第36卷第2期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.36 No.2
2014年2月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Feb. 2014

一类多相零相关区周期互补序列集构造法

李玉博*　　许成谦　　刘 凯　　李 刚
(燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文基于正交矩阵，构造了一类参数达到理论界限的多相零相关区周期互补序列集。得到序列集的参数如零相关区长度、子序列的数目等都可以灵活设定。由于正交矩阵的存在数目很多，因此通过该文方法可以构造出大量的零相关区周期互补序列集。

关键词：周期互补序列；多相序列；零相关区(ZCZ)；正交矩阵
中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2014)02-0340-06
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00595

A Construction Method of Polyphase Periodic Complementary Sequence Sets with Zero Correlation Zone

Li Yu-bo　　Xu Cheng-qian　　Liu Kai　　Li Gang
(*College of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on orthogonal matrixes, a class of polyphase periodic complementary sequence sets with Zero-Correlation Zone (ZCZ) are proposed. The resultant polyphase ZCZ periodic complementary sets are optimal with respect to the theoretical bound. Moreover, the proposed approach provides flexible choices for parameters such as ZCZ length and number of subsequences. Since the number of orthogonal matrixes is huge, the proposed method can generate a large number of ZCZ periodic complementary sequence sets.

Key words: Periodic complementary sequences; Polyphase sequence; Zero Correlation Zone (ZCZ); Orthogonal matrixes

1　引言

互补序列是一种具有理想自相关性能和互相关性能的序列，最早由Golay[1]提出，称为格雷(Golay)互补序列对。Tseng[2]将互补对的概念推广为互补序列集。根据周期相关函数和非周期相关函数又分为周期互补序列集[3]和非周期互补序列集[4]。理论上讲，应用互补序列可以完全消除通信系统中普遍存在的多址干扰和多径干扰。然而互补序列集中的互补序列数目成为限制其应用的一个障碍。根据互补序列的理论界限可知，一个互补序列集中互补序列个数不超过每个互补序列所包含子序列的数目。为了扩展互补序列的数量，学者们把零相关区(ZCZ)的思想引入互补序列的研究中，提出了ZCZ周期互补序列集[5]和ZCZ非周期互补序列集[6]。ZCZ互补序列具有广泛的应用，ZCZ非周期互补序列集被用来构造组间互补码[7]，ZCZ周期互补序列集被应用到多载波CDMA通信系统消除多址干扰和多径干扰[8]。根据ZCZ互补序列集参数的理论界限[9]可知，ZCZ互补序列具有比传统互补序列更多的序列数目，实际应用中可以支持更多通信用户，因而受到广泛关注。目前ZCZ互补序列集的相关成果还不是很多，已有的一些构造方法都是基于周期互补序列集。文献[10]通过对周期互补序列集进行简单的移位操作构造了ZCZ周期互补序列集，如果初始序列集参数是最佳的则可以得到参数最佳的ZCZ周期互补序列集。基于二元周期互补序列集，文献[11]分别利用交织和逆Gray映射构造了二元和四元ZCZ周期互补序列集，其零相关区长度可以灵活设定。文献[12]同样利用交织法构造了相关区长度可以灵活设定的ZCZ周期互补序列集。另外还有一些四元ZCZ奇周期互补序列集[13]以及16-QAM ZCZ周期互补序列集[14]。

文献[15]给出了调制序列的概念，并且利用完备序列构造了一类多相零相关区序列集。基于调制序列的思想，本文给出了一类基于正交矩阵的多相ZCZ周期互补序列集构造方法。目前已有方法多采

2013-04-27收到，2013-08-23改回
国家自然科学基金(61172094, 61201263)，河北省自然科学基金(F2012203171)，秦皇岛市科技支撑计划(201302A025)和燕山大学博士基金(B788)资助课题
*通信作者：李玉博　liyubo6316@ysu.edu.cn

用周期互补序列集做为初始序列，得到的序列集参数受到限制，只有初始序列集参数最佳时才能得到参数达到理论界限的最佳 ZCZ 周期互补序列集。跟已有方法相比，本文得到的序列集参数都可以达到 ZCZ 周期互补序列集的理论界限。本文方法得到的序列集还具有更加灵活的参数，不但可以灵活设定零相关区长度、子序列数目等参数，还可以灵活设定序列的相数。根据实际系统中的调制方式来得到相应相数的序列，因此具有更广泛的应用前景。

2　基本概念

定义 1[16]　设 $\boldsymbol{u}=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$ 是一个长度为 N 的序列，其元素取值为单位圆的复数根，如 $u(n)\in\{W_M^m\mid m\in Z_m\}$，其中 $W_M^m=e^{j\frac{2\pi m}{M}}$，$j=\sqrt{-1}$。称序列 $\boldsymbol{u}$ 为多相序列，相数为 M。若存在 $0\le n\le N-1$，使得 $u(n)=0$，则序列称为 M PSK＋序列。

