形成方法比向量加权波束形成方法有更大的自由度可供利用,但是矩阵加权方法的系统实现复杂度也要更高。

Capon^[11]方法是向量加权自适应波束形成方法中的经典算法,这一类方法对于快拍数、指向误差、阵列校准误差等,比较敏感。基于以上几方面问题,一些学者在此类算法的基础上提出了稳健波束形成方法^[12-15],这类算法对上面几种误差具有很好的稳健性。本文主要讨论稳健 Capon 波束形成方法(Robust Capon Beamforming, RCB)^[12],当指向误差较小时此算法是有效的,当指向误差较大时,该方法对于信号功率的估计性能急剧下降。文献[16]中的矩阵加权方法(Adaptive Matrix Approach, AMA)对于上面提到的几种误差也是稳健的,但是此方法只约束了方向图的 3 dB 功率点,在不同的噪声条件下所形成的方向图的主瓣形状是不稳定的,当指向误差小于阵列 3 dB 波束宽度时,该方法对信号功率的估计性能与 RCB 方法相当,当指向误差大于阵列 3 dB 波束宽度时,它的信号功率估计性能损失在 3 dB 左右。虽然矩阵加权方法相比向量加权方法具有更好的稳健性,但是它的系统实现要比向量加权方法复杂。本文提出基于半正定秩松弛(SemiDefinite rank Relaxation, SDR)方法的向量加权稳健波束形成,该方法约束方向图主瓣幅度波动范围和旁瓣电平,在不同的噪声和上述误差条件下对于信号功率估计是稳健的,并且该方法在较大指向误差条件下,依然可以有效估计信号功率,系统实现复杂度与向量加权方法一致。AMA 方法和本文方法都属于多点约束类方法,相比传统的多点约束类方法^[17,18],它们对参数选择更稳健。

本文应用线性约束最小方差准则建立优化模型,由加权向量的协方差矩阵代替 Capon 算法中的加权向量,由于加权向量的协方差矩阵的秩为 1,那么就需要在优化模型的约束中加入秩 1 约束,包含有秩约束的优化问题是非凸的。针对此类问题,可以应用优化工具包 Yalmip 中的 LMIRank^[19]来求解,但是该方法并不能保证得到全局最优解,因此本文应用半正定秩松弛(SDR)方法将这个优化问题松弛为一个半正定(SemiDefinite Program, SDP)优化问题,SDP^[20]问题可以求得全局最优解,但是通过 SDRR 方法求得的加权向量的协方差矩阵的秩并不为 1。本文假设求得的协方差矩阵的秩为 1,将该矩阵中的每 1 行(列)处理为一个加权向量,对比应用这些加权向量形成的方向图,选择主瓣形状失真最小的方向图对应的加权向量作为最终的加权向量。

2 信号模型

考虑一个接收阵元数为 M 的等距线阵,阵元间距 $d = \lambda/2$,将接收阵的第 1 个阵元设为参考阵元,假设目标回波信号为远场信号,目标在方位角 θ_0 处的导向向量为

$$\mathbf{a}(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi\frac{f_c}{c}d\sin(\theta_0)} & \dots & e^{j2\pi\frac{f_c}{c}d\sin(\theta_0)(M-1)} \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

c 表示光速, f_c 表示发射信号载频。第 n 次快拍的接收信号为

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{s}(n) + \mathbf{e}(n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中 $\mathbf{y}(n) \in C^{M \times 1}$, $\mathbf{s}(n)$ 表示发射信号, $\mathbf{e}(n) \in C^{M \times 1}$ 表示接收到的干扰和噪声, N 为快拍数。

2.1 传统向量加权自适应波束形成方法信号模型

第 m 个阵元每次接收的信号加一个复数权值 w_m^* , $(\cdot)^*$ 表示共轭,经过波束形成后的接收信号为

$$\mathbf{w}^H \mathbf{y}(n) = [\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)]\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}^H \mathbf{e}(n) \quad (3)$$

