第 36 卷第 1 期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.36 No.1
2014 年 1 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Jan. 2014

比特交织编码调制(迭代译码)系统标识映射的对称性研究与应用

张建勇*　　延凤平
①(北京交通大学全光网络与现代通信网教育部重点实验室　北京　100044)
②(北京交通大学光波技术研究所　北京　100044)

摘　要：该文从群论的角度分析了比特交织编码调制(迭代译码)(BICM(-ID))系统中标识映射的对称性。首先给出了标识映射对称性的定义，并指出，二进制标识映射的对称性是 BICM(-ID)系统的固有特性，该对称性同构于 m 阶超立方的对称群。然后基于 BICM(-ID)的对称性，提出一种改进的二进制交换算法(IBSA)。该算法的搜索空间为标识映射对称群陪集的代表系。因此，与传统的二进制算法相比，IBSA 的搜索效率得到了提高。最后，2 维 16 阶星座图的仿真结果表明，在 40000 次的运行过程中，IBSA 能提高 4%的搜索效率；32 阶相移键控星座图的仿真结果表明，该算法至少可提高 3.5%的搜索效率，单个映射的计算时间缩短了约 4000 倍。

关键词：无线通信；比特交织编码调制；标识映射；群理论；对称性；二进制交换算法
中图分类号：TN92　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2014)01-0048-07
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00382

The Symmetries of Mappings of Bit-interleaved Coded Modulation (with Iterative Decoding) Systems and Its Applications

Zhang Jian-yong　　Yan Feng-ping
①(*Key Lab of All Optical Network & Advanced Telecommunication Network of Ministry of Education of the People's Republic of China, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)
②(*Institute of Lightwave Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

Abstract: Based on the group theory, the symmetries of mappings of Bit-Interleaved Coded Modulation (or with Iterative Decoding) systems (BICM(-ID)) are studied. Firstly, the definitions of the symmetries of mappings for BICM (-ID) are given. The symmetries of binary labels of a mapping are the intrinsic properties of BICM(-ID), which are isomorphic to the symmetry group of a hypercube of order m. According to the symmetries of BICM (-ID), an Improved Binary Switch Algorithm (IBSA) is proposed. The search space of IBSA is a transversal of the symmetry group of mappings. Consequently, the efficiency of IBSA is improved compared to the traditional BSA. Finally, Simulation results of a 16-ary two dimensional constellation show that the search efficiency of IBSA can be improved about 4% during 40000 trials. For 32-PSK, the results show that the search efficiency can be improved at least 3.5% and the time required to calculate a single mapping is shorten about 4000 times.

Key words: Wireless communication; Bit-Interleaved Coded Modulation (BICM); Mapping; Group theory; Symmetries; Binary Switch Algorithm (BSA)

1　引言

比特交织编码调制(BICM)系统或比特交织编码调制迭代译码(BICM-ID)系统作为一种高频谱效率的传输方案，被广泛应用于现代无线通信系统中，如 HSPA[1], IEEE 802.1 a/g/n[2]及 DVB[3]等标准。相比 Turbo 译码器需要两个软输入软输出(SISO)译码器，BICM(-ID)只需要一个 SISO 译码器，因此，BICM(-ID)具有实现复杂度较低，可以将编码和调制分开设计，结构简单及灵活等特点，也同样使得 BICM(-ID)系统在高斯信道中也获得了广泛的应用。众多研究表明，标识映射方式、星座图、交织器及分量码等因素决定了 BICM(-ID)的性能，文献[4-6]分析了功率受限时最佳的标识映射及星座图；Caire 等人[7]研究了 BICM 系统下的标识映射及误码率；文献[8-12]分析了 BICM-ID 系统下的最优标识映射及误码率；Brannstrom 等人[13]针对 8-PSK 所

2013-03-26 收到，2013-06-13 改回
国家自然科学基金(61102048)，国家自然科学基金重点项目(60837002)，国家 973 计划项目(2010CB328206)，中央高校基本科研业务费专项资金(2011JBM208)和北京交通大学人才基金(2006RC022)资助课题
*通信作者：张建勇　jyzhang@bjtu.edu.cn

