

一种方向优化最小均方算法

李霄剑 王永* 陈绍青 付志浩
(中国科学技术大学自动化系 合肥 230027)

摘要: 最小均方(Least Mean Square, LMS)算法的更新方向是对最速下降方向的估计,其收敛速度也受到最速下降法的约束。为了摆脱该约束,该文在对 LMS 算法分析的基础上,提出一种针对 LMS 算法的分块方向优化方法。该方法通过分析误差信号来选择更新向量,使得算法的更新方向尽可能接近 Newton 方向。基于此方法,给出一种方向优化 LMS(Direction Optimization LMS, DOLMS)算法,并推广到变步长 DOLMS 算法。理论分析与仿真结果表明,该方法与传统分块 LMS 算法相比,有更快的收敛速度和更小的计算复杂度。

关键词: 自适应滤波; 最小均方算法; 方向优化; 最小均方球; 方向优化最小均方算法

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)06-1348-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.01038

A Direction Optimization Least Mean Square Algorithm

Li Xiao-jian Wang Yong Chen Shao-qing Fu Zhi-hao

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: The update vector of Least Mean Square (LMS) algorithm is an estimation of the gradient vector, thus its convergence rate is limited by the method of steepest descent. Based on the discussion of basic LMS, a direction optimization method of LMS algorithm is proposed in order to get rid of this speed constraint. In the proposed method, the closest update vector to the Newton direction is chosen based on the analysis of the error signal. Based on the method, a Direction Optimization LMS (DOLMS) algorithm is proposed, and it is extended to the variable step-size DOLMS algorithm. The theoretical analysis and the simulation results show that the proposed method has higher speed of convergence and less computational complexity than traditional block LMS algorithm.

Key words: Adaptive filter; Least Mean Square (LMS) algorithm; Direction optimization; Least Mean Square (LMS) ball; Direction Optimization Least Mean Square (DOLMS) algorithm

1 引言

最小均方算法(Least Mean Square, LMS)是1960年由Widrow和Hoff提出,因结构简单、稳定性好、易于实现,一直是自适应滤波中的经典算法之一。为了改善LMS算法^[1,2]的性能,人们提出了大量的改进算法,其中应用较为广泛的有归一化LMS(Normalized LMS, NLMS)^[3-5]算法,块LMS(Block LMS, BLMS)算法^[6]以及变步长LMS算法^[7-14]。然而此类算法由于受到LMS算法理论本身的限制,都是最速下降法的梯度估计算法,因此,此类算法的收敛速度均受到最速下降法的约束^[1,4]。

为了优化算法的收敛路径,人们提出了以Newton方向为算法估计方向的LMS-Newton算法^[15,16]。对于基本FIR(Finite Impulse Response)滤波器而言,自适应算法的梯度函数为二阶函数,此时Newton方向就是一步最优方向(由当前滤波器参

数直接指向最优滤波器参数的向量方向)。LMS-Newton算法具有较快的收敛速度,但同时因算法更新时含有矩阵求逆运算,具有算法计算量大、结构复杂等缺点。

本文分析了LMS收敛原理,提出了新的LMS分块计算方法。新方法选择数据块中最接近Newton方向的更新向量进行更新,无论是收敛速度还是计算量都远优于BLMS的分块方法。基于此方法提出了一种方向优化LMS(Direction Optimization LMS, DOLMS)算法及其相应的变步长算法。DOLMS算法不受最速下降法自身收敛速度的限制,能够更快地收敛到最优点。该算法更新向量的计算公式形式与NLMS完全相同,因此适用于NLMS的变步长优化方法对该算法同样适用。DOLMS算法只是选择其中一个更新向量进行算法更新,省去了求取平均值的过 程,因此算法复杂度较BLMS算法而言有了极大的简化。通过仿真分析了DOLMS算法的特性,而后与其它算法进行了比较,仿真结果说明该算法对变步长LMS算法能起到同样的优化作用。

2013-07-16 收到, 2014-01-17 改回

国家863计划项目(2011AA7034056C)资助课题

*通信作者: 王永 yongwang@ustc.edu.cn

2 LMS 算法及其收敛特性分析

2.1 LMS 算法及分块 LMS 算法简介

LMS 算法是一种随机梯度算法。它以系统均方误差为代价函数，利用随机估计值代替最速下降法中的梯度向量，在统计意义上以最速下降方向收敛到 Wiener 解。算法结构如图 1 所示。

