

## 基于含噪复值 ICA 信号模型的快速不动点算法

阮宗利<sup>\*①②</sup> 李立萍<sup>①</sup> 钱国兵<sup>①</sup> 罗明刚<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(电子科技大学电子工程学院 成都 611731)

<sup>②</sup>(中国石油大学(华东)理学院 青岛 266580)

**摘要:** 复数快速不动点算法亦称为复数 FastICA 算法, 是盲信号分离的一类重要算法。然而, 该算法对被噪声污染的混合源的分离效果较差, 尤其是在低信噪比的情况下。这主要是由于在噪声环境下, 被白化过后的信号样本的相关矩阵不再是单位阵而是一个对角矩阵。该文基于复信号快速不动点算法, 首先将基于含噪复值 ICA 信号模型的混合源投影到信号子空间, 以便进行去噪和去相关处理, 然后对现有的复数 FastICA 算法的学习规则做了修正, 从而在迭代更新过程中考虑了噪声的影响, 因此将显著提高复数 FastICA 算法的盲信号分离性能。文中给出了去噪非圆信号 nc-FastICA 算法的推导和步骤, 仿真结果说明了该算法的有效性。

**关键词:** 独立分量分析; 复数快速不动点算法; 圆信号; 非圆信号; 去噪

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)05-1094-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00951

## Fast Fixed-point Algorithm Based on Complex ICA Signal Model with Noise

Ruan Zong-li<sup>\*①②</sup> Li Li-ping<sup>①</sup> Qian Guo-bing<sup>①</sup> Luo Ming-gang<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Engineering, University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

<sup>②</sup>(College of Science, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

**Abstract:** The complex fast fixed-point algorithm, also called complex FastICA, is one of the most important algorithms for Blind Signal Separation (BSS). However, the performance of this algorithm deteriorates when it is used to separate the noisy mixed sources, especially in the low SNR case, since the covariance matrix of whitened observations is not an identity matrix but a diagonal matrix. This paper bases on the present complex FastICA. First, the mixed sources defined with complex Independent Component Analysis (ICA) signal model are projected onto the signal subspace. Thus, the denoising and decorrelating from mixed signal samples can be handily achieved. Then, the learning rule of the algorithm is modified, where the effect of white Gaussian noise is taken into account. Therefore, the BSS performance of complex FastICA is improved markedly. In this paper, the learning rule of denoised noncircular FastICA (nc-FastICA) is derived and the detailed procedure is given. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Independent Component Analysis (ICA); Complex fast fixed-point algorithm; Circular signal; Noncircular signal; Denoise

### 1 引言

独立分量分析 (Independent Component Analysis, ICA) 是上个世纪 90 年代发展起来的一种盲信号处理方法<sup>[1]</sup>, 主要用于盲源分离 (Blind Source Separation, BSS)。经过 20 多年的探索研究, ICA 已在理论上获得重要发展, 并在音频信号处理、图像信号处理、阵列信号处理、生物医学信号处理、数字通信等方面都有很好的应用<sup>[2-7]</sup>。

快速不动点算法 (fast fixed-point algorithm), 因其收敛的高速性也被称为 FastICA<sup>[8]</sup>, 是经典的 ICA 算法之一。Bingham 等人<sup>[9,10]</sup> 在 2000 年提出的复值信号的快速不动点算法将 FastICA 算法从实数域推广到复数域, 但该算法仅局限于圆信号处理, 因此被称为 c-FastICA 算法。Novey 等人<sup>[11]</sup> 在 2008 年对该算法进行了扩展, 使之能处理非圆信号, 这就是著名的 nc-FastICA。复数 FastICA 可应用于无线通信、雷达、磁共振成像等方面的数据分析中<sup>[12-14]</sup>。

然而, 目前并没有能够较好处理噪声 ICA 模型

2013-07-01 收到, 2013-10-18 改回

\*通信作者: 阮宗利 RuanZL0496@sina.com

的复数快速不动点算法。张和发等人<sup>[5]</sup>在2011年对nc-FastICA算法做了修正,并将之用于提取微弱信号,然而其主要是在算法过程的白化步骤中进行了去噪处理,效果不佳。本文提出了去噪复数FastICA算法,对噪声复数ICA模型的FastICA算法的学习规则做了改进,起到了较好的去噪作用,使得分离效果有显著提高。

