

## 一种三阶多项式相位信号去噪的字典学习算法

欧国建<sup>\*①②</sup> 杨士中<sup>①</sup> 蒋清平<sup>①</sup> 曹海林<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(重庆大学飞行器测控与通信教育部重点实验室 重庆 400044)

<sup>②</sup>(重庆电子工程职业学院 重庆 401331)

**摘要:** 在加性高斯白噪声的影响下,对于三阶多项式相位信号(CPS),经典的字典学习算法,如 K-means Singular Value Decomposition(K-SVD),递归最小二乘字典学习算法(RLS-DLA)和 K-means Singular Value Decomposition Denoising (K-SVDD)得到的学习字典,通过稀疏分解,不能有效去除信号的噪声。为此,该文提出了针对 CPS 去噪的字典学习算法。该算法首先利用 RLS-DLA 对的字典进行学习;其次采用非线性最小二乘(NLLS)法修改了该算法对字典更新的部分;最后对训练后的字典通过对信号的稀疏表示得到重构信号。对比其它的字典学习算法,该算法的信噪比(SNR)值明显高于其它算法,而均方误差(MSE)显著低于其它算法,具有明显的降噪效果。实验结果表明,采用该算法得到的字典通过稀疏分解,信号的平均信噪比比 K-SVD, RLS-DLS 和 K-SVDD 高出 9.55 dB, 13.94 dB 和 9.76 dB。

**关键词:** 三阶多项式相位信号;递归最小二乘字典学习算法;字典学习;非线性最小二乘法;曲线拟合

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)02-0255-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00726

## A Dictionary Learning Algorithm for Denoising Cubic Phase Signal

Ou Guo-jian<sup>①②</sup> Yang Shi-zhong<sup>①</sup> Jiang Qing-ping<sup>①</sup> Cao Hai-lin<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Key Laboratory of Aircraft Tracking Telemetry & Command and Communication of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

<sup>②</sup>(Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Under the influence of additive white Gaussian noise, the classical dictionary learning algorithms, such as K-means Singular Value Decomposition (K-SVD), Recursive Least Squares Dictionary Learning Algorithm (RLS-DLA) and K-means Singular Value Decomposition Denoising (K-SVDD), can not effectively remove the noise of Cubic Phase Signal (CPS). A novel dictionary learning algorithm for denoising CPS is proposed. Firstly, the dictionary is learned by using the RLS-DLA algorithm. Secondly, the update stage of the RLS-DLA algorithm is modified by using Non-Linear Least Squares (NLLS) in the algorithm. Finally, the signal is reconstructed via sparse representations over learned dictionary. Signal to Noise Ratio (SNR) obtained by using the novel dictionary learning algorithm is obviously higher than other algorithms, and the Mean Squares Error (MSE) obtained by using the novel dictionary learning algorithm is obviously lower than other algorithms. Therefore there is obviously denoising performance for using the dictionary learned by the algorithm to sparsely represent CPS. The experimental results show that the average SNR obtained by using the algorithm is 9.55 dB, 13.94 dB and 9.76 dB higher than K-SVD, RLS-DLS and K-SVDD.

**Key words:** Cubic Phase Signal (CPS); Recursive Least Squares Dictionary Learning Algorithm (RLS-DLA); Dictionary learning; Non-Linear Least Squares (NLLS); Curve fitting

### 1 引言

多项式相位信号在信号处理方面有广泛的应用,如船舶的水下检测,雷达和通信系统及声呐<sup>[1-3]</sup>等,

而三阶多项式相位信号(Cubic Phase Signal, CPS)在雷达信号处理中常用于对复杂移动目标的回波相位进行建模<sup>[4,5]</sup>。由于多项式相位信号在信号处理方面有广泛的应用,因此,对多项式相位信号的去噪就显得非常重要。常见的对信号去噪的方法很多,比如基于小波的去噪方法,基于独立分量分析的信号去噪方法,基于相位匹配的信号去噪方法,以及