$(\cdot)^H$ 表示矩阵共轭转置, $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \in C^{M \times 1}$, $(\cdot)^T$ 表示矩阵转置。通常约束 $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$, 式(3)中右边的第 2 项远小于第 1 项,所以通过式(3)可以得到信号与信号功率的估计为

$$\hat{s}(n) \approx \mathbf{w}^H \mathbf{y}(n) \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}^2 \approx \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w} \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{R}} \in C^{M \times M}$ 为接收信号协方差矩阵,通常情况下可以通过估计得到

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n) \quad (6)$$

2.2 矩阵加权波束形成方法信号模型

矩阵加权波束形成方法的系统实现框图,如图 1 所示。

接收信号的第 n 次快拍的输出为

$$\mathbf{W}^H \mathbf{y}(n) = [\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_0)]\mathbf{s}(n) + \mathbf{W}^H \mathbf{e}(n) \quad (7)$$

其中 \mathbf{W} 为加权矩阵,

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_K] \in C^{M \times K} \quad (8)$$

由于在向量加权方法中约束了 $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$, 所以这里约束

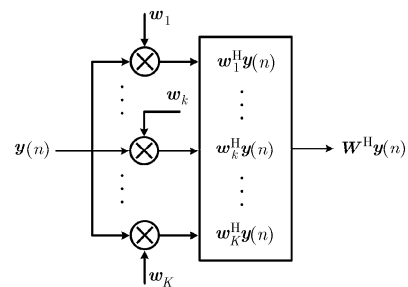


图 1 矩阵加权方法系统实现框图

$$\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_0) = \rho \quad (9)$$

$\rho \in C^{K \times 1}$, 本文期望准确估计目标的信号功率, 则 $\|\rho\|^2 = 1$ 。将式(9)代入到式(7)中可以得到信号的估计为

$$\hat{s}(n) \approx \rho^H \mathbf{W}^H \mathbf{y}(n) \quad (10)$$

矩阵加权波束形成方法与向量加权波束形成方法都希望对干扰有很好的抑制作用, 对式(7)作如下推导:

$$\mathbf{W}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{W} \approx [\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{W}] \hat{\sigma}^2 \quad (11)$$

对式(11)两边同时求矩阵的迹, 得到

$$\text{tr}(\mathbf{W}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{W}) = \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{W} \mathbf{W}^H) = \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{T}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{W}] &= \text{tr}[\mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{W} \mathbf{W}^H] \\ &= \text{tr}[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta_0)] = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)和式(13)中应用了 $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$, $\mathbf{T} = \mathbf{W} \mathbf{W}^H$ 表示加权矩阵的协方差矩阵。即信号的功率估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{T}) \quad (14)$$

式(14)这个功率估计成立的条件是: 当 $\theta \neq \theta_0$ 时, $\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta)$ 的值非常小, 即对干扰有很好的抑制作用。本文中主要讨论对信号功率的估计, 矩阵加权波束形成方法得到的功率方向图为

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta) \quad (15)$$

3 现有自适应波束形成方法回顾

自适应波束形成方法可以分为向量加权自适应波束形成和矩阵加权自适应波束形成, 本文首先讨论向量加权自适应波束形成方法。本文主要讨论 Capon 波束形成方法^[11]:

$$\left. \begin{aligned} \min_w \quad & \mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 θ_0 表示目标所在方位角, 这个准则对系统误差、指向误差比较敏感, 并且该方法只有在大样本条件下才能有效估计信号功率。针对上述问题, 文献[12-15]提出了稳健自适应波束形成方法, 此类方法在出现上述误差时可以有效估计信号功率。由于此类方法约束了指向误差范围, 它对大于阵列零点半波束宽度的指向误差是无效的。向量加权类方法的优化代价函数与式(16)相似, 它们是非凸优化模型, 不易求得全局最优解。

向量加权自适应波束形成方法存在上述不足, 文献[16]提出了矩阵加权自适应波束形成方法(AMA):

$$\left. \begin{aligned} \min_T \quad & \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{T}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \\ & \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta_i) = 0.5, \quad i = 1, 2 \\ & \mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{T} \mathbf{a}(\mu_l) \leq \varsigma, \quad \mu_l \in \Psi_s \\ & \mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{T} \mathbf{a}(\mu_l) \geq 0.5, \quad \mu_l \in (\theta_1, \theta_2) \\ & \mathbf{T} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