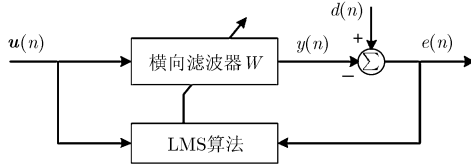


图 1 LMS 算法结构图

LMS 算法的目的是通过调整横向滤波器系数 W 使得系统均方误差达到最小，其代价函数为

$$J = E[e(n)^2] \quad (1)$$

LMS 算法权值更新向量为

$$\Delta \mathbf{W}(n) = \mu e(n) \mathbf{u}(n) \quad (2)$$

LMS 更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \Delta \mathbf{W}(n) \quad (3)$$

其中， $\mathbf{u}(n)$ 为 n 时刻系统输入向量 $[u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T$ ， $d(n)$ 为 n 时刻期望响应， $y(n)$ 为 n 时刻自适应滤波器输出， $e(n)$ 为 n 时刻系统估计误差， $\mathbf{W}(n)$ 为 n 时刻横向滤波器权值， μ 为算法步长因子。

由式(2)可以看出，由于 $e(n)$ 为标量，LMS 算法的权值更新向量 $\Delta \mathbf{W}(n)$ 的方向仅由输入向量 $\mathbf{u}(n)$ 的方向所决定，而 $\mathbf{u}(n)$ 方向由输入信号决定，往往不能人为控制。因此 LMS 算法单步更新方向并非最速下降方向，只能保证更新向量是最速下降方向的非偏估计，故 LMS 算法是一种随机梯度算法^[1]。

为了优化算法步长，NLMS 算法被提出，更新向量为

$$\Delta \mathbf{W}(n) = \frac{\mu e(n) \mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \quad (4)$$

为了更加准确地对最速下降方向进行估计，BLMS 算法被提出，更新向量为

$$\Delta \mathbf{W}(n) = \frac{\mu}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e(nL+i) \mathbf{u}(nL+i) \quad (5)$$

其中， L 为分块长度。

BLMS 算法的基本思想是通过增加样本数使得对最速下降方向的估计更加准确，因此增加分块长度 L 只能增加估计的准确性，其收敛速度受最速下降法约束不会有明显加快。

2.2 LMS 单步更新方向与更新向量的关系

如上所述，LMS 算法是一种随机梯度算法，其算法的更新方向是随机的。本文分析了其权值更新向量 $\Delta \mathbf{W}(n)$ 与输入向量 $\mathbf{u}(n)$ 的关系，发现当忽略系统参数收敛到最优值时的最优估计误差后，两者呈现出球函数关系。

已知系统输入信号为平稳过程，则 LMS 算法可以收敛到 Wiener 解为 \mathbf{W}^* 。令权向量取 \mathbf{W}^* 时的系统估计误差为最优估计误差，记为 $e^*(n)$ 。设 $\mathbf{i}^*(n)$ 为 $\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)$ 的单位方向向量； $\mathbf{i}_u(n)$ 为输入向量 $\mathbf{u}(n)$ 的单位方向向量。有如下定理：

定理 1(LMS 球定理) 假设最优估计误差 $e^*(n)$ 为零，LMS 权值更新向量可写成球的极坐标函数形式：

$$\Delta \mathbf{W}(n) = 2R(n) \cos \theta(n) \mathbf{i}_u(n) \quad (6)$$

其中， $R(n) = \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{u}(n)\|^2 \|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)\|$ ； $\cos \theta(n) = \mathbf{i}^*(n) \cdot \mathbf{i}_u(n)$ ， $\theta(n)$ 为 $\mathbf{i}^*(n)$ 与 $\mathbf{i}_u(n)$ 的夹角，其范围为 $0^\circ \sim 180^\circ$ 。更新向量 $\Delta \mathbf{W}(n)$ 的取值均在以 $\mathbf{D}(n) = 2R(n) \mathbf{i}^*(n)$ 为直径的球上，将此球称为 LMS 球。

证明 LMS 自适应滤波器的系统估计误差可写为

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - (\mathbf{W}^*)^T \mathbf{u}(n) + [\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{u}(n) \\ &= e^*(n) + [\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{u}(n) \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)代入式(2)可得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}(n) &= \mu \left\{ e^*(n) + [\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{u}(n) \right\} \mathbf{u}(n) \\ &= \mu \|\mathbf{u}(n)\|^2 \left\{ \frac{e^*(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|} + [\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{i}_u(n) \right\} \cdot \mathbf{i}_u(n) \end{aligned} \quad (8)$$