定义 2[17]　设 $\boldsymbol{u}=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$ 是一个长度为 N 的 PSK＋序列，序列 $\boldsymbol{u}$ 中零元素数目为 N_0，则序列 $\boldsymbol{u}$ 的能量效率定义为

$$\eta=\frac{N-N_0}{N} \tag{1}$$

对于 PSK＋序列来说，能量效率 η 越大，序列的能量损失越小。

定义 3　设 $\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{u}_j$ 是两个长度为 L 的多相序列，序列 $\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{u}_j$ 的周期互相关函数定义为

$$R_{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1}u_{i,t}u_{j,t+\tau}^{*} \tag{2}$$

其中 $0\le\tau<L$，下标模 L 运算，$(\bullet)^*$ 表示取复共轭。当 $i=j$ 时，称为序列 $\boldsymbol{u}_i$ 的自相关函数，可以用 $R_{\boldsymbol{u}_i}(\tau)$ 表示。

定义 4　设 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}^0,\boldsymbol{A}^1,\cdots,\boldsymbol{A}^{N-1}\}$ 是序列集，其中每个序列 $\boldsymbol{A}^n=\{\boldsymbol{A}_0^n,\boldsymbol{A}_1^n,\cdots,\boldsymbol{A}_{M-1}^n\}$ 包含 M 个子序列。每个子序列长度为 L，$\boldsymbol{A}_m^n=(a_m^n(0),a_m^n(1),\cdots,a_m^n(L-1))$。如果序列相关函数满足：

$$\varPhi_{\boldsymbol{A}^{n_1},\boldsymbol{A}^{n_2}}(\tau)=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{A}_m^{n_1},\boldsymbol{A}_m^{n_2}}(\tau)=\begin{cases}ML, & n_1=n_2,\tau=0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{3}$$

则称序列集 $\boldsymbol{A}$ 为周期互补序列集，表示为 PCS(N,M,L)。式中用 $\varPhi_{\boldsymbol{A}^{n_1},\boldsymbol{A}^{n_2}}(\tau)$ 表示两个互补序列的互相关函数，如果 $n_1=n_2$，则用 $\varPhi_{\boldsymbol{A}^{n_1}}(\tau)$ 表示互补序列的自相关函数。$R_{\boldsymbol{A}_m^{n_1},\boldsymbol{A}_m^{n_2}}(\tau)$ 表示两个子序列的周期互相关函数。

定义 5　对于序列集 $\boldsymbol{A}$，如果序列相关函数满足：

$$\varPhi_{\boldsymbol{A}^{n_1},\boldsymbol{A}^{n_2}}(\tau)=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{A}_m^{n_1},\boldsymbol{A}_m^{n_2}}(\tau)=\begin{cases}LM, & n_1=n_2,\ \tau=0\\ 0, & n_1=n_2,\ 0<|\tau|<Z\\ 0, & n_1\ne n_2,\ |\tau|<Z\end{cases} \tag{4}$$

则称序列集 $\boldsymbol{A}$ 为零相关区(ZCZ)周期互补序列集，表示为 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L$。其中 N 表示序列集中 ZCZ 周期互补序列的数目，M 表示每个 ZCZ 周期互补序列包含的子序列数目，L 表示子序列长度，Z 表示零相关区长度。

定义 6[15]　设 $\boldsymbol{u}=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$，$\boldsymbol{v}=(v(0),v(1),v(2),\cdots,v(N-1))$ 是两个长度为 N 的序列。构造新的序列 $\boldsymbol{u}_v=(u_v(0),u_v(1),\cdots,u_v(N-1))$ 如下：

$$u_v(k)=\sum_{t=0}^{N-1}v(t)\cdot u(t+k)^*,\quad 0\le k\le N-1 \tag{5}$$

则序列 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}$ 是由序列 $\boldsymbol{u}$ 经序列 $\boldsymbol{v}$ 调制得到，称为调制序列，序列 $\boldsymbol{u}$ 称为基序列。

引理 1[15]　设序列集 $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{v}}=\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^0,\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^1,\cdots,\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^{M-1}\}$ 是一个由基序列集 $\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{u}^1,\cdots,\boldsymbol{u}^{M-1}\}$ 经序列 $\boldsymbol{v}=(v(0),v(1),v(2),\cdots,v(N-1))$ 调制得到的序列集，其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^m&=(u_v^m(0),u_v^m(1),\cdots,u_v^m(N-1))\\ u_v^m(k)&=\sum_{t=0}^{N-1}v(t)\cdot u^m(t+k)^*\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