有映射方式进行了分类；Agrell 等人[14]研究了 BICM 系统中的交织器的优化；Chindapol 等人[15]分析了瑞利信道下 BICM-ID 系统的性能；Tran 等人[16]研究了所有超立方星座图的最优标识映射问题，给出了最优解。其中，标识映射问题常常利用合适的代价函数转化为最优化问题[7,8,16]，但一般而言，代价函数依赖于信噪比。对于调制阶数较低的星座图，最优标识映射可以通过穷举法找到关于代价函数的最优解，如 Brannstrom[13]对 8-PSK 所有映射方式进行了分类，总结并对比了前人[8−11]关于 8-PSK 标识映射的研究；Schreckenbach 等人[8,12]给出了 16QAM 中的最优标识映射。但对于高阶调制系统，由于最优标识映射问题的搜索空间巨大，使得最优标识映射极难求出，如对于 32 阶的星座图，其标识映射的搜索空间为 $32!\approx 2.6\times 10^{35}$。目前，较为有效的算法为二进制交换算法(BSA)[8,12]，但该算法需要进行多次随机运行，且一般得到的解是局部最优解。最近的研究表明[4−6,14]，没有一个标识映射能够使得所有信噪比情况下的系统性能达到最优。

针对 BICM 系统中标识映射的问题，本文将分析 BICM(-ID)标识映射的基本特性——对称性。该特性不仅可以对标识映射进行归类，也可以缩小标识映射的搜索空间，进而提高 BSA 算法的搜索效率。最常见的对称性来源于规则星座图，如 M-PSK, QAM 或基于格状星座图等。本文的研究表明，对称性不仅源于规则星座图，也源于二进制标识自身的对称性，且该特性与信噪比无关。并且，二进制标识的对称性不依赖于星座图的对称性，是 BICM 系统的固有特性。虽然经过优化的非规则星座图性能较好[17]，但规则星座图应用更为广泛，并且研究表明，经过优化的规则星座图性能接近于非规则星座图[18]。因此，本文也将分析星座图的对称性。

2　BICM(-ID)系统的对称性

2.1 BICM(-ID)系统的结构

BICM(-ID)系统的结构如图 1 所示，二进制的信息流经过编码器和交织器Π后形成二进制的数据流 $\boldsymbol{c}$。m 个数据比特构成了二进制标识 $\boldsymbol{c}=(c(1),\cdots,c(m))\in\{0,1\}^m$。调制器按照标识映射规则 u 发送符号 x，其中，标识映射规则为 $x=u(\boldsymbol{c})$,x 从调制器的星座符号集 χ 中选取，星座符号集的大小为$|\chi|=2^m$。系统接收到的信号为 $r=hx+n$，其中，n 为零均值的加性高斯噪声，若信道为瑞利信道，h 为零均值的高斯信号，若信道为加性高斯信道(AWGN), h=1。在接收端，通过软解调制器及解交织器 Π^{-1} 将软信息送入译码器，解码后得到译码后的信息流。若为 BICM-ID 系统，译码器还需要和软解调制器相互交换概率信息，如图 1 中虚线部分所示。具体的 BICM(-ID) 系统软信息解调原理可参考文献[7, 8−10]。

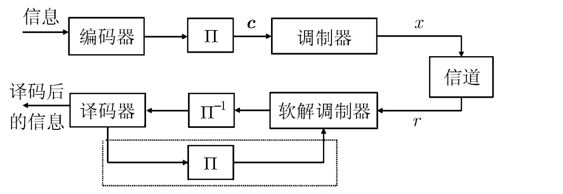


图 1 BICM(-ID)的系统结构

2.2 m 阶汉明超立方与二进制标识的对称性

根据文献[7,8,12]可知，BICM(-ID)系统性能取决于式(1)表示的代价函数：

$$\delta(u,\chi)\frac{1}{m2^m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{x_j\in\chi}\sum_{z_k\in\chi^i_{j,\bar b}} f\left(\left\|x_j-z_k\right\|\right) \tag{1}$$

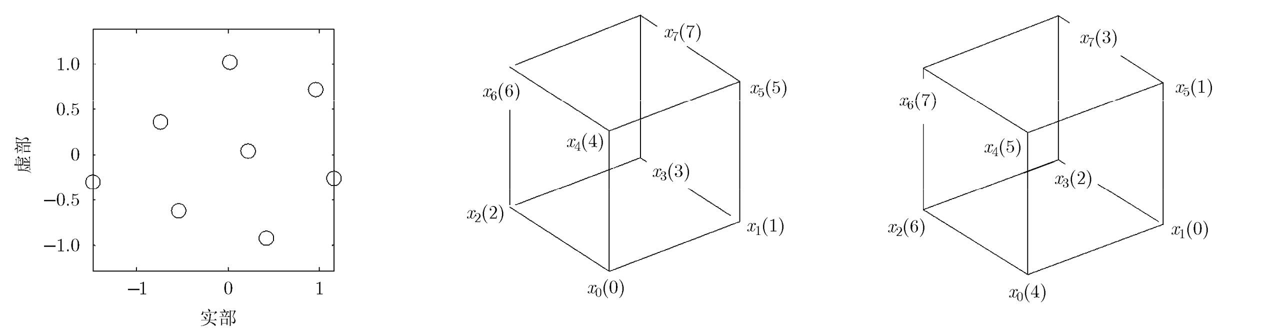
其中，符号 $x_j\in\chi$, $j=0,\cdots,2^m-1$，其标识的第i位为b，$\chi^i_{j,\bar b}$ 表示所有标识第i位为 $\bar b$ 的符号集合，对于瑞利信道，$f(x)=1/x^2$，对于AWGN，$f(x)=\exp(-x^2/(4N_0))$，N_0为双边功率谱密度。