由定理假设可知， $\frac{e^*(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|}$ 为零，故可将式(8)简化为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}(n) &= \mu \|\mathbf{u}(n)\|^2 \|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)\| (\mathbf{i}^*(n) \cdot \mathbf{i}_u(n)) \mathbf{i}_u(n) \\ &= 2R(n) (\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}_u(n)) \mathbf{i}_u(n) \\ &= 2R(n) \cos \theta(n) \cdot \mathbf{i}_u(n) \end{aligned} \quad (9)$$

证毕

球函数定理给出了 LMS 球的极坐标表示形式，该球体的半径为 $R(n)$ ， $\mathbf{i}^*(n)$ 为原点(原点为球上一点)指向球心的方向。为了更直观地说明，考虑横向滤波器的维数为 2 这一特殊情况，此时 LMS 球为一个圆，如图 2 所示。

假设第 n 时刻，系统的输入向量可能为 $\mathbf{u}_1(n)$ 和 $\mathbf{u}_2(n)$ 且有 $\|\mathbf{u}_1(n)\| = \|\mathbf{u}_2(n)\|$ ，图中给出了方向向量

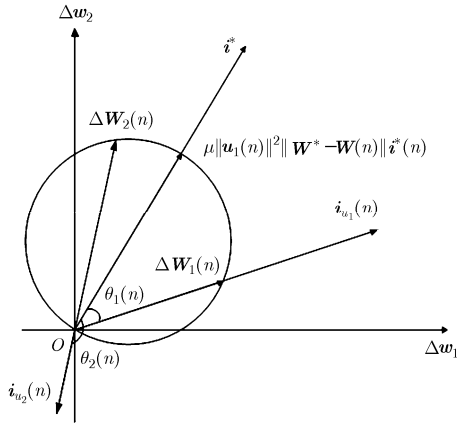


图2 2维 LMS 球示意图

i_{u_1}, i_{u_2} 与系统更新向量 $\Delta \mathbf{W}_1(n), \Delta \mathbf{W}_2(n)$ 之间的关系。显然,更新向量 $\Delta \mathbf{W}_2(n)$ 比 $\Delta \mathbf{W}_1(n)$ 更接近一步最优方向,此时有 $|\cos \theta_1(n)| < |\cos \theta_2(n)|$, 将其称为 $\Delta \mathbf{W}_2(n)$ 的方向优于 $\Delta \mathbf{W}_1(n)$ 。

从图2可以直观地看出, LMS 球的直径方向为一步最优方向 $i^*(n)$, 其半径长度是由算法步长因子 μ , 输入向量的模长 $\|\mathbf{u}(n)\|$ 以及当前点距最优点的距离 $\|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n)\|$ 三者共同确定。需要注意的是, 随着 LMS 算法的不断更新, 无论一步最优方向还是确定半径长度的三要素都是不断变化的, 因此 LMS 球也是不断变化的。

2.3 分块归一化 LMS 算法的方向优化

通过图2不难看出, 当 LMS 算法更新向量的方向越接近一步最优方向 $i^*(n)$ 时, 系统的更新向量模长越长, 更新方向越好。通过分块更新和归一化处理的方法, 可以保证在一个数据块中 LMS 球是不变的, 此时可以通过比较更新向量模长进行方向寻优。

基于上述分析本文提出了一种针对分块归一化 LMS 算法的方向优化方法。首先对系统进行分块处理, 假设一个数据块长度为 L , 将该数据块表示为 $A(k) = \{(e(L \cdot k), \mathbf{u}^T(L \cdot k)), (e(L \cdot k + 1), \mathbf{u}^T(L \cdot k + 1)), \dots, (e(L \cdot k + L - 1), \mathbf{u}^T(L \cdot k + L - 1))\}$ 。

将每一组数据代入式(4), 可以计算得出与之对应的归一化更新向量为

$$\Delta \mathbf{W}_i(k) = \frac{\mu e(kL + i) \mathbf{u}(kL + i)}{\mathbf{u}^T(kL + i) \mathbf{u}(kL + i)} \quad (10)$$

根据前面的分析可知, $\{\Delta \mathbf{W}_i(k) | i = 0, 1, \dots, L - 1\}$ 中的所有更新向量在同一个 LMS 球上, 该球直径为 $D(k) = \mu \|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(k)\| i^*(k)$ 。为了判断更新向量方向的优劣, 给出如下定理:

定理 2 假设最优估计误差为零。分块归一化 LMS 算法更新向量 $\Delta \mathbf{W}_a(k)$ 的方向优于 $\Delta \mathbf{W}_b(k)$ 的充要条件为

$$\frac{e^2(kL + a)}{\mathbf{u}^T(kL + a) \mathbf{u}(kL + a)} > \frac{e^2(kL + b)}{\mathbf{u}^T(kL + b) \mathbf{u}(kL + b)} \quad (11)$$

其中, $a, b \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$ 。

证明 更新向量 $\Delta \mathbf{W}_a(k)$ 的方向优于 $\Delta \mathbf{W}_b(k)$ 的充分必要条件为前者的更新方向与一步最优方向的夹角小于后者, 即 $|\cos \theta_a(k)| > |\cos \theta_b(k)|$, 等价于

$$(\cos \theta_a(k))^2 > (\cos \theta_b(k))^2 \quad (12)$$

其中, $\theta_a(k)$ 和 $\theta_b(k)$ 分别为 $\mathbf{u}(kL + a), \mathbf{u}(kL + b)$ 与最优方向的夹角。对式(7)进行变换, 舍去最优估计误差, 可得

$$\frac{e(kL + i)}{\|\mathbf{u}(kL + i)\|} = \|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(k)\| (\mathbf{i}^*(k) \cdot \mathbf{i}_u(kL + i)) \quad (13)$$

其中, 等式左边为系统的归一化误差, 式(13)还可写成

$$\cos \theta_i(k) = \frac{e(kL + i)}{\|\mathbf{u}(kL + i)\| \|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(k)\|} \quad (14)$$

只需将式(14)代入式(12), 约去 $\|\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(k)\|$, 便可得式(11), 即式(11)与式(12)等价。证毕

显然, 定理 2 具有递推性, 因此很容易得到如下推论:

推论 假设最优估计误差为 $e^*(n)$ 为零。分块归一化 LMS 算法的更新向量 $\Delta \mathbf{W}_a(k)$ 为 $\{\Delta \mathbf{W}_i(k) | i = 0, 1, \dots, a, \dots, L - 1\}$ 中的方向最优更新向量, 其充分必要条件为

$$(e(kL + a), \mathbf{u}^T(kL + a)) = \arg \max_{(e, \mathbf{u}^T) \in A(k)} \left(\frac{e^2}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \right) \quad (15)$$

3 方向优化 LMS(DOLMS)算法设计

上述分析为比较 LMS 算法的更新方向提供了依据, 也提供了一种新的 LMS 分块计算的方法。与 BLMS 不同, 新方法是通过对数据块中最优的更新向量进行更新, 因此摆脱了最速下降法收敛速度的约束, 具有更快的收敛速度。

本文据此提出一种分块更新的方向优化 LMS 算法——DOLMS(Direction Optimization LMS)算法。算法的基本思路为: 记录 L 组误差信号和对应的输入向量, 利用定理 2 的推论筛选出其中一组数据, 生成该更新向量对横向滤波器进行更新。为了减小算法稳态误差, 引入变步长方法对算法进行优化。

3.1 算法结构

DOLMS 算法结构与分块 LMS 算法类似, 其结构如图 3 所示。

将系统的输入向量 $\mathbf{u}(n)$ 与其对应的误差 $e(n)$ 进行存储。每 L 组信息为一块, 选取其中归一化误差平方最大者作为更新信息, 形成更新向量对算法进

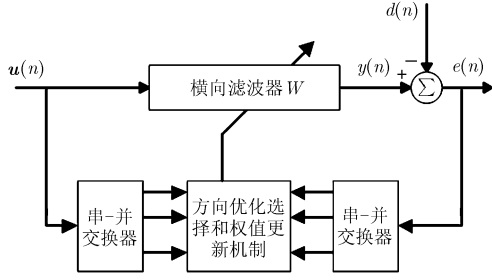


图 3 DOLMS 算法结构图

行更新。之后，存储空间清空，重新开始存储新的输入向量与误差。

根据定理 2 推论选取更新所需的误差和输入向量：

$$(e_m(k), \mathbf{u}_m^T(k)) = \arg \max_{(e, \mathbf{u}^T) \in A(k)} \left(\frac{e^2}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \right) \quad (16)$$

其中， $A(k) = \{(e(L \cdot k), \mathbf{u}^T(L \cdot k)), (e(L \cdot k + 1), \mathbf{u}^T(L \cdot k + 1)), \dots, (e(L \cdot k + L - 1), \mathbf{u}^T(L \cdot k + L - 1))\}$ 。

则更新向量为

$$\Delta \mathbf{W}(k) = \frac{\mu e_m(k) \mathbf{u}_m(k)}{\mathbf{u}_m^T(k) \mathbf{u}_m(k)} \quad (17)$$