## 2 ICA信号模型及复数FastICA算法

### 2.1 复随机变量及其统计量

复随机变量 $x$ 定义为两个实随机变量 $x^R$ 和 $x^I$ 的组合,即 $x = x^R + jx^I \in \mathbb{C}, x^R, x^I \in \mathbb{R}$ ,其均值定义为 $E\{x\} = E\{x^R\} + jE\{x^I\}$ ,两个复随机变量 $x_1$ 和 $x_2$ 的不相关性定义为 $E\{x_1 x_2^*\} = E\{x_1\}E\{x_2^*\}$ ;复随机向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{C}^N$ 的协方差矩阵定义为 $\text{cov}(\mathbf{x}) = E\{(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})^H\}$ ,伪协方差矩阵定义为 $\text{pcov}(\mathbf{x}) = E\{(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})^T\}$ ;如果 $\text{pcov}(x_i) = 0$ ,则称 $x_i$ 是二阶圆的,否则是非圆的。复随机变量及其圆与非圆性的更详细的描述可以参见文献[16,17]。

### 2.2 复数ICA信号模型

经典的复数ICA信号模型为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (1)$$

其中,列向量 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_M]^T \in \mathbb{C}^M$ 表示未知的源信号,列向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{C}^N$ 表示观测信号, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ 是未知的混合矩阵。因此,ICA信号模型中得到的观测信号通常是源信号的线性组合。

该模型可辨识一般要求满足以下条件:(1)各未知信源 $s_i$ 彼此统计独立;(2) $s_i$ 中至多只有1个是服从复高斯分布的;(3)观测向量维数应不小于盲源向量维数,即 $N \geq M$ ;(4)线性混合矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ 是列满秩的,即 $\text{rank}(\mathbf{A}) = M$ 。

不失一般性,假设源信号具有零均值和单位方差,即 $E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\} = \mathbf{I}$ 。如果源信号至多有一个高斯信号的,则通过ICA能分离出各源信号。

ICA的主要目标是寻找一个分离矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ,使变换后的各信号分量 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ 之间相互统计独立。顺便指出, $\mathbf{y}$ 作为信源 $\mathbf{s}$ 的估计量,一般存在幅度和顺序上的不确定性,只是这些不确定性是可接受的。

一般地,快速不动点算法首先要对观测数据进行白化处理,即

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{s} \triangleq \mathbf{\Phi}\mathbf{s} \quad (2)$$

使得 $E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} = \mathbf{I}$ 。这里 $\mathbf{V}$ 是白化矩阵, $E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} = \mathbf{\Phi}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}\mathbf{\Phi}^H = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^H = \mathbf{I}$ ,因此 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{V}\mathbf{A}$ 是酉矩阵。所以,ICA的目标变为要寻找一个酉矩阵 $\mathbf{W}^H$ 使得

$\mathbf{y} = \mathbf{W}^H\mathbf{z}$ 的各分量相互独立。对 $\mathbf{x}$ 的相关矩阵做特征值分解 $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H$ ,由 $E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} = \mathbf{V} \cdot E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ 知,白化矩阵可取为

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}_s^{-1/2}\mathbf{U}_s^H \quad (3)$$

其中, $\mathbf{\Lambda}_s$ 是由 $\mathbf{\Sigma}$ 中非零特征值所构成的对角矩阵, $\mathbf{U}_s$ 是由 $\mathbf{U}$ 中非零特征值对应的特征向量所构成的特征向量矩阵。这样,分离矩阵 $\mathbf{B}$ 可重写为