根据代价函数可知，若系统存在不依赖于信噪比的对称性，则$\delta(u,\chi)$在某个二进制标识的变化规则下，各求和项应当保持不变。于是，本文定义二进制标识映射对称性如下：

定义 1　设系统的两个标识映射规则为u_1和u_2，若有一个双向单射函数 $\alpha:\{0,1\}^m\to\{0,1\}^m$，满足 $x_j=u_1(c_j)=u_2(\alpha(c_j))$，且使得对于所有的 x_j, $\{\chi^i_{j,\bar b}:i=1,\cdots,m\}$ 保持不变，则称系统的标识映射规则关于 α 对称。

在数学中，群的概念常常用来描述对称性。从二进制标识映射的定义可知，所有标识映射的集合构成了一个置换群$\mathrm{Sym}(2^m)$，其阶为$2^m!$。因而，符合定义1的所有双向单射函数 α 的集合构成了 $\mathrm{Sym}(2^m)$的一个子群，而该子群的陪集的指数则是 BICM(-ID)系统非重复映射的个数。

如图2(a)所示，本文选用文献[17]中的2维8阶星座图作为例子来说明二进制标识的对称性。该星座不具备任何对称性，可以避免星座图对称性对二进制标识对称性的影响。为了方便描述，在下文中采用有序序列$C_k=(c_{k,1},\cdots,c_{k,2^m})$代表某个标识映射规则$u_k$，即$x_j=u_k(c_{k,j})$, $k\in[0,\cdots,2^m!-1]$。本文给出两个映射$C_1=(0,1,2,3,4,5,6,7)$ 及 $C_2=(4,0,6,2,5,1,7,3)$，如图2(b)和图2(c)所示，其中，标识$c_{k,j}$采用十进制数表示，如$5_{10}=011_2$。在图2中，本文将映射规则表示在一个3阶的汉明立方上，并且使用$x_j(c_{k,j})$来标识每个顶点。从图2可以清楚的看出，C_1和C_2是一个旋转对称关系。通过穷举，本文发现映射C_1和C_2的



(a)非规则的8阶星座图　　(b) C_1　　(c) C_2

图2 8阶星座图及其映射

$\{\chi^i_{j,\bar{b}}\}$完全相同。例如，对于符号x_2，如果系统为BICM-ID，则集合$\{\chi^i_{2,\bar{b}}\}=\{x_0, x_6, x_3\}$保持不变；如果系统为BICM，则集合$\{\chi^i_{2,\bar{b}}\}=\{\{x_0, x_1, x_4, x_5\},\{x_4, x_5, x_6, x_7\},\{x_1, x_3, x_5, x_7\}\}$保持不变。最后，也可以采用文献[7]中成对差错概率的定义，通过数值方法验证这两种映射的系统性能完全相同。

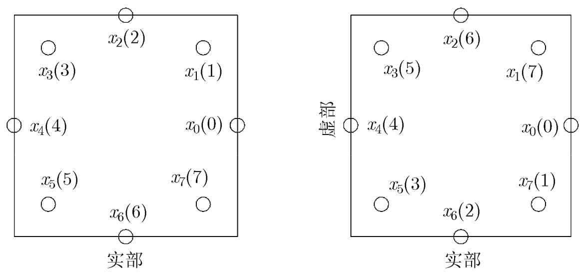
基于以上分析，本文将该例推广到2^m阶星座图。2^m阶星座图的二进制标识可以看作是m维汉明超立方体的顶点。m维超立方体具有旋转及镜像对称性，即对于所有顶点，任意交换多个比特的位置或对其中的多个比特取非，仍会得到m维汉明超立方，但顶点的排列顺序发生了改变，即得到了不同的映射。m维超立方的所有对称性也构成一个群，该群一般表示为$\mathrm{BC}_m=\mathrm{Sym}(2)\,Wr\,\mathrm{Sym}(m)$，其中$Wr$为群的圈积，该群的阶数为$2^m m!$。因此，关于标识映射的对称性，有如下结论成立：