该优化模型的目标函数与 Capon 方法的物理含义是相同的, 该方法可以对方向图的形状有更好的约束。式(17)中的目标函数是使输出功率最小化, 约束中的第 1 行表示目标所在方位角的响应, 第 2 行约束 3 dB 波束宽度, 第 3 行约束旁瓣电平, Ψ_s 表示旁瓣范围, 第 4 行约束的目的是为了防止出现主瓣分裂, $\mathbf{T} \geq 0$ 的约束是由 $\mathbf{T} = \mathbf{W} \mathbf{W}^H$ 决定的。式(17)是一个半正定规划(SDP), 可以应用文献[21]中的工具包求得全局最优解。尽管矩阵加权波束形成方法可以克服向量加权波束形成方法的缺点, 但是该方法系统实现复杂度比向量加权方法更复杂, 基于此原因本文提出基于半正定秩松弛(SDR)方法的向量加权稳健波束形成。

4 秩 1 约束波束形成方法

本文采用与 Capon 波束形成方法相同的准则建立优化模型, 将式(16)的目标函数变为

$$\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w} = \text{tr}(\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w}) = \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{w} \mathbf{w}^H) = \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{v}) \quad (18)$$

$\mathbf{v} = \mathbf{w} \mathbf{w}^H$, $\mathbf{v} \in C^{M \times M}$ 表示加权向量的协方差矩阵。以式(18)为目标函数建立优化模型:

$$\left. \begin{aligned} \min_v \quad & \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}} \mathbf{v}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{v} \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \\ & \mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \leq 1 \\ & \mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \geq 1 - \varepsilon, \quad \mu_l \in \Psi_m \\ & \mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \leq \varsigma, \quad \mu_l \in \Psi_s \\ & \text{rank}(\mathbf{v}) = 1 \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式(19)与式(16)的目标函数是相同的, 约束中的第 1 行表示目标所在方位角的响应, 第 2 行与第 3 行约束了主瓣幅度的波动范围, Ψ_m 表示主瓣范围, ε 表示主瓣幅度波动值, 其可以设定为

$$\varepsilon = 1 - 10^{-\frac{\varepsilon_{\text{dB}}}{10}} \quad (20)$$

其中 ε_{dB} 表示主瓣幅度波动的最大 dB 值; 第 4 行约束方向图的旁瓣电平, Ψ_s 表示旁瓣范围; 第 5 行约束了加权协方差矩阵的秩为 1, $\mathbf{v} \geq 0$ 由 $\mathbf{v} = \mathbf{w} \mathbf{w}^H$ 决定。式(19)与式(16)的不同在于优化变量不同, 式(16)中的优化变量是加权向量, 式(19)中的优化变量是

加权向量的协方差矩阵, 式(19)中对于方向图形状的约束比式(16)更精细, 式(19)中包含约束 $\text{rank}(\mathbf{v}) = 1$, 所以该优化问题是非凸的。针对带有秩约束的优化问题, 我们分别应用 Yalmip 优化工具包中 LMIRank^[19]和半正定秩松弛算法来求解。下面本文给出两个方法的实现过程。

应用 Yalmip 中的 LMIRank 求解式(19)这个秩1约束的优化问题, 式(19)的优化模型可改写为式(21)的形式:

$$\left. \begin{aligned} \text{s.t. } t_{\text{lower}} &\leq \text{tr}(\widehat{\mathbf{R}}_r \mathbf{v}_r) \leq t_{\text{upper}} \\ \mathbf{a}_r^T(\theta_0) \mathbf{v}_r \mathbf{a}_r(\theta_0) &= 1 \\ \mathbf{a}_r^T(\mu_l) \mathbf{v}_r \mathbf{a}_r(\mu_l) &\leq 1 \\ \mathbf{a}_r^T(\mu_l) \mathbf{v}_r \mathbf{a}_r(\mu_l) &\geq 1 - \varepsilon, \quad \mu_l \in \Psi_m \\ \mathbf{a}_r^T(\mu_l) \mathbf{v}_r \mathbf{a}_r(\mu_l) &\leq \varsigma, \quad \mu_l \in \Psi_s \\ \text{rank}(\mathbf{v}_r) &\leq 2 \\ \mathbf{v}_r &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)中的优化变量是 \mathbf{v}_r , 其中

