

基于迭代二阶锥的唯相位波束形成

路成军 盛卫星* 韩玉兵 马晓峰

(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

摘要: 唯相位自适应波束形成技术对普通相控阵雷达自适应干扰抑制是非常重要的, 在数字阵列雷达中, 唯相位技术则可以充分利用各阵元发射模块微波功率从而提高雷达的威力。该文提出了一种新的唯相位波束形成方法, 假定初始唯相位权重矢量有个较小的相位扰动, 将唯相位模型的目标函数和约束函数在该相位扰动区域内分别用泰勒一阶展开式来近似, 则可以将原来的非凸问题转化为凸优化问题, 通过二阶锥规划方法(SOCP)求得使当前目标函数最小的扰动矢量, 然后更新得到新的权重矢量并代替原来的权重矢量, 重复上述迭代过程直到满足停止条件, 可以得到满足要求的唯相位权重。计算机仿真结果验证了该方法的正确性和有效性。

关键词: 阵列信号处理; 数字波束形成; 唯相位; 泰勒展开; 凸优化; 二阶锥规划

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)02-0266-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00593

Phase-only Beamforming Based on Iterative Second-order Cone

Lu Cheng-jun Sheng Wei-xing Han Yu-bing Ma Xiao-feng

(School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The adaptive phase-only beamforming technique is very important for conventional phased array radar to suppress interference. For the digital array radar, the phase-only technique can be used to enhance the radar power by making full use of transmitting module microwave power of each array element. In this paper, a novel phase-only algorithm is proposed. Assuming that the initial phase weight vector has a small phase perturbation, the objective function and constraint function can be replaced by the first-order Taylor expansion, thus the original non-convex problem becomes the convex optimization problem, which can be solved using Second-Order Cone Programming (SOCP). The new weight vector is obtained through updating the current weight vector using the solved perturbation vector. The current weight vector is replaced by the new weight vector and the above procedure is repeated until the array pattern meets the termination condition. The computer simulation results demonstrate the correctness and effectiveness of the proposed approach.

Key words: Array signal processing; Digital beamforming; Phase-only weighting; Taylor expansion; Convex optimization; Second-Order Cone Programming (SOCP)

1 引言

波束形成技术通过调整阵列发射或接收的加权, 从而达到阵列方向图主瓣对准期望信号, 零陷对准干扰的目的, 已广泛应用于雷达、声呐、无线通信、声学、地震学和医学等领域。近年来学者针对模波束形成、稳健波束形成、波束形成的通道校准等方面进行了深入研究, 并取得了一定成果^[1-5]。上述波束形成算法往往需要对幅度和相位同时加权, 而唯相位波束形成技术只需要改变移相器的相位, 已有的相控阵雷达稍加改进就能实现唯相位的

自适应干扰抑制, 并且唯相位技术可以避免幅度加权造成的能量损失, 从而成为当前的一个研究热点。目前, 国外已有一些学者对唯相位技术进行了相关的基础研究, 国内目前鲜有对此方面研究的报道。国外已有的研究成果中, 文献[6]通过调整移相器相位使各阵元输出信号相位一致, 从而使阵列输出功率最大, 在计算每个阵元的相位权重时需要使用6次功率测量值, 但是该方法只适用于接收信号中不存在干扰的情况下。文献[7]通过非线性编程技术来解决唯相位波束形成问题, 可以在指定干扰位置形成零陷。文献[8]介绍了一种小相位扰动算法, 在初始方向图基础上通过相位扰动, 调整副瓣零点位置对准干扰方向。文献[9]将相位权重映射到波束空间中, 从而将搜索空间从 m 维(阵元数)降到 n 维(干扰