若序列 $\boldsymbol{v}$ 是一个完备序列，那么序列集 $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{v}}$ 与序列集 $\boldsymbol{U}$ 中序列具有相同的自相关值和互相关值。即对于任意的 $0\le m,m'\le M-1$，序列 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^m$ 和 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^{m'}$ 由式(6)得到的调制序列，基序列分别为 $\boldsymbol{u}^{m'}$ 和 $\boldsymbol{u}^m$，则有 $R_{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^m,\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^{m'}}(\tau)=R_{\boldsymbol{u}^m,\boldsymbol{u}^{m'}}(\tau)$ 成立。

3　ZCZ 周期互补序列集构造法

步骤 1　取一个 $N\times N$ 阶的 Q 相 2 维正交矩阵 $\boldsymbol{H}$ 如式(7)：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,N-1}\\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,N-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N-1,0} & h_{N-1,1} & \cdots & h_{N-1,N-1}\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 $h_{t,k}\in\{W_Q^q,0\le q\le Q-1\}$，$W_Q^q=e^{j\frac{2\pi q}{Q}}$，$j=\sqrt{-1}$。将矩阵分成 M 个 $N\times N'$ 的 2 维矩阵 $\{\boldsymbol{H}_0,\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_{M-1}\}$，其中 $M=N/N'$，其中每个矩阵表示为

$$\boldsymbol{H}_m=\begin{bmatrix}h_{0,m\cdot N'} & h_{0,m\cdot N'+1} & \cdots & h_{0,m\cdot N'+N'-1}\\ h_{1,m\cdot N'} & h_{1,m\cdot N'+1} & \cdots & h_{1,m\cdot N'+N'-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N-1,m\cdot N'} & h_{N-1,m\cdot N'+1} & \cdots & h_{N-1,m\cdot N'+N'-1}\end{bmatrix} \tag{8}$$

步骤 2　将上述每个矩阵 $\boldsymbol{H}_m$ 元素后面加上 $Z-1$ 个 0，构成新的矩阵如下：

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_m=\begin{bmatrix} h_{0,m\cdot N'}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & h_{0,m\cdot N'+1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & \cdots & h_{0,m\cdot N'+N'-1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \\ h_{1,m\cdot N'}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & h_{1,m\cdot N'+1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & \cdots & h_{1,m\cdot N'+N'-1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1,m\cdot N'}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & h_{N-1,m\cdot N'+1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} & \cdots & h_{N-1,m\cdot N'+N'-1}\overbrace{0\cdots0}^{Z-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

由式(9)可知矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_m$ 是一个 $N\times N'Z$ 阶的 2 维矩阵。矩阵第 n 行表示为

$$\tilde{\boldsymbol{h}}_n^m=(\tilde{h}_{n,0}^m,\tilde{h}_{n,1}^m,\cdots,\tilde{h}_{n,L-1}^m) \tag{10}$$

$$\tilde{h}_{n,t}^m=\begin{cases} h_{n,mN'+k}, & t=k\cdot Z \\ 0, & \text{其它} \end{cases},\quad 0\le k\le N'-1,\ 0\le t\le N'Z-1 \tag{11}$$

步骤 3　构造序列集 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{N-1}\}$，其中每个序列包含 M 个长度为 L 的子序列，$L=N'Z$。如式(12)~式(14)：

$$\boldsymbol{S}^n=\{\boldsymbol{s}_0^n,\boldsymbol{s}_1^n,\cdots,\boldsymbol{s}_{M-1}^n\},\ 0\le n\le N-1 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{s}_m^n=(s_m^n(0),s_m^n(1),\cdots,s_m^n(L-1)),\ 0\le m\le M-1 \tag{13}$$

$$s_m^n(t)=\tilde{h}_{n,t}^m,\ 0\le t\le L-1 \tag{14}$$

定理 1　构造得到的序列集 $\boldsymbol{S}$ 是一个零相关区周期互补序列集，参数为 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L$，其中 $L=N'Z$。

证明　由构造过程可知当 $\tau=0$ 时，对于任意 $0\le n_1\ne n_2\le N-1$，有

$$\begin{aligned}\varPhi_{\boldsymbol{S}^{n_1},\boldsymbol{S}^{n_2}}(\tau)&=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{s}_m^{n_1},\boldsymbol{s}_m^{n_2}}(0)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{L-1}\tilde{h}_{n_1,t}^m\cdot\tilde{h}_{n_2,t}^m\\&=\sum_{t=0}^{N-1}h_{n_1,t}\cdot h_{n_2,t}=0\end{aligned} \tag{15}$$