2013-05-23 收到, 2013-10-25 改回

国家自然科学基金(51377179), 中央高校基本科研业务费(CDJZR12160020)和重庆教委项目(KJ120510)资助课题

\*通信作者: 欧国建 ouguojia\_2005@qq.com

基于稀疏表示的信号去噪方法等等,在这些方法中,由于稀疏表示对信号去噪不需要先验地获取信号和噪声的统计特性,因此,它成为研究的热点。但是,在稀疏表示中,采用固定字典的形式往往使得运算量很大,用智能计算,如粒子群算法<sup>[6]</sup>,虽然能加快计算速度,适合对非线性信号的处理,但因其有一定的随机性,并不适合某些应用场合。因此,字典学习算法近年来引起了越来越多研究者的兴趣,已成了稀疏表示领域的热点问题。

字典学习算法的研究有3个方向<sup>[7]</sup>:第1个是基于概率的字典学习方式,如最大后验(MAP)字典学习算法<sup>[8]</sup>;第2个是基于矢量量化的学习方式,如K-means Singular Value Decomposition(K-SVD)字典学习算法<sup>[9]</sup>;最后是基于具体结构的学习方式,如参数字典设计<sup>[10]</sup>。在这3个研究方向内,涌现出了许多的字典学习算法,其共同特征都是通过某种方式使得字典获得更符合信号内容,特征或者纹理特征。

字典学习算法都是要训练或学习一个字典,令其满足一定的目的。设定 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{N \times L}$ 为受训信号的矩阵, $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{K \times L}$ 为系数矩阵, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{N \times K}$ 为需要训练的字典, $s$ 为稀疏约束, $f(\cdot)$ 为代价函数,字典学习算法则要解决如下的问题:

$$\left. \begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{D}, \mathbf{W}} f(\mathbf{D}, \mathbf{W}) &= \arg \min_{\mathbf{D}, \mathbf{W}} \sum_i \|\mathbf{r}_i\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{D}, \mathbf{W}} \|\mathbf{X} - \mathbf{D}\mathbf{W}\|_F^2 \\ \text{s.t. } \forall 1 \leq i \leq L, \|\mathbf{w}_i\|_0 &\leq s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

对于这个问题的解,很多研究者提出许多字典学习算法,其中K-SVD是一种比较经典的字典学习算法,它采用对矩阵奇异分解的方式完成对字典的学习,但其训练的字典对信号的去噪效果并不理想,并且无法保证普遍收敛。之后文献[11]提出的Recursive Least Squares Dictionary Learning Algorithm(RLS-DLA)算法,具有较好的收敛性,比K-SVD执行效率更高,但重构信号的信噪比(SNR)比重构前的信号的信噪比提高不到1 dB。为此,在K-SVD基础上,文献[12]针对图像去噪提出了一种字典学习算法,本文称之为K-means Singular Value Decomposition Denoising(K-SVDD)算法,该算法根据最大后验估计(MAP)和假设每个图像分块都能被训练的字典稀疏表示,但是这种字典学习算法用于多项式相位信号,如CPS的去噪,效果并不好,并涉及到参数 $\lambda$ 的选取问题。之后,

文献[13]对混合噪声图像的去噪提出了一种加权字典学习算法,该算法在改进的K-SVD算法基础上,采用加权方式,并融合了参数估计,实现了对混合噪声图像的去噪,该算法同样针对图像去噪,用于多项式相位信号,效果同样不好。

为了实现对信号的有效去噪,本文提出的字典学习算法在RLS-DLA算法的基础上,采用非线性最小二乘法修改了该算法对字典的更新部分,我们称该算法为递归最小均方-非线性最小二乘(Recursive Least Squares-Non Linear Least Squares, RLS-NLLS)字典学习算法。实验表明,相比K-SVD,RLS-DLA和K-SVDD字典学习算法,该算法对CPS具有更好的去噪效果,并且运算量远远低于采用固定字典的形式。

## 2 问题描述

本文首先提出典型的CPS,即三阶多项式相位信号的去噪问题:设 $\mathbf{y}$ 为观测信号, $\mathbf{x}$ 为未被噪声污染的信号, $\mathbf{v}$ 为高斯白噪声信号,因此有