2013-04-27 收到, 2013-08-23 改回

国家自然科学基金(11273017)资助课题

*通信作者: 盛卫星 shengwx@njjust.edu.cn

数),最后在波束空间中,通过小相位扰动算法在指定方向形成零陷。文献[10]提出了大相位扰动算法,用来在方向图的对称位置置零。文献[11]利用唯相位加权在方向图指定角度范围内形成宽的零陷,并使用文献[9]中方法将权重映射到波束空间中,在波束空间中使用搜索算法来得到唯相位权重。文献[12]介绍了两种迭代的唯相位数值计算方法,根据目标函数的特殊结构,每次迭代过程中固定其余的阵元相位,只计算其中一个或两个阵元的相位权重。文献[13]利用遗传算法来优化阵列天线中的唯相位权重,用数字移相器来近似表示实际的相位,然后将相位编码通过交叉、变异和选择等进化操作来调整移相器的相位。文献[14]提出基于 Schelkunoff 单位圆的唯相位零陷算法,用 z 平面上的多项式来表示阵列方向图,然后将该阵列多项式表示成子多项式乘积形式,次数最高的子多项式对应方向图主瓣,调整其它的子多项式在单位圆上的根的位置到干扰位置上,即可在指定方向上形成零陷。文献[15]利用半正定松弛技术来优化唯相位问题,在指定角度范围内可以形成比较宽的凹槽零陷。上述方法虽然都能在指定位置形成零陷,但是需要预先估计干扰的角度位置,并不能自适应地抑制干扰信号。文献[16]提出可以同时实现波束赋形和自适应干扰抑制的唯相位方法,通过迭代方式找到使目标函数最小的最优解,每次迭代过程需使用 3 次功率测量值。文献[17]以阵列输出信号干扰噪声比为目标函数,推导了该目标函数的梯度和 Hessian 矩阵,然后通过共轭梯度法和牛顿迭代法来搜索唯相位最优权。由于目标函数输出信干噪比在相位空间中存在很多局部极值点,因此相位初始值选取显得尤为重要,否则容易陷入局部最优。文献[18]提出基于直接数据域的唯相位最小二乘波束形成算法,并通过共轭梯度法求解相位权重,但是和传统的直接数据域算法一样,唯相位直接数据域方法也存在着自适应方向图旁瓣电平较高等不足。

本文提出了一种新的唯相位波束形成方法,在相位扰动量比较小的情况下,目标函数和约束函数可以用相位矢量的泰勒一阶展开式来近似,此时原来的非凸问题可以转化为凸优化问题,并通过二阶锥规划方法求得使当前目标函数最小的扰动矢量,然后更新得到新的权重矢量并代替原来的权重矢量,重复上述过程直至满足终止条件,最后可以得到满足要求的唯相位权重。

本文其余部分结构安排如下:第2节介绍信号模型;第3节提出本文的唯相位方法;第4节进行计算机仿真;第5节对本文方法进行总结。

2 信号模型

考虑一 N 元均匀间隔线性天线阵,如图1所示。有 M 个不相关的窄带信号入射,包括1个期望信号和 $M-1$ 个干扰信号,信号入射角度 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$,则天线阵列在 t 时刻接收到的信号可表示为

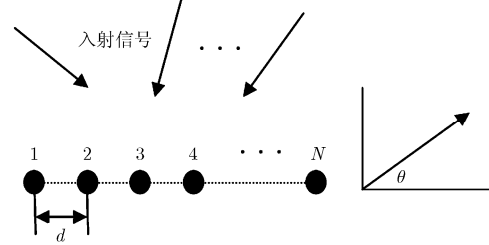


图1 均匀线性阵列

$$\mathbf{x}(t) = s_0(t)\mathbf{a}(\theta_0) + \sum_{i=1}^{M-1} s_i(t)\mathbf{j}(\theta_i) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $s_0(t)$ 为期望信号复包络, $\mathbf{a}(\theta_0)$ 为期望信号的导向矢量; $s_i(t)$ 为干扰信号的复包络, $\mathbf{j}(\theta_i)$ 为干扰信号的导向矢量, $i = 1, 2, \dots, M-1$; $\mathbf{n}(t)$ 为背景噪声,假设背景噪声为高斯白噪声。阵列接收数据的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \quad (2)$$

式中 \mathbf{H} 表示共轭转置。

在实际应用中,阵列协方差矩阵是通过有限次快拍数据估计得到,即

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (3)$$

式中 $\hat{\cdot}$ 表示对变量的估计; K 为快拍数。

阵列加权输出为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{w} \in T^n$, 定义 T^n 为 n 维相位空间,即权重系数幅度是保持恒定不变的,只有相位分量可以改变。

3 迭代二阶锥唯相位算法

线性约束最小方差准则(LCMV)是通过最小化阵列输出的功率来降低干扰和噪声的增益,但保持对期望信号增益不变,从而提高信号干扰噪声比,即

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{a}^H \mathbf{w} = 1 \end{array} \right\} \quad (5)$$