由构造过程可知，序列每 Z 个连续元素中具有 $Z-1$ 个 0 元素，因此当 $1\le\tau\le Z-1$ 时，对于任意的 $0\le n_1,\ n_2\le N-1$ 有

$$\begin{aligned}\varPhi_{\boldsymbol{S}^{n_1},\boldsymbol{S}^{n_2}}(\tau)&=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{s}_m^{n_1},\boldsymbol{s}_m^{n_2}}(\tau)\\&=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{L-1}\tilde{h}_{n_1,t}^m\cdot\tilde{h}_{n_2,t+\tau}^m=0\end{aligned} \tag{16}$$

因此可得结论序列集 $\boldsymbol{S}$ 是一个零相关区周期互补序列集，定理成立。　证毕

由上述构造过程可以看出，序列集 $\boldsymbol{S}$ 中每个子序列包含有较多的零元素，是一个 M PSK＋序列集。这类序列在应用中会造成信号的能量损失，能量效率是衡量 PSK＋序列能量损失的参数[17]。对于序列集 $\boldsymbol{S}$ 中每个子序列长度为 L，零元素数目为 $N'\cdot(Z-1)$，计算能量效率为

$$\eta=\frac{L-N'\cdot(Z-1)}{L}=\frac{1}{Z} \tag{17}$$

当零相关区 Z 较大时序列能量效率很低。下面利用完备序列对序列集 $\boldsymbol{S}$ 进行调制，得到序列不含零元素的多相 ZCZ 周期互补序列集。

定理 2　设 $\boldsymbol{a}=(a(0),a(1),\cdots,a(Z-1))$ 是一个长度为 Z 的 P 相完备序列，序列集 $\boldsymbol{S}$ 是一个由定理 1 得到的参数为 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L$ 的 ZCZ 周期互补序列集，$L=N'Z$。其中 $N'=N/M$，且 $\gcd(N',Z)=1$。将序列 $\boldsymbol{a}$ 每个元素后加上 $N'-1$ 个连续 0 元素，得到一个新的完备序列如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{a}}&=(\tilde{a}(0),\tilde{a}(1),\cdots,\tilde{a}(L-1))\\&=\Big(a(0),\overbrace{0,\cdots,0}^{N'-1},a(1),\overbrace{0,\cdots,0}^{N'-1},\cdots,a(Z-1),\overbrace{0,\cdots,0}^{N'-1}\Big)\end{aligned} \tag{18}$$

序列 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 的每个元素可以表示为

$$\tilde{a}(t)=\begin{cases} a(k), & t=kN' \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{19}$$

利用基序列集 $\boldsymbol{S}$ 经序列 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 调制得到一个新的序列集 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}^0,\boldsymbol{C}^1,\cdots,\boldsymbol{C}^{N-1}\}$ 如式(20)~式(22)：

$$\boldsymbol{C}^n=\{\boldsymbol{C}_0^n,\boldsymbol{C}_1^n,\cdots,\boldsymbol{C}_{M-1}^n\},\ 0\le n\le N-1 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{C}_m^n=(c_m^n(0),c_m^n(1),\cdots,c_m^n(L-1)),\ 0\le m\le M-1 \tag{21}$$

$$c_m^n(k)=\sum_{t=0}^{N-1}s_m^n(t)\cdot\tilde{a}(t+k),\ 0\le t\le L-1 \tag{22}$$

序列集 $\boldsymbol{C}$ 是一个 R 相的 ZCZ 周期互补序列集，参数为 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L$，其中 $R=lcm(P,Q)$。

证明　由引理 1 可知，序列集 $\boldsymbol{C}$ 中序列相关函数值与序列集 $\boldsymbol{S}$ 中序列相关函数值相同，故序列集 $\boldsymbol{C}$ 是一个参数为 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L$ 的 ZCZ 周期互补序列集。下面证明序列集中序列都是不含零元素的 R 相序列，$R=lcm(P,Q)$。

设 $\boldsymbol{s}_m^n=(s_m^n(0),s_m^n(1),\cdots,s_m^n(L-1))$ 是互补序列 $\boldsymbol{S}^n$ 中的一个子序列，$\boldsymbol{S}^n\in\boldsymbol{S}$。根据定理 1 构造过程，由于初始正交矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的元素 $h_{t,k}\in\{W_Q^q,0\le q\le Q-1\}$，$W_Q^q=e^{j\frac{2\pi q}{Q}}$，$j=\sqrt{-1}$，可知子序列 $\boldsymbol{s}_m^n$ 的非零元素 $s_m^n(t)\in\{W_Q^q,0\le q\le Q-1\}$。已知完备序列 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 的非零元素 $\tilde{a}(t)\in\{W_P^p,0\le p\le P-1\}$。由于 $c_m^n(k)=$