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^H\mathbf{V} \quad (4)$$

### 2.3 非圆复信号ICA的nc-FastICA算法

非圆复信号ICA模型中,伪协方差矩阵 $\text{pcov}(\mathbf{s}) \neq \mathbf{0}$ ,即 $E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\} \neq \mathbf{0}$ ,即各信源的实部和虚部的方差不相等,且不相关。nc-FastICA算法的代价函数<sup>[9,11]</sup>为

$$J(\mathbf{w}) = E\{G(|y|^2)\} = E\{G(|\mathbf{w}^H\mathbf{z}|^2)\} \quad (5)$$

其中 $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的非线性偶函数,常见形式有 $G_1(u) = \sqrt{a+u}$ , $G_2(u) = \lg(a+u)$ , $G_3(u) = 0.5u^2$ , $a$ 是任意常数,常取为0.1, $u$ 是任意变量, $\mathbf{w}$ 是 $M$ 维复值权向量且有约束 $|\mathbf{w}^H\mathbf{z}|^2 = 1$ , $\mathbf{y} = \mathbf{w}^H\mathbf{z}$ 。因此,产生如下优化问题:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \arg \max_{|\mathbf{w}^H\mathbf{z}|^2=1} E\{G(|\mathbf{w}^H\mathbf{z}|^2)\} \quad (6)$$

非圆复信号的快速不动点算法的学习规则为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_{n+1} &= E\{g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2)\}\mathbf{w}_n - E\{g(|y|^2)y^*\mathbf{z}\} \\ &\quad + E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\}E\{g'(|y|^2)y^{*2}\}\mathbf{w}_n^* \\ \mathbf{w}_{n+1} &= \mathbf{w}_{n+1}/\|\mathbf{w}_{n+1}\| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $g(u) = dG(u)/du$ , $g'(u) = dg(u)/du$ 。

上述更新规则收敛后得到某个信源的估计,要得到所有信源的估计,必须重复进行 $M$ 次迭代,得到 $M$ 个 $M$ 维复值权向量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M$ ,从而也就找到了酉矩阵 $\mathbf{W}^H = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M]$ 。为了避免不同的权向量收敛到相同的极值,从第2个权向量开始,需要对每次迭代得到的权向量 $\mathbf{w}_i (1 < i \leq M)$ 与 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$ 做去相关处理,通常采用Gram-Schmidt正交归一化过程来实现。

## 3 噪声复数ICA信号模型及去噪nc-FastICA算法

### 3.1 噪声复数ICA信号模型

具有噪声的复数ICA信号模型如下:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (8)$$

其中,列向量 $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T \in \mathbb{C}^N$ 为噪声向量,各噪声 $n_i, i = 1, 2, \dots, N$ 都是均值为零,方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声,相互独立,即 $E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \sigma^2\mathbf{I}$ ,噪声与各信源也相互独立;且噪声是圆的,即实部与虚部

不相关且具有相同的方差。为了估计噪声的方差，噪声复数 ICA 信号模型通常要求观测向量维数大于盲源向量维数，即  $N > M$ 。在理论上，观测向量维数越大越好。因为观测向量维数大了，噪声方差估计更准确，接收端包含的信息量更大。

类似于不含噪声的 ICA 模型，快速不动点算法也首先要对观测数据进行白化处理，但考虑到噪声，这里白化过程将不同于不含噪声的情形，需要对观测信号进行信号子空间与噪声子空间的分解<sup>[18]</sup>。对  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$  做特征值分解有

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{U}(\Sigma + \sigma^2\mathbf{I})\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^H \quad (9)$$

其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \text{diag}(\sigma_1^2 + \sigma^2, \sigma_2^2 + \sigma^2, \dots, \sigma_M^2 + \sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2)$ ， $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, M$  为信号子空间对应的特征值（假定特征值经过排序，即  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ），酉矩阵  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_N]$ 。理想情况下，信源数目  $M$  可以根据该特征谱的拐点来估计，同时估计出噪声方差  $\sigma^2$ ，但实际情况中，我们只能用样本的时间平均来得到  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$  的估计，这导致特征谱中  $N - M$  个较小的特征值  $\lambda_{M+1}, \dots, \lambda_N$  一般不相等，因此常采用 MDL, AIC 等方法来估计信源数目<sup>[10]</sup>。