定理 1　对于任意星座图，任意一个标识映射是关于BC_m中所有的元素对称的。

证明　首先，BC_m中所有的对称操作是作用于在所有的标识上的，其次，比特位置交换操作只改变集合$\{\chi^i_{j,\bar{b}}\}$的排列次序，而比特取非并不改变$\{\chi^i_{j,\bar{b}}\}$所包含的元素，由于$\{\chi^i_{j,\bar{b}}\}$具有次序无关性，因此，集合$\{\chi^i_{j,\bar{b}}\}$并未发生改变。于是，根据标识映射对称性的定义可以得到以上结论。　　证毕

2.3 星座图的对称性

本文以8阶相移键控信号(8-PSK)为例来说明星座图的对称性。8-PSK的星座图为$\{x_j=\exp(-j\pi/4)\}$，其不仅有旋转对称性，而且还有镜像对称性。图3给出了两个对称的8-PSK映射，$C_3=(0,1,2,3,4,5,6,7)$及$C_4=(0,7,6,5,4,3,2,1)$。从图3可以看出，C_3及C_4是关于实轴对称的。同样可以验证这两个星座图的性能相同，但是这两个映射并不是关于BC_m对称的。这表明，定义1只能用来表示二进制标识的对称性，但不适用于星座图的对称性。因此，本文采用如下方式定义星座图的对称性：



(a) C_3　　(b) C_4

图3 相互对称的两个8-PSK映射

定义 2　设系统的两个标识映射规则为u_1和u_2，若有一个双向单射函数 $\alpha:\{0,1\}^m\rightarrow\{0,1\}^m$，满足$x_j=u_1(c_j)=u_2(\alpha(c_j))$，且使得对于所有的$x_j$，多重集$\{\,\|x_j-x_p\|: x_p\in\chi^i_{j,\bar{b}}: i=1,\cdots,m\}$保持不变，则称系统的标识映射规则关于$\alpha$对称。

根据定义2，很容易验证C_3及C_4是满足定义2的，同时也可以验证C_1及C_2也同样满足定义2。从本文给出的对称性的定义可以看出，符合定义1的映射必然关于定义2对称，反之则不一定成立。

3　一种改进的二进制交换算法(IBSA)

3.1 伪代码实现

传统的BSA算法在寻找最优映射的过程中，常常随机选取一个初始映射，通过标识交换来不断地降低代价函数值。一般而言，单次BSA算法只能得到局部最优解，通常需多次随机运行BSA算法才能得到近似全局最优解[12]。由于相互对称的映射具有相同的性能，传统的BSA算法在运行过程中将会计算大量的对称映射，从而影响BSA算法的随机搜索效率，且该搜索效率常常随运行次数的增加而下降。因此，本文给出了一种改进的二进制交换算法(IBSA)，即通过避免搜索相互对称的映射，以提高BSA算法的运行效率，其单次搜索的步骤如表1所示。

假定具有对称关系的映射群为$S(M)$，其阶数为

M。该群可由二进制标识对称性构成，也可以包含全部或部分的星座图对称性。根据群论可知，通过$S(M)$能将对称群$\mathrm{Sym}(2^m)$分解为多个互不相交的右陪集，$\mathrm{Sym}(2^m)=S(M)\ddot{u}_1\cup S(M)\ddot{u}_2\cup\cdots\cup S(M)\ddot{u}_q$，其指数$q=(2^m!)/M$，其中，$\{\ddot{u}_l{:}\,l=1,\cdots,(2^m!)/M\}$为$\mathrm{Sym}(2^m)$的右陪集代表系。在表1中，$u_l$为随机生成的唯一代表映射；利用传统BSA算法经过一次标识交换得到的映射为$\hat{u}_l$，即表示为$\hat{u}_l=\sigma(u_l)$；函数γ：$\mathrm{Sym}(2^m)\rightarrow\mathrm{Sym}(2^m)$将映射$\hat{u}_l$转换为其对应的唯一代表映射$\ddot{u}_l$，即$\ddot{u}_l=\gamma(\hat{u}_l)$；已经搜索过的唯一代表映射集合为$A$。