$\sum_{t=0}^{N-1} s_m^n(t)\cdot\tilde{a}(t+k)$，证明序列元素 $c_m^n(k)\in W_R^r, r\in Z_R$。只需证明对于任意的 $0\le t\le N-1$，$s_m^n(t)\cdot\tilde{a}(t+k)$ 只有一个非零值。由式(11)，式(14)和式(18)可得

$$s_m^n(t)\cdot\tilde{a}(t+k) = \begin{cases} h_{n,mN'+k_1}\cdot a(k_2), & t=k_1\cdot Z=k_2N'-k \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (23)$$

可知，只需证明对于任意的 $0\le t\le N-1$ 有唯一整数对 (k_1,k_2) 使得 $k_1\cdot Z+k=k_2N'$ 成立。由 $\gcd(N',Z)=1$ 可知，存在唯一整数对 (x,y) 使得 $xN'+yZ=1$ 成立，其中 x 或 y 为负数。不失一般性，设 y 为负数，令 $y'=-y$。可得 $xN'=y'Z+1$，进一步得 $kxN'=ky'Z+k$。因此当 k 固定时，对于任意的 $0\le t\le N-1$，只有唯一整数对 (ky',kx) 使得 $k_1\cdot Z+k=k_2N'$ 成立。

证毕

由定理 2 可知，可以通过选取不同的完备序列来得到不同相数的 ZCZ 周期互补序列集。在实际应用中，多相序列的不同相数对应着不同的相位调制方式。因此本文方法可以根据通信系统中的调制方式来灵活地设定序列的相数。

定理 3　序列集 $\boldsymbol{C}$ 参数达到理论界限，是一个最佳的多相 ZCZ 周期互补序列集。

证明　对于本文所构造的ZCZ周期互补序列集 $(N,Z)\mathrm{PCS}_M^L, L=N'Z$，其中 $N'=N/M$。根据 ZCZ 互补序列集界限[8]，设 M_O 表示 ZCZ 周期互补序列集中序列数目的理论上限，则有

$$M_O = M\left\lfloor\frac{L}{Z}\right\rfloor = M\left\lfloor\frac{NZ}{ZM}\right\rfloor = N \quad (24)$$

由式(24)可见，序列集中互补序列数目达到了理论上界，是一个最佳 ZCZ 周期互补序列集。　证毕

4 构造方法比较及实例

本文方法基于正交矩阵构造了一类参数达到理论界限的最佳多相 ZCZ 周期互补序列集，序列集参数如子序列数目、零相关区长度等都可以灵活设定。并且还可以通过选取不同的完备序列来调制得到不同的多相序列集。表 1 列出了已有的一些 ZCZ 周期互补序列集。

表 1 中 $R=lcm(Q,P)$，P 为完备序列的相数。$L=M'Z+r, 0\le r\le Z-1$。由表 1 可知，本文方法具有以下优势：

(1)本文方法得到的 ZCZ 周期互补序列集具有更加灵活的参数，不但可以灵活设定零相关区长度，而且子序列的数目也可以灵活设定。在多载波 CDMA 系统中，每个子序列通过一个不同频率的子载波发送，本文得到的 ZCZ 周期互补序列集可以根据实际子载波数目需要灵活地设定子序列数目。另外本文方法还可以通过选取不同的完备序列来改变 ZCZ 周期互补序列集的相数。在实际应用中，Q 相序列对应着 Q-PSK 调制。本文得到的序列集可以根据实际通信系统中的相位调制方式灵活地设定序列相位，因而具有更大的应用前景。

(2)已有的构造方法都采用周期互补序列集作为初始序列，得到的 ZCZ 周期互补序列集参数受限于初始的周期互补序列集参数。只有当初始周期互补序列集参数达到理论界限，即 $M=N$ 时才能得到最佳 ZCZ 周期互补序列集。本文方法利用正交矩阵作为初始序列，得到的 ZCZ 周期互补序列集参数都是能达到理论界限的。另外，与周期互补序列集相比，正交矩阵的存在数目具有很大优势。因而本文方法可以构造出更多的 ZCZ 周期互补序列集。

例 1　取 8×8 阶的 Hadamard 矩阵：

表 1 几类 ZCZ 周期互补序列集

构造方法	初始序列	ZCZ 周期互补序列集参数	是否达到理论界限	零相关区长度可否灵活设定	子序列数目可否灵活设定	相数
文献[11]定理 1	二元周期互补集 $\mathrm{PCS}(N,M,L)$	$(2NM',Z)\mathrm{PCS}_M^{2L}$	当 $M=N$ 时达到理论界	是	否	2
文献[11]定理 2	二元周期互补集 $\mathrm{PCS}(N,M,L)$	$(NM',Z)\mathrm{PCS}_M^{L}$	当 $M=N$ 时达到理论界	是	否	4
文献[10]	Q 相周期互补集 $\mathrm{PCS}(N,M,L)$	$(NM',Z)\mathrm{PCS}_M^{L}$	当 $M=N$ 时达到理论界	是	否	Q
文献[12]	Q 相周期互补集 $\mathrm{PCS}(N,M,L)$	$(2NM',Z)\mathrm{PCS}_M^{2L}$	当 $M=N$ 时达到理论界	是	否	Q
本文定理 2	$N\times N$ 阶的 Q 相正交矩阵	$(N,Z)\mathrm{PCS}_M^{NZ/M}$	是	是	是	R