$$\widehat{\mathbf{R}}_r = \begin{bmatrix} \text{Re}(\widehat{\mathbf{R}}) & -\text{Im}(\widehat{\mathbf{R}}) \\ \text{Im}(\widehat{\mathbf{R}}) & \text{Re}(\widehat{\mathbf{R}}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{v}) & -\text{Im}(\mathbf{v}) \\ \text{Im}(\mathbf{v}) & \text{Re}(\mathbf{v}) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{a}_r(\mu) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{a}(\mu)) \\ \text{Im}(\mathbf{a}(\mu)) \end{bmatrix}$$

由于 $\text{rank}(\mathbf{v}) = 1$, 所以 $\text{rank}(\mathbf{v}_r) = 2$ 。式(21)中的 t_{lower} 和 t_{upper} 表示式(19)目标函数的下界和上界, 这两个参数需要预先给定, 然后采用二分法逐次缩小目标函数的范围, 进而求解式(21)。

半正定秩松弛(SDR)方法就是将优化模型中关于矩阵秩的约束除去, 式(19)可以变形为式(23)的形式。式(23)是一个半正定规划(SDP)^[20]问题, 并且是一个凸优化问题, 应用已有的凸优化工具包 CVX^[21]可以求得全局最优解, 式(23)求得的协方差矩阵的秩并不为1。对比式(21)和式(23)两个优化模型, 式(21)比式(23)多一个秩1约束, 所以式(21)比式(23)的优化自由度小。基于此原因, 式(21)中的主瓣形状约束和旁瓣电平约束就要比式(23)的约束更松弛, 才能求得合理的解。通过式(21)和式(23)可以求得加权向量的协方差矩阵 \mathbf{v} , 下面给出由 \mathbf{v} 求得加权向量 \mathbf{w} 的方法。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} \quad &\text{tr}(\widehat{\mathbf{R}}\mathbf{v}) \\ \text{s.t. } \quad &\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{v} \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \\ &\mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \leq 1 \\ &\mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \geq 1 - \varepsilon, \quad \mu_l \in \Psi_m \\ &\mathbf{a}^H(\mu_l) \mathbf{v} \mathbf{a}(\mu_l) \leq \varsigma, \quad \mu_l \in \Psi_s \\ &\mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

5 求加权矢量

应用上文中提到的式(21)和式(23)求得加权向量的协方差矩阵 \mathbf{v} , 由于 $\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{w}^H$, \mathbf{w} 是列矢量, 所以只有 $\text{rank}(\mathbf{v}) = 1$ 时才能满足式(19)。在 $\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{w}^H$ 的条件下, 矩阵 \mathbf{v} 的第 k 行是: $\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^H$, 所以本文假设矩阵 \mathbf{v} 的每1行(列)之间只相差一个复常数 $\sqrt{v_{kk}} e^{j\Delta_k}$, $k = 1, 2, \dots, M$, Δ_k 表示一个任意相位。由 \mathbf{v} 中的第 k 行得到的加权矢量为

$$\mathbf{w} = [\mathbf{v}_{k,1} \ \dots \ \mathbf{v}_{k,M}]^H / \sqrt{v_{k,k}} e^{j\Delta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (24)$$

式(24)中的分子表示 \mathbf{v} 的第 k 行, 分母是第 k 行对应的复常数, 式(19)的优化模型中约束的是功率方向图的主瓣形状和旁瓣电平, 这里给出由式(24)得到的加权向量形成的方向图:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= \frac{1}{v_{k,k}} \mathbf{a}^H(\theta) [\mathbf{v}_{k,1} \ \dots \ \mathbf{v}_{k,M}]^H [\mathbf{v}_{k,1} \ \dots \ \mathbf{v}_{k,M}] \mathbf{a}(\theta) \end{aligned} \quad (25)$$

由式(25)可以看出复常数中的相位 Δ_k 对功率方向图是没有影响的, 所以加权矢量为

$$\mathbf{w} = [\mathbf{v}_{k,1} \ \dots \ \mathbf{v}_{k,M}]^H / \sqrt{v_{k,k}}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (26)$$