表1 IBSA算法的伪代码

```
输入：u_l, A，且u_l∉A
输出：ü_l, A
ú_l = u_l;
While TRUE
    û_l = σ (ú_l);
    ü_l = γ (û_l);
    if û_l ≠ ú_l
        if  ü_l ∉ A
            A = {ü_l} ∪ A;
            ú_l = ü_l;
        else
            不输出ü_l;
             break;
        end
    else
         A={ü_l} ∪ A;
         break;
    end
end
```

从表1中可以看出，该算法将原BSA算法每次交换得到的映射转化为唯一代表映射，由于代表系$\{\ddot{u}_l\}$是互不对称的，这种做法的实质是将BSA的搜索空间从原来的对称群$\mathrm{Sym}(2^m)$缩小为某个代表系$\{\ddot{u}_l\}$。因此，IBSA算法能保证相互对称的映射只被搜索一次。由于代表系的大小通常远小于对称群$\mathrm{Sym}(2^m)$，与传统的BSA算法相比，该算法通常能大大提高搜索效率。

3.2 基于指示函数的代表映射

根据表1可知，改进算法的关键问题是寻找代表系$\{\ddot{u}_l\}$。相比群的表示问题，代表系$\{\ddot{u}_l\}$是很容易求出的，其表示方式也是多种多样的。因此，需要找到一个函数γ，使得$\ddot{u}_l=\gamma(u)$对于所有$u\in S(M)\ddot{u}_l$都成立。由于代表系$\{\ddot{u}_l\}$及A的引入，增大了算法的复杂度及搜索压力。为了简化搜索及代表系的计算过程，本文提出了一种基于指示函数的代表系。

对称群$\mathrm{Sym}(2^m)$与非负整数集$[0,\ 2^m!-1]$存在一一对应关系，即存在指示函数$\lambda{:}\,\mathrm{Sym}(2^m)\rightarrow[0,\ 2^m!-1]$。一般而言，当$m\geq5$时，$2^m!$无法直接使用双精度数值在计算机中准确描述，使得指示函数的运用受到了极大的限制。根据2.2节可知，映射能表示为长度为2^m的向量，如C_1和C_2。为方便使用指示函数，本文将形如C_1或C_2的向量视为2^m进制表示的数值，例如，C_1可以视作8进制数值40625173_8，并包含8位有效数字。由于每个映射都存在一一对应的2^m进制数值，这两种表示方式可以不做区分。指示函数也可以表示为，$\lambda{:}\,\mathrm{Sym}(2^m)\rightarrow V_{2^m}$，其中$V_{2^m}$代表$2^m$进制的数值集合。于是，基于指示函数的代表系可以由式(2)表示：

$$\gamma(u_l)=\lambda^{-1}\left[\min\left[\lambda\left(S(M)u_l\right)\right]\right] \tag{2}$$

其中$\min{:}\,Z^*\rightarrow Z^*$是求取极小值的函数，$Z^*$是非负整数集。从式(2)可以看出，由于指示函数采用整数表示，且所有的运算都是整数运算，对于高阶系统来说，该函数可极大地简化$\{\ddot{u}_l\}$的计算复杂度。

式(2)首先要求计算出u_l的对称集合$S(M)u_l$。本文定义置换函数$\rho{:}\,\mathrm{Sym}(2^m)\times S(M)\rightarrow\mathrm{Sym}(2^m)$为

$$u_k=\rho(u_l,\eta) \tag{3}$$

其中u_k是经过次序交换后的函数；$t\in[0,2^m!-1]$；η是对称群$S(M)$中的一个元素，代表一种交换次序；交换前和交换后的映射满足$c_{k,j}=c_{t,\eta_j}$。

同时，定义排序函数Sort为

$$[j_s]_{1\times2^m}=\mathrm{Sort}([c_j]) \tag{4}$$

其中j_s, $s\in[0,2^m-1]$, $c_{j_1}\leq\cdots\leq c_{j_s}\leq\cdots\leq c_{j_{2^m}}$。

利用式(3)和式(4)所表示的两种函数ρ和Sort，则可以计算出$S(M)u_l$。例如，若$\eta_{\mathrm{BC}}\in\mathrm{BC}_m$，则$\{\mathrm{Sort}(\rho(\mathrm{Sort}(u_l),\eta_{\mathrm{BC}}))\}$给出了关于$u_l$对称的映射集合。若$\eta_z\in Z_{2^m}$，$Z_{2^m}$为$2^m$阶循环群，则映射集合$\{\rho(\mathrm{Sort}(\rho(\mathrm{Sort}(u_l),\eta_{\mathrm{BC}})),\eta_z)\}$包含两种对称性，即二进制标识对称及星座图旋转对称。如式(3)所示，置换函数所需的群$S(M)$常常可以提前计算出来，使得置换函数可以简化为查表运算，降低运算量。而排序函数的运算对象不大，并且常常有成熟的算法可以利用，因此，使用这两个函数可大大简化对称群的计算，提高运行速度和搜索效率。