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} +&+&+&+&+&+&+&+\\ +&-&+&-&+&-&+&-\\ +&+&-&-&+&+&-&-\\ +&-&-&+&+&-&-&+\\ +&+&+&+&-&-&-&-\\ +&-&+&-&-&+&-&+\\ +&+&-&-&-&-&+&+\\ +&-&-&+&-&+&+&- \end{bmatrix} \tag{25}$$

设定 $M=2$, $Z=3$。利用一个长度为 3 的 3 相完备序列 $\boldsymbol{a}=(W_3^0,W_3^2,W_3^0)$ 构造长度为 12 的完备序列：$\tilde{\boldsymbol{a}}=(W_3^0,0,0,0,W_3^2,0,0,0,W_3^0,0,0,0)$。根据定理 2 得到序列集 $\boldsymbol{C}$，下面用 $\{0,1,2,3,4,5\}$ 来代替 $\{W_6^0,W_6^1,W_6^2,W_6^3,W_6^4,W_6^5\}$。

$$\boldsymbol{C}=\begin{Bmatrix} (002002002002); & (002002002002)\\ (032305032305); & (032305032305)\\ (035005302332); & (035005302332)\\ (005302332035); & (005302332035)\\ (002002002002); & (335335335335)\\ (032305032305); & (305032305032)\\ (035005302332); & (302332035005)\\ (005302332035); & (332035005302) \end{Bmatrix} \tag{26}$$

可以验证，序列集 $\boldsymbol{C}$ 是一个参数为 $(8,3)\mathrm{PCS}_2^{12}$ 的 6 相 ZCZ 周期互补序列集，参数达到理论上界。

例 2 选取一个 9×9 阶的 DFT 矩阵：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0,W_9^0\\ W_9^0,W_9^1,W_9^2,W_9^3,W_9^4,W_9^5,W_9^6,W_9^7,W_9^8\\ W_9^0,W_9^2,W_9^4,W_9^6,W_9^8,W_9^1,W_9^3,W_9^5,W_9^7\\ W_9^0,W_9^3,W_9^6,W_9^0,W_9^3,W_9^6,W_9^0,W_9^3,W_9^6\\ W_9^0,W_9^4,W_9^8,W_9^3,W_9^7,W_9^2,W_9^6,W_9^1,W_9^5\\ W_9^0,W_9^5,W_9^1,W_9^6,W_9^2,W_9^7,W_9^3,W_9^8,W_9^4\\ W_9^0,W_9^7,W_9^5,W_9^3,W_9^1,W_9^8,W_9^6,W_9^4,W_9^2\\ W_9^0,W_9^8,W_9^7,W_9^6,W_9^5,W_9^4,W_9^3,W_9^2,W_9^1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