算法步长因子的取值范围与归一化 LMS 算法相同。

$$0 < \mu < 2 \frac{\mathbb{E}[\xi_u(n)e(n)/\|\mathbf{u}(n)\|^2]}{\mathbb{E}[|e(n)|^2/\|\mathbf{u}(n)\|^2]} \quad (18)$$

最优步长参数^[1,4]为

$$\mu_{\text{opt}} = \frac{\mathbb{E}[\xi_u(n)e(n)/\|\mathbf{u}(n)\|^2]}{\mathbb{E}[|e(n)|^2/\|\mathbf{u}(n)\|^2]} \quad (19)$$

其中 $\xi_u(n)$ 为系统无干扰误差信号，定义为： $\xi_u(n) = (\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(n))^H \mathbf{u}(n)$ 。

为了保证系统稳态误差，算法还可以采用文献 [8] 所提出的变步长方法，形成变步长 DOLMS 算法。变步长为

$$\mu(k) = \beta(1 - \exp(-\alpha |e_m(k)|^\gamma)) \quad (20)$$

其中， β 控制步长的取值范围， α, γ 控制变步长函数形状。

3.2 算法流程

DOLMS 的算法流程如下：

步骤 1 初始化横向滤波器系数 W ，初始化数据块长度 L ，初始化变步长参数 α, β, γ 。

步骤 2 将最优误差 e_m ，最优输入向量 \mathbf{u}_m^T ，最优归一化误差平方 e_{mm}^2 清零，将计数器 i 清零。

步骤 3 采集新一组数据 $e_{\text{new}}, \mathbf{u}_{\text{new}}^T$ ，计算归一化误差平方 $e_n^2(i) = e_{\text{new}}^2 / (\mathbf{u}_{\text{new}}^T \mathbf{u}_{\text{new}})$ ，将其与 e_{mm}^2 进行比较：如 e_{mm}^2 较大，则不进行操作；反之，令

$$e_m = e_{\text{new}}, \mathbf{u}_m^T = \mathbf{u}_{\text{new}}^T, e_{mm}^2 = e_n^2(i)。$$

步骤 4 计数器 i 加 1，判断 i 是否等于 L ：如不等，则跳转至步骤 3；反之，继续。

步骤 5 通过将 e_m 代入式 (20) 进行计算得到此时的步长因子 μ ，计算更新向量 $\Delta \mathbf{W} = (\mu e_{mm}^2 / e_m) \mathbf{u}_m$ ，利用式 (3) 对横向滤波器进行更新。跳转至步骤 2，继续循环，进行下一个块运算。

3.3 算法特性理论分析

下面对于 DOLMS 的特点及其原因进行分析。

(1) 算法步长 比较式 (4) 与式 (17)，可以发现变步长 NLMS 算法与 DOLMS 算法的更新公式完全相同，因此 DOLMS 算法的每次更新与 NLMS 算法的更新并无本质上的不同。DOLMS 算法同样具有步长因子越小、更新越慢、稳态误差越小的特点，且一些适用于 NLMS 的变步长 LMS 算法^[6-9]可直接用于 DOLMS 算法。

(2) 块长度与收敛速度的关系 DOLMS 虽然分块进行计算，但与 BLMS 算法相比，其分块的目的并不相同。对于一般分块 LMS 算法，分块是为了更加准确地估计最速下降方向，增加块长度只能使最速下降方向估计更为准确，其收敛速度受更新方向约束不会加快。然而 DOLMS 算法进行分块是为了寻找更加接近一步最优方向的更新向量。对于输入为周期信号^[17]而言，当块长度等于信号周期，此时 DOLMS 算法的收敛速度达到最大，增加块长度对算法收敛速度不会有影响。而对于非周期信号而言，随着块长度的增加，其最终选取的更新方向会更为接近一步最优方向，收敛速度也会越快，此时算法存在通过一步更新达到最优值的可能性。

(3) 稳态误差 由于该算法取归一化误差平方值最大项进行更新，故当系统输出误差信号存在测量噪声时，此种更新方法会放大噪声对系统更新的影响。特别是在最优点附近，此时输出误差信号的信噪比低，归一化误差的大小更多取决于测量误差而非更新方向，因此 DOLMS 算法的稳态误差会略大于相同变步长的 NLMS 算法。