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2)$$

这里需要设计一种算法有效去掉 $\mathbf{y}$ 中的噪声,尽可能得到未被噪声干扰的CPS。按照文献[6]的字典学习设计思想,对于CPS去噪的字典学习算法设计,需要解决以下问题:

$$\left. \begin{aligned} \{\widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{w}}_i, \widehat{\mathbf{X}}\} &= \arg \min_{\widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{w}}_i, \widehat{\mathbf{X}}} \lambda \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 \\ &\quad + \sum_i \mu_i \|\mathbf{w}_i\|_0 + \|\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{X}\|_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{w}_i$ 为系数矩阵 $\mathbf{W}$ 的第 $i$ 列, $\mathbf{D}$ 为需要学习的完备字典, $\mathbf{Y}$ 为观测信号集合, $\mathbf{X}$ 为去噪信号集合, $\lambda, \mu_i$ 为参数,由

$$\mathbf{w}_i = \arg \min_{\mathbf{w}_i} \|\mathbf{w}_i\|_0 + \|\mathbf{D}\mathbf{w}_i - \mathbf{y}_i\|_2^2 \quad (4)$$

可得到

$$\{\widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{X}}\} = \arg \min_{\widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{X}}} \lambda \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 + \|\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{X}\|_2^2 \quad (5)$$

通过对式(5)的求解,可得到

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\mathbf{D}} &= (\mathbf{X}\mathbf{W}^T)(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1} \\ \widehat{\mathbf{X}} &= (\lambda\mathbf{Y} + \mathbf{D}\mathbf{W})/\lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)中的 $\widehat{\mathbf{D}}$ 可通过RLS-DLA算法得到,而参数 $\lambda$ 的设定需要得到高斯白噪声的方差 $\sigma$ ,文献[7]通过参数估计的方法得到噪声的方差 $\sigma$ ,然而这种方式加大了计算的复杂度。对于式(6),实验表明,

其去噪效果非常不理想。因此本文通过另外一种方式来完成对字典的学习，以促使有效完成对 CPS 的去噪。

字典学习是从观测信号数据中得到最优的稀疏表示，使得字典中原子结构更接近于观测信号。对有噪声的 CPS，通过字典学习，字典中的原子结构必然接近于有噪声的 CPS。对此，本文通过非线性最小二乘法对原子结构进行拟合，使其结构接近于无噪声的 CPS，这样训练出来的字典通过稀疏表示能有效去除 CPS 的噪声。

### 3 算法描述

#### 3.1 算法思想

由于本文算法是建立在 RLS-DLA 算法的基础之上，首先介绍 RLS-DLA 算法的字典学习。由文献[5]可知，RLS-DLA 算法不像 ILS-DLA<sup>[14]</sup>和 K-SVD 那样需要在一批训练矢量完成后再进行字典更新，其采用每个训练矢量在处理时字典持续更新，并且该算法引入了遗忘因子  $\lambda$ ，用恰当的方式调节  $\lambda$  使得该算法较少受到初始字典的影响，并能改善算法的收敛性。根据式(1)可得

$$\mathbf{D} = (\mathbf{X}\mathbf{W}^T)(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1} \quad (7)$$

根据矩阵求逆引理和引入的遗忘因子  $\lambda$ ，最后得到的方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_{i+1} &= (\lambda^{-1}\mathbf{C}_i) - \alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{D}_{i+1} &= \mathbf{D}_i + \alpha\mathbf{r}\mathbf{u}^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{u} = (\lambda^{-1}\mathbf{C}_i)\mathbf{w}$ ， $\alpha = \frac{1}{1 + \mathbf{w}^T\mathbf{u}}$ ， $\lambda_i =$

$\begin{cases} 1 - (1 - \lambda_0)(1 - i/a)^p, & i \leq a \\ 1, & i > a \end{cases}$ ，这样，RLS-DLA 通

过迭代的方式，完成了对字典的学习。但是，大量

的实验表明，RLS-DLA 通过对信号的稀疏表示得到的重构信号，其信噪比仅比重构前的信号提高 0.8 dB 左右。

分析 RLS-DLA 及 K-SVD 字典学习算法对多项式相位信号去噪效果不好的原因，是因为通过这些字典学习算法训练后得到的字典，其原子结构接近于信号。因此，如果观测信号是带噪声的信号，则通过字典学习，得到的原子结构必然是带噪声的信号结构。那么，如果对原子数据进行修正，让原子结构接近与不带噪声的信号结构，这样得到的字典通过稀疏表示得到的重构信号，其去噪效果就很明显。于是本文引入了非线性最小二乘法，通过拟合原子数据，让原来带噪声的原子结构变为不带噪声的原子结构。从图 1(a)可以看出，对有加性高斯白噪声的 CPS，用 RLS-DLA 字典学习算法训练字典后，训练后的字典原子是一个含加性高斯白噪声的函数，而从图 1(b)中可以看出，通过非线性最小二乘法对原子的拟合，原子是一条光滑的曲线，这样就有效去除了原子的噪声。通过这样的处理得到的字典，通过稀疏分解我们就能对信号有效的去噪。