设定参数 $M=3$, $N'=3$, $Z=4$。利用二元完备序列 $\boldsymbol{a}=(1,1,1,-1)$ 根据定理 2 方法得到长度为 12 的完备序列：$\tilde{\boldsymbol{a}}=(1,0,0,1,0,0,1,0,0,-1,0,0)$。根据定理 1 和定理 2，调制后得到一个 18 相 ZCZ 周期互补序列集：$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}^0,\boldsymbol{C}^1,\cdots,\boldsymbol{C}^8\}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^0=\{&(W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9,W_{18}^0,\\ &W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9);(W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9,W_{18}^0,W_{18}^0,\\ &W_{18}^0,W_{18}^9,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9);(W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,\\ &W_{18}^9,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^0,W_{18}^9)\}\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^1=\{&(W_{18}^0,W_{18}^2,W_{18}^4,W_{18}^9,W_{18}^2,W_{18}^4,W_{18}^0,W_{18}^{11},W_{18}^4,\\ &W_{18}^0,W_{18}^2,W_{18}^{13});(W_{18}^6,W_{18}^8,W_{18}^{10},W_{18}^{15},W_{18}^8,W_{18}^{10},\\ &W_{18}^6,W_{18}^{17},W_{18}^{10},W_{18}^6,W_{18}^8,W_{18}^1);(W_{18}^{12},W_{18}^{14},W_{18}^{16},\\ &W_{18}^3,W_{18}^{14},W_{18}^{16},W_{18}^{12},W_{18}^5,W_{18}^{16},W_{18}^{12},W_{18}^{14},W_{18}^7)\}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^2=\{&(W_{18}^0,W_{18}^4,W_{18}^8,W_{18}^9,W_{18}^4,W_{18}^8,W_{18}^0,W_{18}^{13},W_{18}^8,\\ &W_{18}^0,W_{18}^4,W_{18}^{17});(W_{18}^{12},W_{18}^{16},W_{18}^2,W_{18}^3,W_{18}^{16},W_{18}^2,\\ &W_{18}^{12},W_{18}^7,W_{18}^2,W_{18}^{12},W_{18}^{16},W_{18}^{11});(W_{18}^6,W_{18}^{10},W_{18}^{14},\\ &W_{18}^{15},W_{18}^{10},W_{18}^{14},W_{18}^6,W_{18}^1,W_{18}^{14},W_{18}^6,W_{18}^{10},W_{18}^5)\}\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^3=\{&(W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^{12},W_{18}^9,W_{18}^6,W_{18}^{12},W_{18}^0,W_{18}^{15},W_{18}^{12},\\ &W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^3);(W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^{12},W_{18}^9,W_{18}^6,W_{18}^{12},\\ &W_{18}^0,W_{18}^{15},W_{18}^{12},W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^3);(W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^{12},\\ &W_{18}^9,W_{18}^6,W_{18}^{12},W_{18}^0,W_{18}^{15},W_{18}^{12},W_{18}^0,W_{18}^6,W_{18}^3)\}\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^4=\{&(W_{18}^0,W_{18}^8,W_{18}^{16},W_{18}^9,W_{18}^8,W_{18}^{16},W_{18}^0,W_{18}^{17},W_{18}^{16},\\ &W_{18}^0,W_{18}^8,W_{18}^7);(W_{18}^6,W_{18}^{14},W_{18}^4,W_{18}^{15},W_{18}^{14},W_{18}^4,\\ &W_{18}^6,W_{18}^5,W_{18}^4,W_{18}^6,W_{18}^{14},W_{18}^{13});(W_{18}^{12},W_{18}^2,W_{18}^{10},\\ &W_{18}^3,W_{18}^2,W_{18}^{10},W_{18}^{12},W_{18}^{11},W_{18}^{10},W_{18}^{12},W_{18}^2,W_{18}^1)\}\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^5=\{&(W_{18}^0,W_{18}^{10},W_{18}^2,W_{18}^9,W_{18}^{10},W_{18}^2,W_{18}^0,W_{18}^1,W_{18}^2,\\ &W_{18}^0,W_{18}^{10},W_{18}^{11});(W_{18}^{12},W_{18}^4,W_{18}^{14},W_{18}^3,W_{18}^4,W_{18}^{14},\\ &W_{18}^{12},W_{18}^{13},W_{18}^{14},W_{18}^{12},W_{18}^4,W_{18}^5);(W_{18}^6,W_{18}^{16},W_{18}^8,\\ &W_{18}^{15},W_{18}^{16},W_{18}^8,W_{18}^6,W_{18}^7,W_{18}^8,W_{18}^6,W_{18}^{16},W_{18}^{17})\}\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^6=\{&(W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^6,W_{18}^9,W_{18}^{12},W_{18}^6,W_{18}^0,W_{18}^3,W_{18}^6,\\ &W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^{15});(W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^6,W_{18}^9,W_{18}^{12},W_{18}^6,\\ &W_{18}^0,W_{18}^3,W_{18}^6,W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^{15});(W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^6,\\ &W_{18}^9,W_{18}^{12},W_{18}^6,W_{18}^0,W_{18}^3,W_{18}^6,W_{18}^0,W_{18}^{12},W_{18}^{15})\}\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^7=\{&(W_{18}^0,W_{18}^{14},W_{18}^{10},W_{18}^9,W_{18}^{14},W_{18}^{10},W_{18}^0,W_{18}^5,W_{18}^{10},\\ &W_{18}^0,W_{18}^{14},W_{18}^1);(W_{18}^6,W_{18}^2,W_{18}^{16},W_{18}^{15},W_{18}^2,W_{18}^{16},\\ &W_{18}^6,W_{18}^{11},W_{18}^{16},W_{18}^6,W_{18}^2,W_{18}^7);(W_{18}^{12},W_{18}^8,W_{18}^4,\\ &W_{18}^3,W_{18}^8,W_{18}^4,W_{18}^{12},W_{18}^{17},W_{18}^4,W_{18}^{12},W_{18}^8,W_{18}^{13})\}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^8=\{&(W_{18}^0,W_{18}^{16},W_{18}^{14},W_{18}^9,W_{18}^{16},W_{18}^{14},W_{18}^0,W_{18}^7,W_{18}^{14},\\ &W_{18}^0,W_{18}^{16},W_{18}^5);(W_{18}^{12},W_{18}^{10},W_{18}^8,W_{18}^3,W_{18}^{10},W_{18}^8,\\ &W_{18}^{12},W_{18}^1,W_{18}^8,W_{18}^{12},W_{18}^{10},W_{18}^{17});(W_{18}^6,W_{18}^4,W_{18}^2,\\ &W_{18}^{15},W_{18}^4,W_{18}^2,W_{18}^6,W_{18}^{13},W_{18}^2,W_{18}^6,W_{18}^4,W_{18}^{11})\}\end{aligned} \tag{36}$$