其中 \mathbf{w} 为权重系数, $\mathbf{w} \in T^n$, \mathbf{a} 为期望信号导向矢量。对于常规的幅度和相位都自适应的 LCMV 波束形成器,可以很容易得到最优权重系数。

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \alpha \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a} \quad (6)$$

其中 α 为一个复常数,但是在唯相位波束形成器中,由于 $\mathbf{w} \in T^n$,此时式(5)变成一个非凸问题,难以求得精确的解析解。

因为 $\mathbf{w} \in T^n$,于是可以将 \mathbf{w} 表示为相位矢量的形式:

$$\mathbf{w} = (e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}, \dots, e^{j\phi_N})^T \quad (7)$$

如果每个相位分量分别有个小的相位扰动,即 $\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta_i, i = 1, 2, \dots, N$, 其中 \rightarrow 表示变量变化到,则权重矢量的相位扰动可表示为

$$\mathbf{w} \rightarrow e^{j\Delta} \mathbf{w} \quad (8)$$

其中

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

将式(5)的优化问题变换为如式(10)形式:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} = 1 \end{array} \right\} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{a}\mathbf{a}^H$ 。假设有函数 $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{A}\mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in T^n$ 。下面将函数 $f(\mathbf{w})$ 在相位空间中进行泰勒展开。首先将 $e^{j\Delta}$ 写成级数形式,有

$$e^{j\Delta} = \mathbf{I} + j\Delta - \frac{1}{2!} \Delta^2 - \frac{1}{3!} j\Delta^3 + \dots \quad (11)$$

因为 Δ 是对角矩阵,根据式(11)可知, $e^{j\Delta}$ 也为一对角矩阵。式(11)中等式两边同乘以 \mathbf{w} 得到

$$e^{j\Delta} \mathbf{w} = \mathbf{w} + j\Delta \mathbf{w} - \frac{1}{2!} \Delta^2 \mathbf{w} - \frac{1}{3!} j\Delta^3 \mathbf{w} + \dots \quad (12)$$

将式(12)代入函数 $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{A}\mathbf{w}$ 中,得到

$$f(e^{j\Delta} \mathbf{w}) = (e^{j\Delta} \mathbf{w})^H \mathbf{A}(e^{j\Delta} \mathbf{w}) = \mathbf{w}^H (e^{-j\Delta} \mathbf{A} e^{j\Delta}) \mathbf{w} \quad (13)$$

因为

$$\begin{aligned} e^{-j\Delta} \mathbf{A} e^{j\Delta} &= \left(\mathbf{I} - j\Delta + \frac{1}{2!} \Delta^2 + \dots \right) \\ &\cdot \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + j\Delta - \frac{1}{2!} \Delta^2 + \dots \right) \\ &= \mathbf{A} - j(\Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Delta^2 \mathbf{A} + 2\Delta \mathbf{A} \Delta - \mathbf{A} \Delta^2) + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

于是,得到

$$\begin{aligned} f(e^{j\Delta} \mathbf{w}) &= (e^{j\Delta} \mathbf{w})^H \mathbf{A}(e^{j\Delta} \mathbf{w}) = \mathbf{w}^H e^{-j\Delta} \mathbf{A} e^{j\Delta} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H [\mathbf{A} - j(\Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta) \\ &\quad + (1/2)(\Delta^2 \mathbf{A} + 2\Delta \mathbf{A} \Delta - \mathbf{A} \Delta^2) + \dots] \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} - j\mathbf{w}^H (\Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta) \mathbf{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{w}^H (\Delta^2 \mathbf{A} + 2\Delta \mathbf{A} \Delta - \mathbf{A} \Delta^2) \mathbf{w} + \dots \quad (15) \end{aligned}$$

在 Δ 比较小的情况下,省去式(15)中的高次项,得到

$$\begin{aligned} f(e^{j\Delta} \mathbf{w}) &\approx \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} - j\mathbf{w}^H (\Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} - j(\mathbf{w}^H \Delta \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{A} \Delta \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} - j[\text{tr}(\mathbf{w}^H \Delta \mathbf{A} \mathbf{w}) - \text{tr}(\mathbf{w}^H \mathbf{A} \Delta \mathbf{w})] \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} - j\text{tr}[\Delta (\mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{w}^H - \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{A})] \quad (16) \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{w}^H - \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{A}$ 是反Hermitian矩阵,所以 $\mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{w}^H - \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{A}$ 元素都是虚数。令 $\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \text{Im} \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{w}^H - \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{A})$, 其中 Im 表示取虚部, diag 表示取矩阵的对角线元素。可以将式(16)化简为

$$f(e^{j\Delta} \mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{g}^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} \quad (17)$$