假定已估计到信源数目  $M$ ，噪声方差可近似为  $\sigma^2 \approx (\lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N)/(N - M)$ ，信号子空间对应的特征值取为  $\sigma_i^2 = \lambda_i - \sigma^2, i = 1, 2, \dots, M$ ，信号的特征值矩阵及对应的特征向量矩阵分别记为  $\Lambda_s = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2)$  和  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M]$ ，噪声的特征向量矩阵记为  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{M+1}, \mathbf{u}_{M+2}, \dots, \mathbf{u}_N]$ 。这样，就得到了信号子空间的特征值及对应的特征向量，从而可得到如下伪白化矩阵：

$$\mathbf{V}_s = \Lambda_s^{-1/2}\mathbf{U}_s^H \quad (10)$$

此时，伪白化后的观测数据应表示为：

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}_s\mathbf{x}$$

由于  $E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^H\}$  是对角矩阵，但不是单位矩阵，故  $\mathbf{V}_s$  被称为伪白化矩阵。式(9)可重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H + \sigma^2\mathbf{I} = (\mathbf{U}_s\mathbf{U}_n) \begin{pmatrix} \Lambda_s & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \mathbf{U}_s\Lambda_s\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入  $E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^H\}$ ，并利用  $\mathbf{U}_s^H\mathbf{U}_s = \mathbf{I}_M$  ( $\mathbf{I}_M$  是  $M \times M$  单位矩阵)，易得：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q &= E\{\mathbf{V}_s\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{V}_s^H\} \\ &= \Lambda_s^{-1/2}\mathbf{U}_s^H(\mathbf{U}_s\Lambda_s\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{I})\mathbf{U}_s\Lambda_s^{-1/2} \\ &= \mathbf{I}_M + \sigma^2\Lambda_s^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

分析式(12)易知，当信噪比  $SNR$  很大即  $\sigma_i^2 \gg$

$\sigma^2 (i = 1, 2, \dots, M)$  时， $\sigma^2\Lambda_s^{-1}$  很小因而可以忽略，因此  $\mathbf{R}_q \approx \mathbf{I}_M$ ；而  $SNR$  较小时， $\mathbf{R}_q$  中  $\sigma^2\Lambda_s^{-1}$  不能被忽略。

$\mathbf{q}$  的伪协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{pcov}(\mathbf{q}) &= E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^T\} = \mathbf{V}_sE\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}\mathbf{V}_s^T \\ &= \mathbf{V}_s(\mathbf{A}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\}\mathbf{A}^T + E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\})\mathbf{V}_s^T \end{aligned} \quad (13)$$

因为复高斯白噪声被假定为是圆的即  $E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\} = \mathbf{0}$ ，式(13)可重写为

$$\text{pcov}(\mathbf{q}) = E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^T\} = \mathbf{V}_s\mathbf{A}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\}\mathbf{A}^T\mathbf{V}_s^T \quad (14)$$

### 3.2 去噪 nc-FastICA 算法的学习规则

在复数 FastICA 算法的推导过程中，利用了近似关系  $E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H f(\mathbf{z})\} \approx E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\}E\{f(\mathbf{z})\}$  和  $\mathbf{z}$  的白性，得到了如下近似：

$$\begin{aligned} E\left\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H \left[ g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2) \right]\right\} \\ \approx E\left\{g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2)\right\} \end{aligned} \quad (15)$$

从而有了式(7)中右端的第 1 项。

然而，根据前面的分析知道，在噪声复数 ICA 信号模型中  $E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^H\} \neq \mathbf{I}$ ，若也使用类似式(15)的近似，则可能会带来较大的误差，特别是在  $SNR$  较低的情况下，会导致分离效果不佳。实际上，含噪的复数快速不动点算法的代价函数和优化问题为

$$J(\mathbf{w}) = E\left\{G\left(|\mathbf{w}^H\mathbf{q}|^2\right)\right\} \quad (16)$$

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \arg \max_{|\mathbf{w}|^2=1} E\left\{G\left(|\mathbf{w}^H\mathbf{q}|^2\right)\right\} \quad (17)$$

因此，考虑到噪声后，对应式(15)有

$$\begin{aligned} E\left\{\mathbf{q}\mathbf{q}^H \left[ g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2) \right]\right\} \\ \approx E\left\{g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2)\right\}(\mathbf{I}_M + \sigma^2\Lambda_s^{-1}) \end{aligned} \quad (18)$$