由于 \mathbf{v} 的秩不严格满足 $\text{rank}(\mathbf{v}) = 1$, 所以式(26)中不同的 k 对应不同的加权向量。这里对比不同的 k 得到的加权向量 \mathbf{w} 所形成的方向图的主瓣与 0 dB 之间的最大失真, 选择最大失真最小的 k 得到加权向量 \mathbf{w} 作为最终的加权向量。以上给出的求解加权向量的过程中与阵列结构特性无关, 所以该方法可以适用于多种阵列结构。文献[16]中给出的方法要充分利利用等距线阵的结构特性, 并明确指出该方法仅对等距线阵有效。

式(26)是通过对比选择得到的加权矢量, 由式(21)和式(23)得到 \mathbf{v} , 本文假设矩阵 \mathbf{v} 的秩为1, 则可以利用特征值分解方法也可以得到加权向量 \mathbf{w} ,

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}_{\text{max}} \mathbf{D}_{\text{max}}^{1/2} \quad (27)$$

其中 \mathbf{V}_{max} 表示对 \mathbf{v} 做特征值分解得到的最大特征值对应的特征矢量, \mathbf{D}_{max} 表示最大特征值。

6 计算机仿真实验

下面通过计算机仿真实验验证本文方法可以得到具有期望主瓣形状、旁瓣电平和理想零点深度的方向图, 并且在较大指向误差条件下, 可以有效估计信号功率。仿真条件: 发射信号为线性调频信号, 信号载频 $f_c = 1$ GHz, 信号带宽 $B = 5$ MHz, 信号脉冲宽度 $T_r = 30$ μ s, 脉冲采样间隔 $T_s = 1/2B$; 接收信号中的噪声为高斯白噪声, 噪声功率为 0 dB; 接收阵是一个等距线阵 (Uniform Liner Array, ULA), 阵元数 $M = 20$, 阵元间距 $d = \lambda/2$; 约束

旁瓣电平 $\zeta = -40$ dB，主瓣区域波动最大值 $\varepsilon_{\text{dB}} = 0.5$ dB。

实验 1 方向图形状对比

假设目标方位角为 0° ，目标信号功率为 20 dB，干扰方位角为 40° ，干扰功率为 60 dB，主瓣区域 $\Psi_m = [-12^\circ, 12^\circ]$ ，旁瓣区域 $\Psi_s = [-90^\circ, -22^\circ] \cup [22^\circ, 90^\circ]$ ，接收信号的快拍数为 200。RCB 方法中真实导向矢量与期望导向矢量的差的二范数小于 $0.35M$ 。

首先，本文对比指向误差分别为 0° 和 2° 条件下，Capon 方法、RCB 方法、AMA 方法以及本文提出的 SDR 方法得到的方向图，如图 2 所示。图中的 SDR-one 和 SDR-eig 分别表示应用式(26)和式(27)求得的加权向量的方向图。由图 2 可以看出本文方法相比已有的几种方法在指向误差分别为 0° 和 2° 时均可以有效保持主瓣形状、旁瓣电平。式(26)的主瓣失真更小。

其次，本文对比 SDR 方法和直接求解秩 1 约束方法得到的方向图，如图 3，其中秩 1 约束方法中的： $t_{\text{lower}} \geq 50$ ， $t_{\text{upper}} \leq 150$ ，图中 SDR-T, SDR-one 和 SDR-eig 分别表示 SDR 方法应用协方差矩阵、式(26)和式(27)求得加权向量得到的方向图，Rank1-T, Rank1-one 和 Rank1-eig 分别表示秩 1 约束方法应用协方差矩阵、式(26)和式(27)求得加权向量得到的方向图。由图 3 可以看出，SDR 方法比秩 1 约束方法得到的方向图具有更好的主瓣形状、更低的旁瓣电平。应用式(26)得到的方向图的性能优于式(27)，这主要是因为 SDR 方法和秩 1 约束方法得到的协方差矩阵的秩都不一定严格为 1。