(4) 算法复杂度 此处为了展现 DOLMS 算法复杂度，将其与分块归一化 LMS 算法、BLMS 算法进行比较。

首先考察 DOLMS 算法复杂度。算法步骤 3 需要在每个采样周期计算归一化误差平方，故计算归一化误差的复杂度为 $M+2$ 。比较归一化误差平方时，不需要进行乘法运算，复杂度为 0。算法步骤 5 在每一块只需进行一次更新向量的运算，如式 (17)，其中向量模长平方已经在归一化误差计算中求得；故更新向量计算复杂度为 $M+2$ 。一个分块周期内算

法总体复杂度为： $L(M+2)+M+2=(L+1)(M+2)$ 。

需要注意的是，DOLMS 算法计算量主要用于计算输入向量模长平方。该计算可以通过记录每次输入值平方进行简化计算，这样每次计算输入向量模长平方只需计算最新的输入值平方，再与之前记录数据求和即可。因此步骤 3 的计算复杂度可以简化为 3。DOLMS 算法的整体复杂度就能得到了极大的简化，在一个分块周期内的计算复杂度为 $3L+M+2$ 。

DOLMS 与其它算法的复杂度比较如表 1 所示。

表 1 算法复杂度比较

算法名称	DOLMS	DOLMS (简)	分块归一化 LMS	BLMS
复杂度	$(L+1) \times (M+2)$	$3L+M+2$	$L(2M+1)+M+1$	$(L+1)M+1$

从表 1 可以看出，DOLMS 算法的复杂度低于分块归一化 LMS 算法，略高于 BLMS 算法。而简化后的 DOLMS 算法复杂度则远小于另外两种算法。

4 算法比较与仿真

为了验证 DOLMS 算法的有效性，下面对算法进行仿真，并与归一化块 LMS 算法^[18]，BLMS 算法^[8]进行比较。仿真将采用以下两种系统模型。

模型 1 (1)假设未知系统为 5 阶横向滤波器，其抽头向量为 $\mathbf{W}^*=[-2, 0, 5, -3, 1]$ ；(2)输入信号为均值为 0，方差为一白噪声通过一个二阶 AR 过程所产生的有色噪声信号；(3)误差测量端加入与输入端无关的高斯白噪声，其均值为 0，方差为 0.01。

模型 2 (1)假设未知系统为二阶横向滤波器，其初始抽头向量为 $\mathbf{W}^*=[3, -3]$ ，在更新 5000 次后改为按正弦变化的慢时变系统；(2)输入信号为正弦信号，均值为 0，幅值为 1，频率为采样频率的 1/17；(3)误差测量端加入与输入端无关的高斯白噪声，其均值为 0，方差为 0.001。

4.1 算法特性分析

DOLMS 算法随着块长度的增加，所选取的更新方向会更为接近一步最优方向，收敛速度会随着块长度的增加而变快。分别以 $L=5$ ， $L=50$ ， $L=250$ 作为块长度，利用 DOLMS 对模型 1 进行仿真试验，统一选取步长因子为 $\mu=1$ 。重复试验 25 次，取块平均误差均值的对数作为纵坐标，以更新次数作为横坐标，如图 4 所示。由图 4 可以看出，块长度越长其更新速度越快，但同时稳态误差也会随之变大。

同时与大多数 LMS 算法相同，在块长度不变的

情况下，步长因子越小，收敛速度越慢但稳态误差会变小。选取 $L=10$ 作为块长度，分别以 $\mu=1.0$ ， $\mu=0.5$ ， $\mu=0.1$ 作为步长因子，利用方向优化 LMS 对模型 1 进行仿真试验，其结果如图 5 所示。由图 5 可以看出，随着步长因子的增加，算法的稳态误差随之增大，而收敛速度也随之提高。

4.2 算法仿真比较

统一选取算法步长为 10，分别利用方向优化 LMS，分块归一化 LMS，BLMS 对模型 1 进行仿真试验。其中方向优化 LMS，分块归一化 LMS 的步长为 1.00；BLMS 算法步长因子取 0.09 时，算法收敛不平稳会出现大量尖峰，因此选取 0.08 作为 BLMS 算法最优步长进行比较。所得结果如图 6 所示。由图 6 可以看出 DOLMS 的收敛速度快于分块 NLMS 算法和 BLMS 算法，但其稳态误差有明显增大。

选取文献[8]所给出的变步长 BLMS 算法^[8](VSSBLMS 算法)，将其变步长公式同时应用于方向优化 LMS，分块归一化 LMS，BLMS，利用改进后的算法对模型 1 进行仿真实验。实验结果如图 7 所示。其中各个算法变步长公式为：方向优化 LMS： $\mu(k)=1-e^{-20e_{av}^2(k)}$ ；分块归一化 LMS： $\mu(k)=1-e^{-20e_{av}^2(k)}$ ；BLMS： $\mu(k)=0.08(1-e^{-20e_{av}^2(k)})$ ；其中 $e_{av}(k)=(1/L)\sum_{i=0}^{L-1}|e(kL+i)|$ 。