从而，对应式(7)有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_{n+1} &= E\left\{g'(|y|^2)|y|^2 + g(|y|^2)\right\}(\mathbf{I}_M + \sigma^2\Lambda_s^{-1})\mathbf{w}_n \\ &\quad - E\left\{g(|y|^2)\right\}y^*\mathbf{q} \\ &\quad + E\left\{\mathbf{q}\mathbf{q}^T\right\}E\left\{g'(|y|^2)\right\}y^{*2}\mathbf{w}_n^* \\ \mathbf{w}_{n+1} &= \mathbf{w}_{n+1}/\|\mathbf{w}_{n+1}\| \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

顺便指出，当  $E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\} = \mathbf{0}$  即源信号具有圆性时，由式(14)易得  $E\{\mathbf{q}\mathbf{q}^T\} = \mathbf{0}$ ，然后代入式(19)并简化后便得到圆信号的去噪 c-FastICA 算法的学习规则。

### 3.3 去噪 nc-FastICA 算法

根据前面的分析，可以得到去噪 nc-FastICA 算法的具体步骤：

(1) 估计出观测信号  $\mathbf{x}$  中所含有的独立信源的个数  $M$ ；

(2) 对观测信号  $\mathbf{x}$  做中心化处理；

(3)对中心化处理后的观测信号的协方差矩阵  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$  做特征值分解;

(4)用式(10)的矩阵  $\mathbf{V}_s$  对中心化处理后的观测信号作伪白化变换, 得到伪白化后的信号  $\mathbf{q}$ , 噪声方差  $\sigma^2 = (\lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N)/(N - M)$ , 信号的特征值矩阵  $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\lambda_1 - \sigma^2, \lambda_2 - \sigma^2, \dots, \lambda_M - \sigma^2)$ ;

(5)初始化  $\mathbf{W}^H = \mathbf{I}_M$ ;

(6)对  $\mathbf{W}^H$  中的各列向量  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M$ , 按从  $\mathbf{w}_1$  到  $\mathbf{w}_M$  的顺序分别运用式(19)进行更新, 同时从  $\mathbf{w}_2$  开始, 每得到一个  $\mathbf{w}_i (1 < i \leq M)$  就与  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$  做Gram-Schmidt正交归一化;

(7)按式(4)得到分离矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{W}^H \mathbf{V}_s$  和信源的估计  $\mathbf{y} = \mathbf{W}^H \mathbf{q}$ 。

注意, 步骤(6)中计算  $\mathbf{w}_i (1 \leq i \leq M)$  时, 迭代可以按  $\|\mathbf{w}_i\|_F < \varepsilon$  收敛,  $\varepsilon$  是迭代精度。

#### 4 计算机仿真

本文中所有仿真实验都采用如下 Amari 指数<sup>[20]</sup>  $I_A \in [0, 1]$  作为算法性能的评价指标:

$$I_A = \frac{1}{2M(M-1)} \left[ \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1}^M \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^M \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{kj}|} - 1 \right) \right] \quad (20)$$

其中  $M$  表示信源数目,  $c_{ij}$  表示测度矩阵  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^H \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  中第  $i$  行, 第  $j$  列对应的元素(这里假定  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  分别表示 ICA 过程中的混合矩阵和分离矩阵)。  $I_A$  值越小说明分离效果越好,  $10 \lg I_A > -10$  dB 则意味着分离效果不佳。仿真实验中使用了非线性函数  $G_2$  和  $G_3$ , 其中常数  $a = 0.1$ 。

##### 4.1 仿真实验 1

本仿真实验采用两个相互独立的8QAM基带信号  $s_1$  和  $s_2$  作为盲源, 它们都是非圆复信号。信源本数为 10000, 噪声为零均值的复高斯白噪声, 信噪比 SNR = 10 dB, 混合矩阵  $\mathbf{A}$  为实部和虚部均服

从高斯分布的复随机矩阵, 在实验中随机生成, 观测信号数目为 8,  $G_2$  作为非线性函数。采用本文提出的去噪 nc-FastICA 算法进行分离, 结果如图 1 所示, 这里绘制的是由信号的实部和虚部构成的散点图。