实验 2 方向图主瓣最大失真随主瓣宽度的变化

真实目标与假设目标方位角都在 0° ，半主瓣宽度范围为 $[6^\circ, 22^\circ]$ ，旁瓣与主瓣的过渡带宽度为 10° ，作 100 次蒙特卡洛实验，其它的仿真条件不变。将式(17)中的优化变量 \mathbf{T} 由 \mathbf{v} 代替后，由式(17)和式(23)得到加权向量的协方差矩阵 \mathbf{v} ，分别利用式(26)和式(27)求得加权向量 \mathbf{w} ，最后应用 \mathbf{w} 合成真实的方向图。图 4 中对比这两个优化模型得到的真实方向图的主瓣最大失真随着波束宽度的变化，图中的 SDR-3 dB 和 SDR-0.5 dB 分别表示应用式(17)和式(23)求得加权向量的协方差矩阵合成的方向图，-one 和 -eig 分别表示应用式(26)和式(27)求得的加权向量合成的方向图。由图 4 可以清楚地看出式(26)的方向图的主瓣最大失真小于式(17)，应用式(26)求得的加权向量 \mathbf{w} 合成的方向图的主瓣最大失真比式(27)的特征值分解方法更小。

实验 3 信号功率估计性能分析

首先，对比 Capon 方法、RCB 方法、式(17)的 AMA 方法和本文所提的式(23)的 SDR 方法在没有指向误差和 2° 指向误差条件下，各个方法的信号功率估计性能随快拍数的变化情况，如图 5 所示，其中 SDR 方法的加权向量应用式(26)求得，基本仿真条件与实验 1 相同。由图 5 可以看出，Capon 方法需要较大的快拍数以及无指向误差时才能有效估计信号功率，RCB 方法、AMA 方法和 SDR 方法在快拍数较小的情况下就可以稳健估计信号功率。

其次，在指向误差为： $[0^\circ, 12^\circ]$ 的条件下，本文对比 Capon 方法、RCB 方法、式(17)的 AMA 方法、将式(23)中的 \mathbf{v} 由 \mathbf{T} 代替后的 AMA 方法、将式(17)中的 \mathbf{T} 由 \mathbf{v} 代替后的 SDR 方法和式(23)的 SDR 方法的信号功率估计性能，如图 6 所示。由实验结果可以看出，Capon 方法在出现指向误差时，无法有效估计信号功率；RCB 方法在指向误差小于阵列的 3 dB 半波束宽度时可以有效估计信号功率，当指向误差进一步加大，该方法的性能急剧下降；式(23)优化模型的 AMA 方法的信号功率估计性能优于式(17)的 AMA 方法，在大指向误差条件下 AMA 方法的信号功率估计性能优于 Capon 方法、RCB 方法和 SDR 方法，尽管 AMA 方法的性能是最优的，但是该方法的系统实现复杂度相比其它几种方法要大；SDR 方法的信号功率估计性能与 AMA 方法相近，应用式(23)优化模型的 SDR 方法在小指向误差条件下与 RCB 方法性能接近，在大误差条件下 SDR 方法性能优于 RCB 方法。并且 SDR 方法的系统实现复杂度与向量加权方法一致，小于矩阵加权方法。

通过以上实验结果可以看出，应用本文提出的 SDR 方法求出加权向量的协方差矩阵，再利用式(26)求得加权向量，由该加权向量得到方向图具有期望的主瓣形状、旁瓣电平和理想的零点深度，此加权向量的信号功率估计性能接近矩阵加权方法，在大指向误差条件下优于传统的向量加权稳健波束形成方法。SDR 方法的系统实现复杂度与向量加权方法一致，小于矩阵加权方法。

7 结束语

本文提出了基于半正定秩松弛方法的稳健波束形成算法，该方法首先将带有秩约束的优化问题松弛为一个半正定优化(SDP)问题，通过松弛后的优化模型求得加权向量的协方差矩阵，利用式(26)所提方法求出稳健波束形成的加权向量。该方法形成的方向图相比传统的稳健波束形成方法和秩 1 约束方法，具有期望的主瓣形状、旁瓣电平，与矩阵加