通过上述比较可知，DOLMS 算法的收敛速度明显快于分块归一化 LMS 算法和 BLMS 算法，其稳态误差经过变步长优化后与同样经过变步长优化后的分块 NLMS 和 BLMS 基本相同。由此可看出，对于当前存在大量的变步长 LMS 算法，DOLMS 算法可直接对其进行再次优化。优化后的变步长 DOLMS 的收敛速度较之原变步长 LMS 算法而言，其收敛速度有较大提升同时稳态误差有轻微的增大。

对于输入信号为有色信号的 LMS 自适应算法而言，以最速下降方向为收敛方向往往会导致自适应滤波器权值在接近最优值时收敛速率会不断减慢；这种特性在输入信号为正弦信号时极为明显。基于这种现象，设计出了模型 2，将上述 3 种变步长 LMS 算法应用于模型 2，进行仿真实验，结果如图 8 所示。

图 8 为二阶自适应滤波器参数学习曲线，变步长分块归一化 LMS 算法和 VSSBLMS 算法相当明显地越接近最优值时收敛速度越慢，而 DOLMS 算法则没有这种特征，在极短时间内就收敛到了最优值 $\mathbf{W}^*=[3, -3]$ 。而在系统为慢时变系统时，DOLMS 算法与另外两种算法相比，可以更快地跟上系统的参数变化。

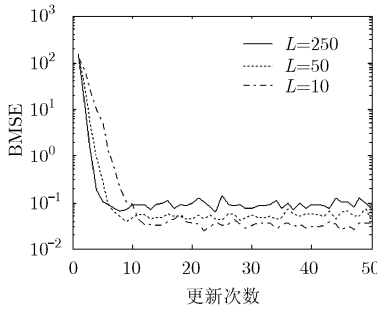


图 4 块长度对 DOLMS 的影响

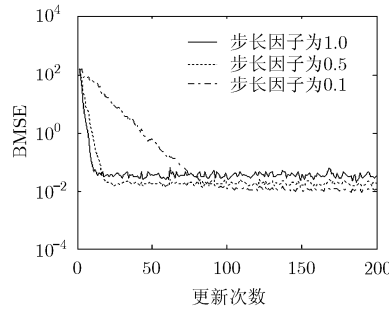


图 5 步长因子对 DOLMS 的影响

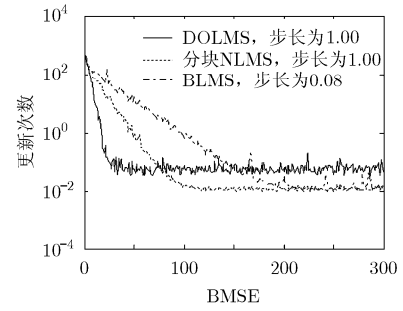


图 6 定步长算法比较图

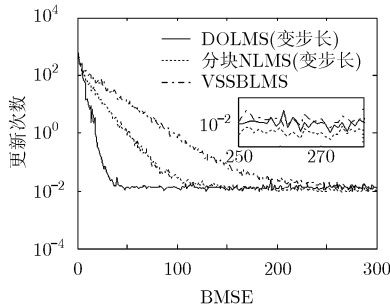


图 7 变步长算法比较图

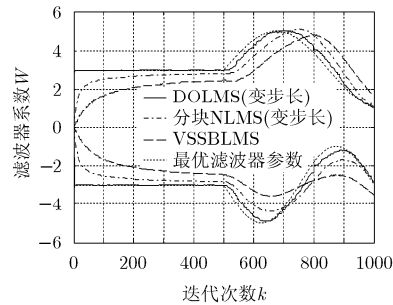


图 8 滤波器系数学习曲线

5 结束语

当 LMS 算法及其改进算法以有色信号作为输入时，其收敛方向为对最速下降方向的估计这一特性，不仅限制了算法步长的选择，同时也限制了算法的收敛速度。本文提出了一种针对分块 LMS 算法的方向优化方法，并给出了该方法的理论依据。该方法通过分析误差信号选择最接近一步最优方向的更新向量进行算法更新，摆脱了最速下降法的约束。以此方法为基础提出了 DOLMS 算法，将 DOLMS 算法与分块 NLMS, BLMS 算法进行了比较。比较结果表明，DOLMS 算法有更快的收敛速度和更小的计算复杂度。且 DOLMS 算法可以与 LMS 算法的变步长方法同时使用，在保证收敛速度的基础上优化稳态误差。同时，算法块长度越长收敛速度越快的特点适用于自适应滤波器系数不方便频繁变动的情况，使得每次更新更加有效。