图 1 中(a)和(b), (c)和(d)以及(e)和(f)分别为源信号、混合信号和分离信号。从图中可以直观地看出, 去噪 nc-FastICA 算法对被噪声污染的混合信源进行了成功的分离。本次实验的分离指标  $10 \lg I_A = -22.1732$ , 说明分离效果比较理想。

##### 4.2 仿真实验 2

本仿真实验采用两个盲源信号  $s_1$  和  $s_2$ , 它们都是服从复广义高斯分布(CGGD)<sup>[21]</sup>的超高斯信号, 其形状参数分别为  $c_1 = 0.8$  和  $c_2 = 0.1$ , 扩展的协方差矩阵分别为  $\mathbf{C}_{a1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{C}_{a2} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ 。信源样本数为 1000, 噪声情况等其它实验条件同仿真实验 1。采用本文提出的去噪 nc-FastICA 算法进行分离, 结果如图 2 所示。

图 2 中(a)和(b), (c)和(d)以及(e)和(f)分别为源信号、混合信号和分离信号的实部。从图中可以直观地看出, 去噪 nc-FastICA 算法对被噪声污染的混合信源进行了成功的分离。本次实验的分离指标  $10 \lg I_A = -17.8675$ , 也说明了分离算法的有效性。

##### 4.3 仿真实验 3

本仿真实验采用非圆复信号  $s_1$  和  $s_2$  作为盲源, 其中, 信源  $s_2$  是 8QAM 基带信号, 信源  $s_1$  是服从 CGGD 的超高斯信号, 其形状参数  $c = 0.5$ , 扩展的协方差矩阵为  $\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 。信源样本数为 10000, 噪声为零均值的复高斯白噪声, SNR 设为从 0~20 dB, 共进行 21 次不同 SNR 实验, 每次实验中又进行 2000 次蒙特卡罗实验, 混合矩阵  $\mathbf{A}$  为实部和虚部