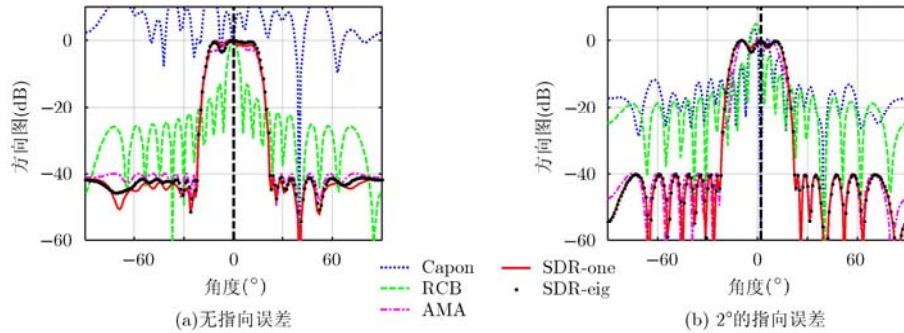


图 2 SDR 方法与已有方法方向图对比

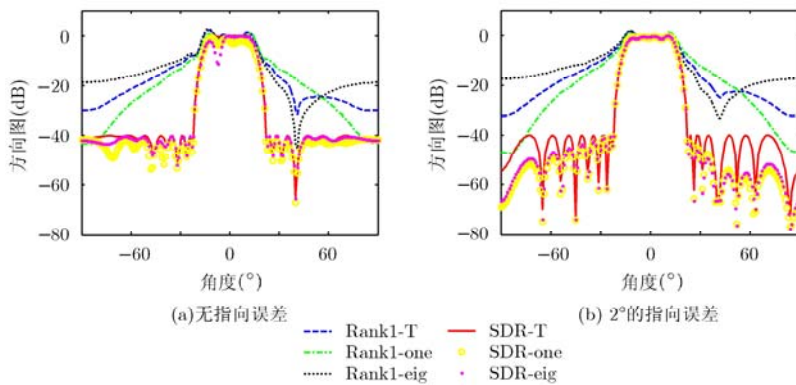


图 3 SDR 方法与秩 1 约束方法的方向图

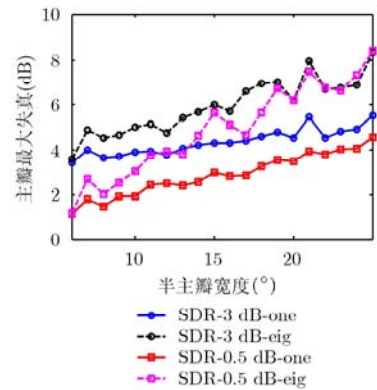


图 4 接收方向图的主瓣最大失真

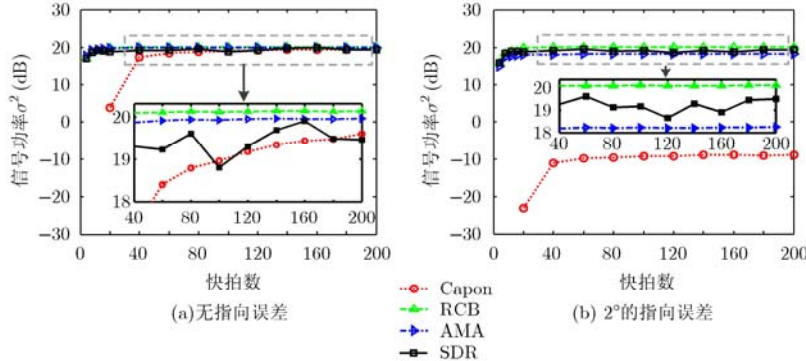


图 5 信号功率估计随快拍数的变化

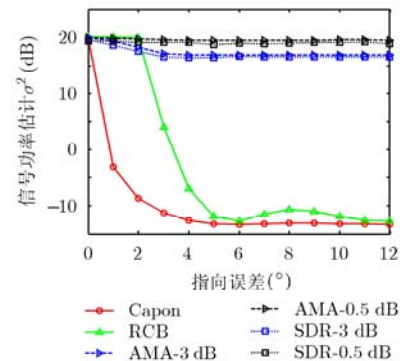


图 6 信号功率估计随指向误差变化

权方法得到方向图近似。SDR 方法的信号功率估计性能接近矩阵加权方法，在大指向误差条件下优于传统的向量加权稳健波束形成方法，并且该方法的系统实现复杂度与向量加权方法一致，本文中给出的求加权向量方法可以适用于各种阵列结构。

参 考 文 献

[1] Aziz A, Zeng M, Zhou J, et al. Robust beamforming with channel uncertainty for two-way relay networks[C]. 2012 IEEE International Conference on Communications, Ottawa, 2012: 3632-3636.
 [2] Cumanan K, Rahulamathavan Y, Lambotharan S, et al.