本文将以8-PSK为例详细说明唯一代表映射的提取过程。BC_3和Z_8的一部分如表2所示。取映射$C_5=(0,4,1,6,2,3,7,5)$，则关于C_5对称的部分映射如表2所示，通过计算可以得到，其基于指数函数的代表映射为(0,1,2,5,4,6,7,3)。

表2 关于C_5对称的部分映射

$\eta_{BC}\in BC_3$	$\eta_z\in Z_8$	Sort(ρ (Sort(u_l), η_{BC}))	ρ (Sort(ρ (Sort(u_l), η_{BC})), η_z)
0,4,2,6,1,5,3,7	0,1,2,3,4,5,6,7	0,1,4,3,2,6,7,5	0,1,4,3,2,6,7,5
1,5,3,7,0,4,2,6	7,0,1,2,3,4,5,6	4,5,0,7,6,2,3,1	1,4,5,0,7,6,2,3
2,6,0,4,3,7,1,5	6,7,0,1,2,3,4,5	2,3,6,1,0,4,5,7	5,7,2,3,6,1,0,4
3,7,1,5,2,6,0,4	5,6,7,0,1,2,3,4	6,7,2,5,4,0,1,3,	0,1,3,6,7,2,5,4

4 实验结果及分析

本文所有实验在4个台式机上完成，台式机配置为intel i5 CPU, 32 G 内存，Debian 64位操作系统，数值计算主要采用Matlab 2011b软件，采用SQLite数据库实现大数据量的存储与读写，4.2节的数值计算采用Matlab和C程序混合编程实现。

4.1 运行速度测试与分析

如第3节所述，IBSA算法增加了算法的复杂度，且需要搜索集合A，代表映射的求解时间是影响到算法实现的重要因素。为此，本文以BICM-ID系统为研究对象，选取m=3,4,5,6等2^m-PSK星座图，同时考虑了二进制标识的对称性和星座图的旋转对称性，给出利用Matlab程序计算唯一代表映射所需要的时间，如表3所示。

表3给出了BSA一次交换的计算时间，可以看出，对于较高阶数的星座图(m=5,6)，唯一代表映射的计算时间比BSA一次交换的计算时间要长，一般是4~10倍左右；对于m=3,4，计算时间基本上与一次交换时间相当。但由于IBSA算法采用唯一代表映射表示相互对称的映射，相当于扩大了BSA算法的搜索空间，一次交换可搜索的映射个数为$=2^m\times m!\times m$，且随m的增大呈指数增加趋势。由于传统的BSA算法一次交换只能搜索一个映射，因此，IBSA算法单个映射的搜索时间是急剧减少的，如表3所示。与传统的BSA算法相比，当m=6时，单次映射的计算时间t_0最多可缩短约2.6万倍，因此，从计算时间与已搜索过的映射个数综合考虑，IBSA算法能大幅提高计算效率。

从表1可知，IBSA算法还需要判断唯一代表映射是否被搜索。本文选用32-PSK，通过运行IBSA算法，最终得到了大约1×10^8个映射，平均搜索一次数据为所需大约为60 s左右。但由于该数据库存储在硬盘上，其速度受限于SQLite的存储格式及硬盘运转速度，并非理论上的极限。若不考虑存储问题，A可表示为数据结构中的树模型，该树每个节点最多有32个分支，该树的深度为32，理论上只需最多32次比较及查找运算，即可以完成搜索。因此，该算法从理论上来说，搜索压力并不是制约算法运行速度的主要因素。

4.2 效率分析

从表1可以看出，若在传统BSA算法搜索过程中，相互对称的映射比例越高，则说明IBSA算法越有效，越能提高搜索效率。本文给出了两个例子来说明对称性对传统BSA算法的影响。由于传统的BSA算法常常多次随机运行，因此每次BSA算法所计算的映射也是随机的。为加快BSA算法的运行速度，以下两个例子仅选取BICM-ID系统作为研究对象。为方便统计，本文统计了L次($L>>1$)传统BSA算法中对称映射的比例，即假设已搜索的映射集为B，其代表系为B_r，第L次BSA算法计算的所有映射为B_L，其中，第L次BSA算法中与B_r对称的映射为B_S，则对称映射所占的比例为$|B_S|/|B_L|$。