对非线性最小二乘法拟合，其原理如下：

给定一个矢量函数  $f: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^m$ ，其中  $m \geq n$ ，需要求解以下方程：

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \arg \min_{\mathbf{A}} \{F(\mathbf{A})\} \\ F(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{A}))^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{A})\|_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这就是非线性最小二乘法拟合的基本原理。

#### 3.2 RLS-NLLS 算法

用  $\mathbf{D}_0 \in \mathbf{R}^{N \times K}$  表示初始字典， $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{N \times L}$  表示观测信号集合，即观测信号的集合， $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{K \times L}$  为系数矩阵，算法步骤如表 1 所示。

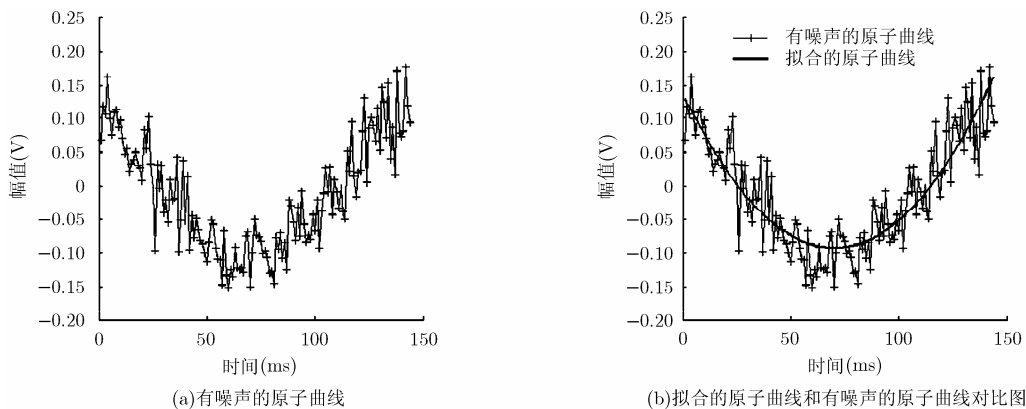


图1 RLS-DLA 字典学习算法得到的原子函数曲线及拟合曲线

表1 RLS-NLLS 算法步骤

任务: 找到最好的字典, 使得该字典通过稀疏表示能有效地去除 CPS  $\{y_i\}_{i=1}^N$  的噪声。

初始化: 任取  $K$  段观测信号作为初始字典  $D_0 \in \mathbf{R}^{N \times K}$ , 并使之标准化。

for  $i = 1, 2, \dots, K$

(1) 取得第  $i$  个受训信号  $y_i \in \mathbf{Y}$ ;

(2) 通过用追踪算法和  $D_{i-1}$ , 得到系数矢量  $w_i$ ;

(3) 求得  $r = y_i - D_{i-1}w_i$ ;

(4) 运用  $\lambda_i$ , 计算矢量  $u = \lambda_i^{-1}C_{i-1}$ ,  $\alpha = 1/(1 + w_i^T u)$ ;

(5) 更新字典  $D_i = D_{i-1} + \alpha r u^T$ 。

end

for  $i = 1, \dots, K$

(1) 取得字典  $D$  的第  $i$  个原子  $g_i$ ;

(2) 运用非线性最小二乘法拟合原子  $g_i$ , 得到拟合后的原子  $g_i^*$ ;