其中 $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T$ 。根据式(17),将式(10)中的目标函数和约束函数分别进行泰勒一阶展开,并用上下约束代替恒等约束,得到新的优化问题模型:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\delta}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{g}_1^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} + \mathbf{g}_2^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} \leq U \\ \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} + \mathbf{g}_2^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} \geq L \\ \|\boldsymbol{\delta}\| \leq \delta_{\max} \end{array} \right\} \quad (18)$$

其中 $\boldsymbol{\delta}$ 是优化变量, δ_{\max} 是正实数, U 和 L 分别是期望信号增益的上界和下界,将增益上界约束和下界约束合并,可以得到

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\delta}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{g}_1^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} \\ \text{s.t. } \left| \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} + \mathbf{g}_2^H(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} - \frac{L+U}{2} \right| \leq \frac{U-L}{2} \\ \|\boldsymbol{\delta}\| \leq \delta_{\max} \end{array} \right\} \quad (19)$$

可以看出,式(19)是个凸优化问题,可以通过SOCP方法求解。求解问题(19)可以得到当前约束条件下使目标函数最小的相位矢量 $\boldsymbol{\delta}$ 。因此,本文算法流程如下:

- (1) 选择初始唯相位权重 $\mathbf{w}^0 = \mathbf{a}/(\mathbf{a}^H \mathbf{a})$;
- (2) 计算 $\mathbf{g}_1(\mathbf{w}^k)$ 和 $\mathbf{g}_2(\mathbf{w}^k)$, \mathbf{w}^k 是第 k 次的权重;
- (3) 根据式(19)计算 $\boldsymbol{\delta}$;
- (4) 更新权重矢量 $\mathbf{w}^{k+1} = e^{j\Delta} \mathbf{w}^k$;
- (5) 判断是否满足终止条件,若不满足则重复步骤(2)到步骤(5),若满足则停止算法迭代,输出唯相位权重。

4 计算机仿真

假设阵列为含11个阵元的等距线阵,阵元间距为半波长,如图1所示。来自不同方向的远场窄带信号互不相关,而其信号与加性噪声也不相关。期望

信号来波方向为 100° ，噪声功率为1，信噪比为0 dB，两个干扰信号来自 60° 和 130° 方向，干噪比均为30 dB，协方差矩阵通过500次快拍数据估计得到。仿真程序中，设置参数 U 和 L 分别为1.1和0.9， $\delta_{\max} = 0.02$ ，当输出功率小于1.05时算法终止。图2比较了本文方法与文献[17]和文献[18]中唯相位方法及传统LCMV算法的自适应方向图。

图2中实线为本文唯相位算法形成的波束图。虚线为文献[17]中方法波束图，点线为文献[18]中方法波束图，点划线代表幅度和相位同时自适应的传统LCMV算法波束图。可以看出，本文中唯相位算法与文献[17]中方法及传统LCMV方法性能基本一致，主波束指向期望信号方向，在 60° 和 130° 方向形成两个深的零陷。文献[18]中的方法也可以在干扰方向形成较深的零陷，但是文献[18]中方法主波束产生严重的畸变，且旁瓣电平抬高。图3所示为采用本文唯相位算法各个权重分量的相位。

图4所示是输出信号干扰噪声比SINR随输入信噪比SNR变化的曲线，图中结果由50次Monte Carlo实验得到。由图4可知，本文方法与传统LCMV算法性能基本接近，而文献[17]中方法在小信噪比情况下输出SINR比本文方法和传统LCMV算法要低一些。

图5所示是输出SINR随输入数据样本长度变化的曲线，输入信噪比0 dB，其它参数保持不变。圆圈线表示本文的相位自适应算法，星号线表示传统

LCMV算法，图中结果由50次Monte Carlo实验得到。可以看出本文的唯相位算法在数据样本较少的情况下性能优于传统LCMV算法，随着数据样本变大，输出SINR趋于最优值。

图6所示为阵列输出功率随迭代次数变化的曲线。随着迭代次数增加，输出功率值逐渐收敛到1，此时输出信号中只有期望信号。图中可以看出，迭代到40次后算法就已经基本收敛。