首先，本文仅考察二进制标识的对称性对BSA算法的影响。在该例中，选用文献[17]给出的2维16阶星座图，整个标识映射的搜索空间为$16!\approx2.09\times10^{13}$个映射，而二进制标识总共有$2^4 4!=384$种对称性，因此，对称性仅能使搜索空间减小300多倍，与巨大的搜索空间相比似乎看起微不足道。在传统的BSA算法中，随机选取初始映射，共运行BSA算法40,000次，搜索了430,042个映射，平均运行一次BSA算法约搜索10.75次映射。同时，根据二进制标识映射的对称关系，取L=1000，得到对称映射的比例如图4所示。从图中可以看出，具有对称关系的映射随BSA算法的运行次数直线上升，最高比例约达4%。

表3 唯一代表映射的计算时间(s)

	m=3	m=4	m=5	m=6
唯一代表映射的计算时间t_r	0.0016	0.0026	0.0530	0.8600
BSA算法一次交换的计算时间t_s	0.0034	0.0044	0.0140	0.0900
IBSA算法单个映射的计算时间 $t_0=(t_r+t_s)/(2^m\times m!\times m)$	3.5×10^{-5}	4.6×10^{-6}	3.5×10^{-6}	3.4×10^{-6}

但此时已搜索的映射个数才接近整个映射空间的两亿分之一。利用图4数据进行外插拟合可知，当对称映射的比例为90%时，此时的BSA的计算次数为1.26×10^6次，根据4.2节的计算结果，共有1.35×10^7个映射得到了计算，与巨大的搜索空间相比，只占据了搜索空间的极小部分。因此，从该仿真结果可以看出，由于具有对称关系的映射一直在线性增加，BSA算法将浪费越来越多的运行次数在已知的映射上，其效率持续降低。对于较低阶星座图(阶数小于等于16)，仅利用二进制标识的对称性已可大大提高IBSA算法的搜索效率。

其次，本文选取32阶相移键控信号(32-PSK)来考察二进制标识对称性及星座图对称性对BSA算法的影响。在传统的BSA算法中，随机选取初始映射，共运行BSA算法3.32×10^6次，约搜索了1.2×10^8个映射，平均运行一次BSA算法约搜索33.1次映射。相比整个搜索空间而言，BSA算法的搜索空间更是微不足道的。取L=5000，得到对称映射的比例如图5所示。标有方块的曲线是只考虑二进制标识对称的情况，从图中可以看出，虽然对称映射的比例随BSA算法的运行次数直线上升，但上升缓慢，且其最高的比例约达1.5%。标有圆圈的曲线是同时考虑二进制标识对称和星座图旋转对称的情况，从图中可以看出，对称映射的比例随BSA算法的运行次数直线上升，且其最高的比例约达6.3%。当BSA运行次数小于3.1×10^5时，对称映射的比例快速上升，这也反映出尽管搜索次数较少，但由于代表系远远小于整个搜索空间，对称性也能大大提高搜索效率。当运行次数较小时，由于样本空间较少，此时并不能完全体现出旋转对称性对系统性能的影响。随着BSA算法搜索次数的增加，对称映射比例的斜率逐渐趋于一个稳定值，旋转对称性对系统统性能的提高也逐渐趋于稳定。

最后，从两个不同阶数的仿真结果可以看出，对于较高阶星座图(阶数大于16)，不仅需利用二进制标识的对称性，同时也要尽可能的利用星座图的对称性来提高IBSA算法的搜索效率。并且，若系统只存在二进制标识的对称性，在有限的搜索空间下，该对称性同样可以提高IBSA算法的搜索效率。

5 结束语

本文研究了BICM或BICM-ID系统的对称性，给出了对称性的定义，并详细研究了BICM(-ID)中的二进制标识映射，同时提出了一种IBSA算法，通过仿真表明，该算法能避免重复计算相互对称的映射，可提高传统BSA算法的效率。但BICM(-ID)的对称性问题实质上是陪集代表系的表示问题，若能求解出该代表系，则排除了对称性的因素，能更好的研究BICM(-ID)系统特性与代表系之间的函数关系；同时也能避免存储和搜索已计算过的代表系，进一步提升改进BSA算法的运行速度。对于低阶置换群，该问题可通过现有软件解出，如GAP等[19]软件，但对于高阶复杂对称性问题，求解该类问题是比较困难的，该类问题也是本研究的下一步工作。