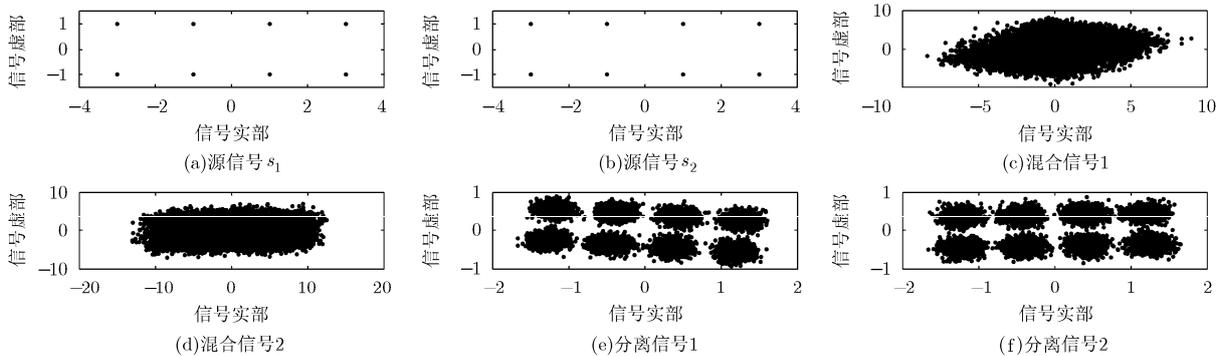


图 1 两个 8QAM 信号及其混合与分离的散点图

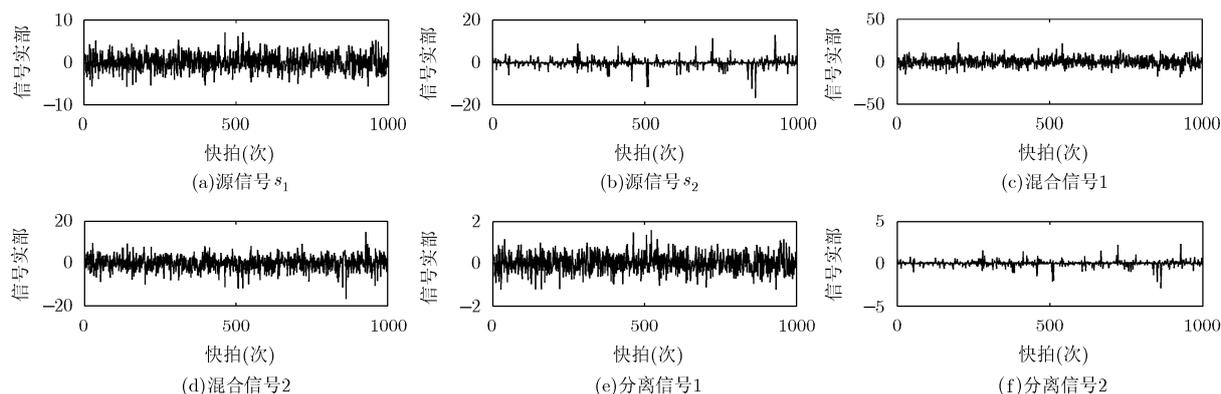


图2 两个 CGGD 信号的混合与分离

均服从高斯分布的复随机矩阵,在每次蒙特卡罗实验中随机生成,观测信号数目为 8。每个 SNR 实验得到的  $I_A$  是 2000 次蒙特卡罗实验得到的 Amari 指数的平均。算法中非线性函数分别采用了  $G_2$  和  $G_3$ ,并分别采用了 nc-FastICA 算法和去噪 nc-FastICA 算法进行仿真,结果如图 3 所示。

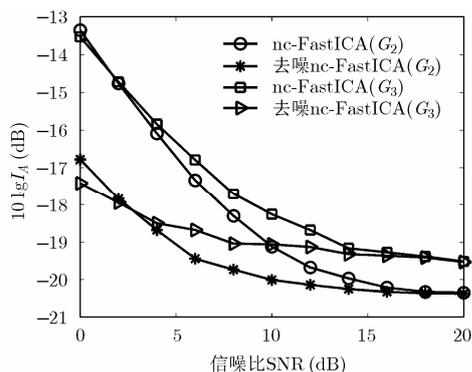


图3 在不同信噪比下 nc-FastICA 算法和去噪 nc-FastICA 算法的性能对比

分析图 3 可以清晰地发现,无论是对  $G_2$  还是对  $G_3$ ,对于被噪声污染的混合源,去噪 nc-FastICA 算法的分离性能明显优于 nc-FastICA 算法,在 SNR 较低的情况下尤其如此。例如,当  $\text{SNR} \leq 5$  dB 时,nc-FastICA 算法的分离性能比去噪的 nc-FastICA 算法的性能平均要差 3 dB;在  $\text{SNR} = 0$  时,去噪的算法性能平均要好约 4 dB(对  $G_3$  而言)。而随着 SNR 的增加,两种算法的分离性能逐步靠近,在  $\text{SNR} \geq 18$  dB 时,它们的分离指标几乎相同,这与理论分析的结果是一致的。

从图 3 中分析对应  $G_3$  的两条曲线还可以知道,在信噪比较低时,相同分离性能下,去噪算法与未去噪算法要求满足的信噪比相差较大。例如,去噪算法在  $\text{SNR} \approx 2$  时,分离指标达到  $10 \lg I_A = -18$

dB,而未去噪算法要达到这个性能,要求满足  $\text{SNR} \approx 8$ 。这也说明,去噪 nc-FastICA 算法确实提高了盲信号的分离性能。

关于两个非线性函数效果的差异问题,非线性函数不同,分离效果会有差异,因为分离效果受很多因素的影响,比如信源超高斯、次高斯,非圆系数,收敛条件的设定等。

## 5 结束语

本文对噪声复 ICA 信号模型的快速不动点算法进行了研究。首先通过对观测信号的协方差矩阵进行信号子空间和噪声子空间分解,从而在伪白化过程中将观测信号投影到信号子空间;然后在已有复数 FastICA 算法的学习规则的基础上,考虑了噪声影响,对学习规则做了改进,使之更符合带噪声的信号模型。因此,去噪 nc-FastICA 算法提高了盲辨识性能。仿真结果验证了本文算法的有效性。