图7给出了输出SINR随 δ_{\max} 变化的曲线。文中唯相位问题模型是在泰勒展开的基础上提出的，模型中忽略高次项的条件是 Δ 比较小。因此 δ_{\max} 越小， Δ 就越小，模型越精确， δ_{\max} 越大，误差越大，此时输出SINR会降低。但是 δ_{\max} 太小会影响算法的收敛速度，需要迭代次数变多。因此选取 δ_{\max} 要在精度和速度之间做一个权衡，在精度影响不大的情况下尽量选取大一点的 δ_{\max} 。

表1比较了本文算法和文献[18]中算法的运算时间。 $\delta_{\max} = 0.11$ ，计算机硬件配置：Intel双核CPU，主频均为2.53 GHz，内存2 GB，采用Matlab仿真软件。由表1可知，文献[18]中算法运行时间在阵元数较小的情况下小于本文算法，但是随着阵元数变大，文献[18]算法运算时间增加很快，而本文算法运算时间变化不大，更能满足实际应用中大阵元场合下的需求，对实际工程具有指导意义。

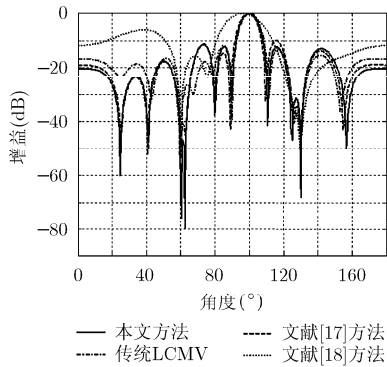


图2 4种算法波束图比较

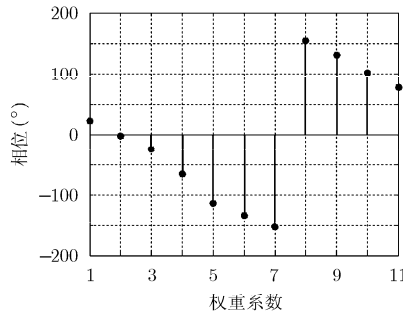


图3 本文唯相位算法权重系数相位

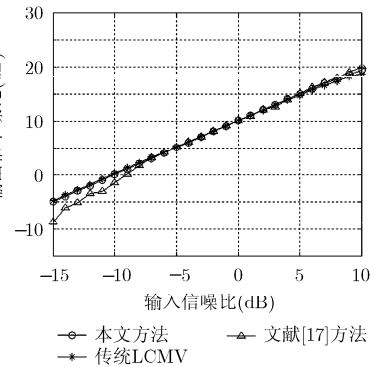


图4 输出SINR随输入SNR的变化曲线

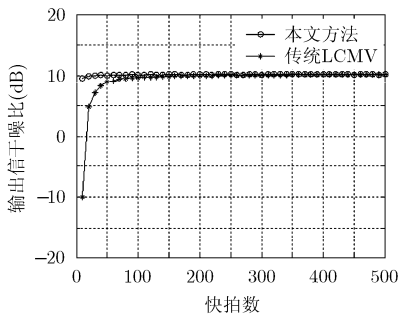


图5 输出SINR随数据样本长度变化曲线

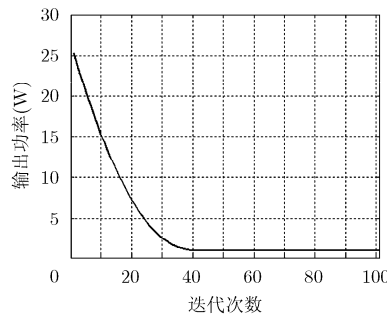


图6 输出功率随迭代次数变化曲线

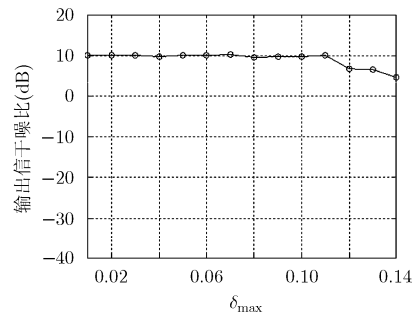


图7 输出SINR随 δ_{\max} 变化曲线

表1 运行时间比较(s)

阵元数	文献[18]方法	本文算法
11	0.1406	1.9828
21	0.3125	2.0094
31	0.5656	2.0265
41	0.9437	2.0298
51	2.4391	2.0468