(3) 把拟合后的原子  $g_i^*$  代替原来的原子  $g_i$ ;

end

最后得到的字典  $D'$  为  $D' = \{g_1^*, g_2^*, \dots, g_K^*\}$ 。

## 4 实验

本节主要验证通过该算法对 CPS 的去噪效果。去噪效果采用信号的均方误差 (Mean Square Error, MSE) 和信噪比 (SNR) 来衡量, 定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{x}(n))^2 \\ \text{SNR} &= 10 \lg \left[ \frac{\sum_{n=1}^N x^2(n)}{\sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{x}(n))^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中  $N$  为信号长度,  $x(k)$  为无噪声信号的第  $k$  个数据点,  $\hat{x}(k)$  为噪声信号的第  $k$  个数据点。由式(10)可知, MSE 越小, 则 SNR 越大, 去噪效果就越好。以下对本文提出的字典学习算法 (RLS-NLLS) 在去噪效果上与 K-SVD, RLS-DLA 及文献[6]提出的去噪的 K-SVD (K-SVDD) 进行对比。CPS 可表示为<sup>[15]</sup>

$$x(n) = \cos \left( \sum_{i=0}^3 a_i (n\Delta)^i + v(n) \right), \quad n \in [0, N] \quad (11)$$

在实验中, 设定  $\mathbf{a} = (a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0) = (500 \ 400 \ 300 \ \pi/3)$ ,  $\Delta$  为采样间隔,  $v(n)$  是 Gaussian 白噪声, 信号的信噪比设为 8.2 dB。图 2 中, 分别列出 4 种算法得到的字典通过稀疏表示得到的重构信号, 从图中可以看出, RLS-NLLS 算法对 CPS 的去噪效果最好。4 种算法得到的 MSE 和 SNR 的值分别如表 2 和表 3 所示。从表 2 和表 3 可以看出, RLS-NLLS 算法重构的信号比其它 3 种算法重构的信号更接近于无噪声的 CPS, 其信噪比明显高于其它 3 种算法重构的信号。

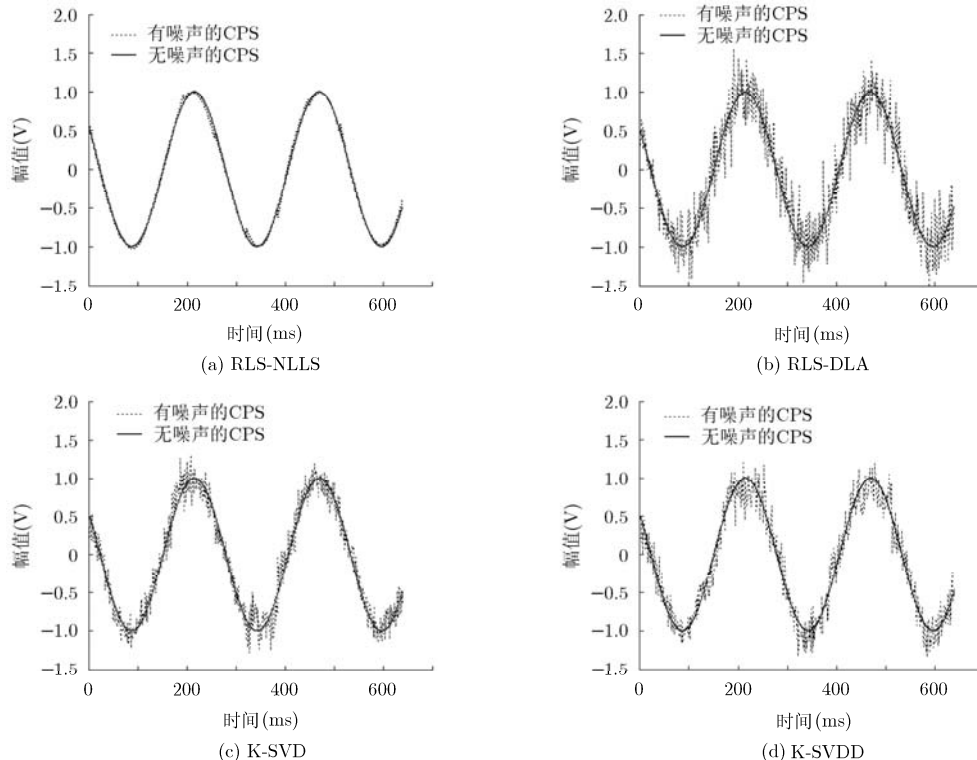


图2 RLS-NLLS, RLS-DLA, K-SVD 及 K-SVDD 重构信号对比图

表 2 4 种算法重构信号 MSE 值

算法	迭代次数					
	6	7	8	9	10	11
K-SVD	0.0220	0.0162	0.0203	0.0267	0.0287	0.0254
RLS-DLA	0.0567	0.0607	0.0585	0.0640	0.0582	0.0645
K-SVDD	0.0235	0.0163	0.0272	0.0267	0.0252	0.0270
RLS-NLLS	0.0022	0.0032	0.0030	0.0026	0.0034	0.0014