参考文献

[1] Hayin S. Adaptive Filter Theory[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 70-267.
 [2] Butterweck H J. Steady-state analysis of the long LMS adaptive filter[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(4): 690-701.
 [3] Duttweiler D L. Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers[J]. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 2000, 8(5): 508-518.
 [4] 曾召华, 刘贵忠, 赵建平. LMS 和归一化 LMS 算法收敛门限

与步长的确定[J]. *电子与信息学报*, 2003, 25(11): 1469-1474.
 Zeng Zhao-hua, Liu Gui-zhong, and Zhao Jian-ping. Determining of convergent threshold and step-size for LMS and normalized LMS algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2003, 25(11): 1469-1474.
 [5] Borisagar K R, Sedani B S, and Kulkarni G R. Simulation and performance analysis of LMS and NLMS adaptive filters in non-stationary noisy environment[C]. *International Conference on Computational Intelligence and Communication Systems*, Gwalior, 2011: 682-686.
 [6] Feuer A. Performance analysis of the block least mean square algorithm[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1985, CAS-32(9): 960-963.
 [7] 吕春英, 敖伟, 张洪顺. 一种新的变步长 LMS 算法[J]. *通信技术*, 2011, 44(3): 11-14.
 Lü Chun-ying, Ao Wei, and Zhang Hong-shun. A new variable step-size LMS algorithm[J]. *Communications Technology*, 2011, 44(3): 11-14.
 [8] 肖海英, 何方白. 一种时域变步长 BLMS 自适应算法[J]. *西南科技大学学报*, 2006, 21(2): 30-35.
 Xiao Hai-ying and He Fang-bai. A variable step size BLMS adaptive algorithm in time domain[J]. *Journal of Southwest University of Science and Technology*, 2006, 21(2): 30-35.
 [9] 曲庆, 金坚, 谷源涛. 用于稀疏系统辨识的改进 l_0 -LMS 算法[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(3): 604-609.
 Qu Qing, Jin Jian, and Gu Yuan-tao. An improved l_0 -LMS algorithm for sparse system identification[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(3): 604-609.

- [10] Bismor D. LMS algorithm step size adjustment for fast convergence[J]. *Archives of Acoustics*, 2012, 37(1): 31-40.
- [11] Mayyas K. A variable step-size selective partial update LMS algorithm[J]. *Digital Signal Processing*, 2013, 23(1): 75-85.
- [12] Cai Wei-ju. A new variable step size LMS adaptive filtering algorithm and its analysis[J]. *Advanced Materials Research*, 2013, 605(2013): 2193-2196.
- [13] Ao Wei, Xiang Wan-qin, Zhang You-peng, *et al.*. A new variable step size LMS adaptive filtering algorithm[C]. International Conference on Computer Science and Electronics Engineering ICCSEE, Hangzhou, 2012, 2: 265-268.
- [14] Mayyas K and Momani F. An LMS adaptive algorithm with a new step-size control equation[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348(4): 589-605.
- [15] Diniz P S R, de Campos M L R, and Antoniou A. Analysis of LMS-Newton adaptive filtering algorithms with variable convergence factor[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(3): 617-627.
- [16] Lian Rui-mei. An improved LMS-Newton algorithm and its analysis[C]. International Conference on Mechanical and Electronics Engineering, Hefei, 2011: 458-462.
- [17] Parra I E, Hernandez W, and Fernandez E. On the convergence of LMS filters under periodic signals[J]. *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 2013, 23(3): 808-816.
- [18] 魏璀璨, 王永, 陈绍青, 等. 磁悬浮隔振器分块归一化LMS算法控制研究[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(18): 100-103.
- Wei Cui-can, Wang Yong, Chen Shao-qing, *et al.*. Control of an electromagnetic suspension vibration isolator based on block normalized LMS algorithm[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(18): 100-103.
- 李霄剑: 男, 1990年生, 硕士生, 研究方向为自适应滤波、振动主动控制.
- 王永: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为振动主动控制、飞行器制导与控制等.
- 陈绍青: 男, 1985年生, 博士, 研究方向为自适应滤波、振动主动控制等.