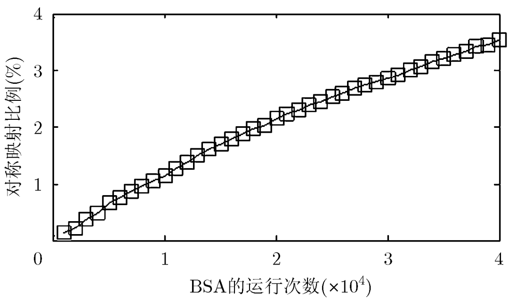


图4 对称映射的比例与BSA算法运行次数的关系

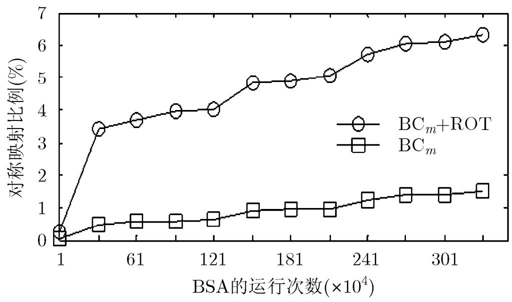


图5 对称映射的比例与BSA算法运行次数的关系

参 考 文 献

[1] 3GPP TS 125.212, V7.11.0 Release 7. Universal mobile telecommunications system (UMTS); multiplexing and channel coding (FDD)[S]. Sept. 2009.

[2] IEEE 802.11n-2009. Part 11: wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications. Amendment 5: Enhancements for higher throughout[S]. Oct. 2009.

[3] Douillard C and Nour C A. The bit interleaved coded modulation module for DVB-NGH: enhanced features for mobile reception[C]. 2012 19th International Conference on Telecommunications (ICT), Jounieh, Lebano, April 2012: 1–6.

[4] Agrell E and Alvarado A. Optimal alphabets and binary labelings for BICM at low SNR[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(10): 6650–6672.

[5] Agrell E and Alvarado A. First-order asymptotics of the BICM mutual information: uniform vs. nonuniform

distributions[C]. Proceedings of Information Theory and Applications Workshop (ITA) 2012, San Diego, USA, 2012: 306–310.

[6] Schenk A and Fischer R F H. Capacity of BICM using (Bi-) orthogonal signal constellations in the wideband regime[C]. 2011 IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB), Bologna, Italy, Sept. 2011: 595–599.

[7] Caire G, Taricco G, and Biglieri E. Bit-interleaved coded modulation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, 44(3): 927–946.

[8] Schreckenbach F, Gortz N, Hagenauer J, *et al*.. Optimization of symbol mappings for bit-interleaved coded modulation with iterative decoding[J]. *IEEE Communications Letters*, 2003, 7(12): 593–595.

[9] Jun Tan and Stuber G L. Analysis and design of symbol mappers for iteratively decoded BICM[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, 4(2): 662–672.

[10] Li Xiao-dong, Chindapol A, and Ritcey J A. Bit-interleaved coded modulation with iterative decoding and 8 PSK signaling[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2002, 50(8): 1250–1257.

[11] Yu Tsang-wei, Wang Chu-yan, Wang Chung-hsuan, *et al*.. EXIT-chart based labeling design for bit-interleaved coded modulation with iterative decoding[C]. Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2007), Nice, France, Jun. 2007: 56–60.

[12] Schreckenbach F. Iterative decoding of bit-interleaved coded modulation[D]. [Ph.D. dissertation], Munich University of Technology, Germany, 2007.

[13] Brannstrom F and Rasmussen L K. Classification of unique mappings for 8PSK based on bit-wise distance spectra[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(3): 1131–1145.

[14] Agrell E and Alvarado A. Achieving the Shannon limit with probabilistically shaped BICM[C]. Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT 2012), Cambridge, Massachusetts, USA, July 2012: 2421–2425.

[15] Chindapol A and Ritcey J A. Design, analysis, and performance evaluation for BICM-ID with square QAM constellations in Rayleigh fading channels[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2001, 19(5): 944–957.

[16] Tran N H and Nguyen H H. Design and performance of BICM-ID systems with hypercube constellations[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006, 5(5): 1169–1179.

[17] Beko M and Dinis R. Designing good multi-dimensional constellations[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2012, 1(3): 221–224.

[18] Forney G D, Jr.. Multidimensional constellations. II. Voronoi constellations[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1989, 7(6): 941–958.

[19] GAP Group. GAP-Groups, Algorithms, Programming — a system for computational discrete algebra[OL]. http://www.gap-system.org/, 2012. 12.

张建勇： 男，1977 年生，副教授，研究方向为信道理论、非线性光纤信道、光纤通信、信道编码等.

延凤平： 男，1966 年生，教授，博士生导师，主要从事光通信、全光网络、新型特种光纤及光纤器件、光纤传感及无线通信的研究.