5 结论

本文提出了一种新的唯相位波束形成算法,在相位扰动量比较小的情况下,目标函数和约束函数可以用相位矢量的泰勒一阶展开式来近似,此时原来的非凸问题可以转化为凸优化问题,并通过二阶锥规划方法求得使当前目标函数最小的扰动矢量,然后更新得到新的权重矢量并代替原来的权重矢量,重复迭代上述过程直到满足终止条件。计算机仿真表明,本文提出的唯相位算法可以有效地在干扰方向形成零陷,输出SINR接近传统LCMV波束形成器。

参考文献

- [1] 易锋, 孙超. 总体最小二乘算法模波束形成方法研究[J]. 声学学报, 2013, 38(1): 35-41.
Yi Feng and Sun Chao. Matched-mode beamforming based on total least square algorithm[J]. *Acta Acustica*, 2013, 38(1): 35-41.
- [2] 杨杰, 李春晓, 马永阳. 基于Bayesian准则的鲁棒自适应波束形成算法[J]. 杭州电子科技大学学报, 2012, 32(4): 17-20.
Yang Jie, Li Chun-xiao, and Ma Yong-yang. Robust adaptive beamforming algorithm based on Bayesian criteria[J]. *Journal of Hangzhou Dianzi University*, 2012, 32(4): 17-20.
- [3] Gu Yujie and Amir Leshem. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3881-3885.
- [4] 李洪涛, 贺亚鹏, 肖瑶, 等. 基于压缩感知的单通道鲁棒自适应波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(10): 2421-2426.
Li Hong-tao, He Ya-peng, Xiao Yao, et al. Compressive sensing based single-channel robust adaptive beamforming algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(10): 2421-2426.
- [5] 郑东卫, 白亚莉. 阵列雷达接收通道校正技术分析[J]. 火控雷达技术, 2012, 41(3): 44-48.
Zheng Wei-dong and Bai Ya-li. Receiving channel calibration technology for array radar[J]. *Fire Control Radar Technology*, 2012, 41(3): 44-48.
- [6] Leavitt M K. A phase adaptation algorithm[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1976, 24(5): 754-756.
- [7] Shore R A. The use of nonlinear programming techniques for phase-only null synthesis[C]. Antennas and Propagation Society International Symposium, USA, 1983: 207-210.
- [8] Steyskal H. Simple method for pattern nulling by phase perturbation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1983, 31(1): 163-166.
- [9] Baird C A and Rassweiler G G. Adaptive sidelobe nulling using digital controlled phase-shifters[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1976, 24(5): 638-649.
- [10] Shore R A. Nulling at symmetric pattern location with phase-only weight control[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984, 32(5): 530-533.
- [11] Giusto R and Vincenti P D. Phase-only optimization for the generation of wide deterministic nulls in the radiation pattern of phased arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1983, 31(5): 814-817.
- [12] Khzmalyan A D and Kondrat'yev A S. Fast iterative methods for phase-only synthesis of antenna array pattern nulls[J]. *Electronic Letter*, 1995, 31(8): 601-602.
- [13] Haupt R L. Phase-only adaptive nulling with a genetic algorithm[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997, 45(6): 1009-1015.
- [14] Mismar M J, Ismail T H, and Abu-Al-Nadi D I. Analytical array polynomial method for linear antenna arrays with phase-only control[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2007, 61(7): 485-492.
- [15] Kajenski P J. Phase only antenna pattern notching via a semidefinite programming relaxation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(5): 2562-2565.
- [16] Khzmalyan A D and Kondratiev A S. The phase-only shaping and adaptive nulling of an amplitude pattern[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(2): 264-272.
- [17] Smith S T. Optimum phase-only adaptive nulling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(7): 1835-1843.
- [18] Choi W S and Sarkar T K. Phase-only adaptive processing based on a direct data domain least squares approach using the conjugate gradient method[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, 52(12): 3265-3272.

路成军: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、自适应波束形成技术。
盛卫星: 男, 1966年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为数字波束形成、智能天线、电磁散射模型以及图像处理。
韩玉兵: 男, 1971年生, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为阵列信号处理、视频图像处理。
马晓峰: 男, 1981年生, 讲师, 主要研究方向为雷达信号处理、MIMO以及高速数字信号处理。