序列集参数为 $(9,4)\mathrm{PCS}_3^{12}$，是一个最佳 ZCZ 周期互补序列集。

5 结束语

本文构造了一类多相 ZCZ 周期互补序列集。得到的序列集参数达到了 ZCZ 周期互补序列集的理论界限，是一类最佳的 ZCZ 周期互补序列集。与已有

方法相比，本文方法不但可以灵活设定相关区长度，而且还可以灵活设定子序列的数目以及序列的相数，因而在实际应用中可以适应不同场合的需求。同已有方法不同，本文方法基于正交矩阵，通过选取不同的正交矩阵就可以得到不同的ZCZ周期互补序列集。目前来看，正交矩阵的研究成果非常丰富，因此通过本文方法可以构造出更多的ZCZ周期互补序列集。

参 考 文 献

[1] Golay Marcel J E. Complementary series[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1961, 7(2): 82–87.

[2] Tseng Chin-chong. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644–652.

[3] Leopold B and Markus A. Perioidc complementary binary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, 36(6): 1487–1494.

[4] Feng Ke-qin, Jau-Shyong P, and Xiang Shiue-Qing. On aperiodic and periodic complementary binary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(1): 296–303.

[5] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping and Zhang Zhen-yu, *et al.*. Quaternary periodic complementary/Z-complementary sequence sets based on interleaving technique and gray mapping[J]. *Advances in Mathematics of Communications*, 2012, 6(2): 237–247.

[6] Fan Ping-zhi, Yuan Wei-na, and Tu Yi-feng. Z-complementary binary sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(8): 509–512.

[7] Feng Li-fang, Zhou Xian-wei, and Li Xin-yu. A general construction of Inter-Group complementary codes based on Z-complementary codes and perfect periodic cross-correlation codes[J]. *Wireless Personal Communications*, 2012, DOI: 10.1007/s11277-012-0837-6.

[8] Feng Li-fang, Fan Ping-zhi, and Tang Xiao-hu. The construction of GOS spreading codes sets and their applications into multi-rate multe-cell QS-CDMA systems [J]. *Wireless Personal Communications*, 2012, DOI:10.1007/s11277-012-0831-z.

[9] Feng Li-fang, Fan Ping-zhi, and Zhou Xian-wei. Lower bounds on correlation of Z-Complementary code sets[J]. *Wireless Personal Communications*, 2013, DOI: 10.1007/s11277-013-1090-3.

[10] Tu Yi-feng, Fan Ping-zhi, Hao Li, *et al.*. A simple method for generating optimal Z-periodic complementary sequence set based on phase shift[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(10): 891–893.

[11] 李玉博, 许成谦, 李刚. 二元及四元零相关区周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(1): 115–120.
Li Yu-bo, Xu Cheng-qian, and Li Gang. Constructions of binary and quaternary periodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(1): 115–120.

[12] Feng Li-fang, Zhou Xian-wei, and Fan Ping-zhi. A construction of inter-group complementary codes with flexible ZCZ length[J]. *Journal of Zhejiang University Science C*, 2011, 12(10): 846–854.

[13] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al.*. New construction method for quaternary aperiodic, periodic, and Z-complementary sequence sets[J]. *Journal of Communications and Networks*, 2012, 14(3): 230–236.

[14] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al.*. 16-QAM Golay, periodic and Z-complementary sequence sets[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2012, E95-A(11): 2084–2089.

[15] Chen Ching-wei, Liu Yen-cheng, and Su Y T, Systematic constructions of zero-correlation zone sequences[C]. Proceedings of 2009 IEEE International Symposium on Information Theory, Seoul, Korea, 2009: 119–123.

[16] Boztas S, *et al.*. Nonbinary sequences with perfect and nearly perfect autocorrelations[C]. Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Information Theory, Austin, Texas, 2010: 1300–1304.

[17] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zeng Xiang-yong, *et al.*. Perfect 8-QAM+ sequences[J]. *IEEE Wireless Communcations Letters*, 2012, 1(4): 388–391.

李玉博：　男，1985年生，讲师，研究方向为扩频序列设计.

许成谦：　男，1961 年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.

刘　凯：　女，1977 年生，副教授，研究方向为扩列设计、扩频通信、编码理论.

李　刚：　男，1979 年生，讲师，研究方向为编码理论研究、最佳离散信号设计.