## 参考文献

- [1] Comon P. Independent component analysis, a new concept? [J]. *Signal Processing*, 1994, 36(3): 287-314.
- [2] 陈晓军,成昊,唐斌. 基于 ICA 的雷达信号欠定盲分离算法 [J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(4): 919-924.  
Chen Xiao-jun, Cheng Hao, and Tang Bin. Underdetermined blind radar signal separation based on ICA [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(4): 919-924.
- [3] Ranganathan R, Qiu R, Hou Shu-jie, et al. Blind recovery of smart meter wireless transmissions employing independent component analysis in the presence of strong wideband interference [C]. *IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, Brussels, 2011: 172-177.
- [4] 付卫红,杨小牛,刘乃安. 基于四阶累积量的稳健的通信信号盲分离算法 [J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(8): 1853-1856.

- Fu Wei-hong, Yang Xiao-niu, and Liu Nai-an. Robust algorithm for communication signal blind separation fourth-order-cumulant-based[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(8): 1853-1856.
- [5] Sun Zhan-li and Lam Kin-man. Depth estimation of face images based on the constrained ICA model[J]. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2011, 6(2): 360-370.
- [6] Ma Xin-yue, Zhang Hang, Zhao Xiao-jie, et al. Semi-blind independent component analysis of fMRI based on real-time fMRI system[J]. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2013, 21(3): 416-426.
- [7] Nafta A, Johannisson P, and Shtaf M. Blind equalization in optical communications using independent component analysis[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2013, 31(12): 2043-2049.
- [8] Hyvärinen A and Oja E. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis[J]. *Neural Computation*, 1997, 9(7): 1483-1492.
- [9] Bingham E and Hyvärinen A. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis of complex valued signals[J]. *International Journal of Neural System*, 2000, 10(1): 1-8.
- [10] Yang Zhang and Kassam S A. Optimum nonlinearity and approximation in complex FastICA[C]. 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Princeton, NJ, 2012: 1-6.
- [11] Novey M and Adali T. On extending the complex FastICA algorithm to noncircular sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(5): 2148-2154.
- [12] Li Hua-liang, Correa N M, Rodriguez P A, et al. Application of independent component analysis with adaptive density model to complex-valued fMRI data[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2011, 58(10): 2794-2803.
- [13] Jouny I. Target recognition using UWB radar signatures extracted via complex ICA[C]. IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB), Syracuse, NY, 2012: 477-481.
- [14] Mehrabian H, Chopra R, and Martel A L. Calculation of intravascular signal in dynamic contrast enhanced-MRI using adaptive complex independent component analysis[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2013, 32(4): 699-710.
- [15] 张和发, 李立萍, 杨小牛, 等. 一种适用于微弱信号盲提取的白化方法[J]. *电子学报*, 2011, 39(6): 1297-1301.
- Zhang He-fa, Li Li-ping, Yang Xiao-niu, et al. An efficient whitening method for weak signal extraction[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(6): 1297-1301.
- [16] Picinbono B. On circularity[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(12): 3473-3482.
- [17] Loesch B and Yang Bin. Cramér-Rao bound for circular and noncircular complex independent component analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(2): 365-379.
- [18] Tong L, Soon V C, Huang Y F, et al. AMUSE: a new blind identification algorithm[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, New Orleans, LA, 1990, 3: 1784-1787.
- [19] Xiao Man-lin, Wei Ping, and Tai Heng-ming. Estimation of the number of sources based on hypothesis testing[J]. *Journal of Communications and Networks*, 2012, 14(5): 481-486.
- [20] Amari S, Cichocki A, and Yang H H. A new learning algorithm for blind signal separation[C]. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), Colorado, 1995: 757-763.
- [21] Novey M, Adali T, and Roy A. A complex generalized Gaussian distribution — characterization, generation, and estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(3): 1427-1433.
- 阮宗利：男，1978年生，讲师，博士生，研究方向为盲源分离、阵列信号处理。
- 李立萍：女，1963年生，教授，博士生导师，主要研究方向为阵列信号处理、高速信号处理、微弱信号检测与参数估计等。
- 钱国兵：男，1987年生，博士生，研究方向为盲源分离、阵列信号处理。
- 罗明刚：男，1977年生，博士生，研究方向为非合作信号处理、阵列信号处理。