表 3 4 种算法重构信号 SNR 值

算法	迭代次数					
	6	7	8	9	10	11
K-SVD	13.55	14.88	13.90	12.73	12.40	12.93
RLS-DLA	8.45	9.15	9.31	8.92	9.34	8.89
K-SVDD	13.27	14.87	12.64	12.72	12.97	12.67
RLS-NLLS	23.51	21.87	22.15	22.85	21.69	25.62

## 5 结论

稀疏表示可以去除信号的噪声，稀疏表示领域中，采用字典学习算法获得字典是一个重要的方法，因此，设计具有去噪能力的字典就具有重要意义。本文提出一种针对 CPS 去噪的 RLS-NLLS 字典学习算法，该算法在 RLS-DLA 算法的基础上，融合了非线性最小二乘法，通过对初始字典的学习，使得学习后的字典通过对信号的稀疏表示，能有效去除 CPS 的噪声。实验表明，采用 RLS-NLLS 得到的字典通过稀疏分解，平均信噪比比 K-SVD, RLS-DLS 和 K-SVDD 高出 9.55 dB, 13.94 dB 和 9.76 dB，具有良好的去噪性能。

### 参考文献

- [1] Djurović I, Djukanović S, Simeunović M, et al. An efficient joint estimation of wideband polynomial-phase signal parameters and direction-of-arrival in sensor array[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012, 2012(43): 1-19.
- [2] Robby G, McKilliam I, Vaughan L, et al. The asymptotic properties of polynomial phase estimation by least[C]. 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Italy, 2011: 3592-3595.
- [3] Djukanović S and Djurović I. Aliasing detection and resolving in the estimation of polynomial-phase signal parameters[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(1): 235-239.
- [4] Li Y, Wu R, and Xing M, et al. Inverse synthetic aperture radar imaging of ship target with complex motion[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2008, 2(6): 395-403.
- [5] Wang Yong and Jiang Yi-cheng. ISAR imaging of a ship target using product high-order matched-phase transform[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2009, 6(4): 658-661.
- [6] Han Ning and Shang Chao-xuan. Fast variable matrix algorithm for sparse decomposition based on PSO[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(1): 46-49
- [7] Tošić I and Frossard P. Dictionary learning[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(2): 27-38.
- [8] Ereutz-Delgado K, Murray B J, Rao K, et al. Dictionary learning algorithms for sparse representation[J]. *Neural Computation*, 2003, 15(2): 349-396.
- [9] Abaron M, Elad M, and Bruckstein. A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [10] Yaghoobi M, Daudet L, and Davies M E. Parametric dictionary design for sparse coding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(12): 4800-4810.
- [11] Skretting K and Engan K. Recursive least squares dictionary learning algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2121-2130.
- [12] Elad M and Abaron M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [13] Liu J, Tai X, Huang H, et al. A weighted dictionary learning model for denoising images corrupted by mixed noise[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, 22(3): 1108-1120.
- [14] Engan K, Skretting K, and Hussy J H. Family of iterative LS-based dictionary learning algorithms, ILS-DLA, for sparse signal representation[J]. *Digital Signal Processing*, 2007, 17(1): 32-49.
- [15] Djurović I, Simeunović M, Djukanović S, et al. A hybrid CPF-HAF estimation of polynomial-phase signals: detailed statistical analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(10): 5010-5023.

欧国建：男，1975年生，博士生，研究方向为压缩感知、扩频通信、非平稳信号处理。  
 杨士中：男，1937年生，教授，中国工程院院士，研究方向为信息与通信工程、电子科学与技术。  
 蒋清平：男，1976年生，博士，讲师，研究方向为压缩感知、循环谱信号处理。