MMSE based beamforming techniques for relay broadcast channels[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, 62(8): 726-737.
 [3] Liao B and Chan S C. Robust recursive beamforming in the presence of impulsive noise and steering vector mismatch[J]. *Journal of Signal Processing Systems*, 2013, 73(1): 1-10.
 [4] Ma S and Dechun S. Chance constrained robust beamforming in cognitive radio networks[J]. *IEEE Communications Letter*, 2013, 17(1): 67-70.
 [5] Kumar N S, Philip D J, and Bhattacharya C. DoA estimation using compressive beamforming in shallow ocean using acoustic vector sensors[C]. India Conference (INDICON),

- Kochi, India, 2012: 551-554.
- [6] Wong C H, Siew Z W, Tan M K, *et al.* Optimization of distributed and collaborative beamforming in wireless sensor networks[C]. Computational Intelligence, Communication Systems and Networks (CICSyN), Phuket, Thailand, 2012: 84-89.
- [7] Alrabadi O N, Tsakalaki E, Huang H, *et al.* Beamforming via large and dense antenna arrays above a clutter[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2013, 31(2): 314-325.
- [8] Du H, Ratnarajah T, Pesavento M, *et al.* Joint transceiver beamforming in MIMO cognitive radio network via second-order cone programming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(2): 781-792.
- [9] 刘肖萌, 高文军, 邓云凯, 等. 基于投影矩阵法的阵列天线波束形成方法[J]. 雷达学报, 2012, 1(1): 50-57.
Liu Xiao-meng, Gao Wen-jun, Deng Yun-kai, *et al.* Beam synthesis technique for array antenna based on projection matrix algorithm[J]. *Journal of Radars*, 2012, 1(1): 50-57.
- [10] 杜强, 宋耀, 曹晓健. 基于 Hermite 插值滤波器的直接延时补偿超宽带波束形成技术研究[J]. 雷达学报, 2013, 2(3): 278-283.
Du Qiang, Song Yao, and Cao Xiao-jian. Research on UWB beamforming using direct time delay compensation based on hermite interpolation filter[J]. *Journal of Radars*, 2013, 2(3): 278-283.
- [11] Capon J. High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [12] Li J, Stoica P, and Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 51(7): 1702-1715.
- [13] Vorobyov S A, Gershman A B, and Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 313-324.
- [14] Lorenz R G and Boyd S. Robust minimum variance beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(5): 1684-1696.
- [15] Li J and Stoica P. Robust Adaptive Beamforming[M]. New York, US: Wiley, 2006: 1-200.
- [16] Li J, Xie Y, Stoica P, *et al.* Beampattern synthesis via a matrix approach for signal power estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(12): 5643-5657.
- [17] Frost O L, III. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1972, 60(8): 926-935.
- [18] Leuret H and Boyd S. Antenna array pattern synthesis via convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 526-531.
- [19] Orsi R, Helmke U, and Moore J B. A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2006, 42(11): 3138-3144.
- [20] Boyd S and Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. Cambridge, UK: Cambridge University, 2004: 521-620.
- [21] Grant M and Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming[OL]. <http://stanford.edu/~boyd/cvx>, Dec. 2008.
- 罗 涛: 男, 1983 年生, 博士生, 研究方向为 MIMO 雷达波形设计、稳健波束形成。
- 刘宏伟: 男, 1971 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为雷达信号处理、雷达自动目标识别等。
- 严俊坤: 男, 1987 年生, 博士生, 研究方向为认知雷达信号处理、自适应信号处理。
- 纠 博: 男, 1982 年生, 博士, 副教授, 研究方向为自适应信号处理、雷达自动目标识别。
- 卢红喜: 男, 1987 年生, 博士生, 研究方向为极化干涉处理、极化层析处理及层析阵列优化。