

## 一类有信道状态的半确定性正交中继信道的容量

邓志祥<sup>①③</sup> 王保云<sup>\*①②</sup> 郎非<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(南京邮电大学通信与信息工程学院 南京 210003)

<sup>②</sup>(东南大学移动通信国家重点实验室 南京 210096)

<sup>③</sup>(河海大学物联网工程学院 常州 213022)

**摘要:** 该文研究了一类有信道状态的正交中继信道的容量。在该信道中,源节点到中继节点间的信道与源节点和中继节点到目的节点间的信道是正交的,且这两个正交信道的传输受到同一信道状态的控制,而信道状态在源节点和中继节点处是非因果已知的。基于叠加码,协作的 GP(Gel'fand-Pinsker) 编码以及部分译码前传(Partial-Decode-and-Forward, PDF)中继策略,该文首先得到了该信道的容量的下界。其次,针对半确定的正交中继信道,其目的节点的信道输出是中继节点信道输入、源节点信道输入以及信道状态的确定性函数,得到了该信道的容量的确切表达式。

**关键词:** 无线通信; 正交中继信道; 半确定性信道; 非因果的信道状态; 信道容量

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)11-2584-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00234

## Capacity of a Class of Semi-deterministic Relay Channel with Orthogonal Components and Channel State

Deng Zhi-xiang<sup>①③</sup> Wang Bao-yun<sup>①②</sup> Lang Fei

<sup>①</sup>(College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

<sup>②</sup>(National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, China)

<sup>③</sup>(College of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou 213022, China)

**Abstract:** A class of state-dependent relay channel with orthogonal channels from the source to the relay and from the source and the relay to the destination is studied. The two orthogonal channels are corrupted by a common channel state which is known to both the source and the relay non-causally. Based on superposition coding, cooperative GP (Gel'fand-Pinsker) coding and PDF (Partial-Decode-and-Forward) relaying, the lower bound on the capacity for this channel is established firstly. Then, for the semi-deterministic relay channel with orthogonal components whose receiver output is a deterministic function of the relay input, one of the source inputs and the channel state, the explicit capacity is characterized exactly.

**Key words:** Wireless communication; Relay channel with orthogonal components; Semi-deterministic channel; Non-causal channel state; Channel capacity

### 1 引言

当前,对有信道状态的信道的研究受到了广泛的关注<sup>[1]</sup>,因为依赖信道状态的信道模型可以建模多种通信问题,例如,受到加性干扰的高斯白噪声信道,信道状态可以建模该加性干扰。Shannon<sup>[2]</sup>首先考虑了有信道状态的单用户信道,假设源节点因果已知信道状态,得到了该信道的容量。若信道状态

在源节点处是非因果已知的, Gel'fand 等人<sup>[3]</sup>通过 GP(Gel'fand-Pinsker)编码得到了该信道的容量。文献[4]研究了源节点非因果已知信道状态的高斯白噪声信道,提出了脏纸编码(Dirty Paper Coding, DPC)策略,并证明通过 DPC,该信道的容量与没有干扰的信道的容量相同。

Gel'fand 等人<sup>[5]</sup>将有信道状态的单用户信道扩展到了多用户信道。对于有信道状态的退化广播信道,当源节点非因果已知信道状态时, Steinberg<sup>[6]</sup>得到了该信道的容量的内界和外界,而当源节点因果已知信道状态时,得到了信道的容量的确切表达式。文献[7-11]则研究了有信道状态的多址接入信

2013-02-27 收到, 2013-06-13 改回

国家自然科学基金(61271232, 60972045, 61071089), 江苏省高校研究生科研创新计划项目(CXZZ11\_0395)和东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金(2012D05)资助课题

\*通信作者: 王保云 bywang@njupt.edu.cn

道 (Multiple Access Channel, MAC) 的容量问题。文献[7]得到了一类部分用户非因果已知信道状态的 MAC 信道的容量区域的内界。对于一般的有信道状态的 MAC 信道, 确切的信道容量区域仍是未知的, 当前的研究结果仅得到了一些特定的有信道状态的 MAC 信道的容量区域<sup>[8-11]</sup>。

中继信道同时具有广播信道和 MAC 信道的特征。文献[12-17]研究了有信道状态的中继信道。若仅中继节点非因果已知信道状态, 文献[12]得到了该信道的容量的上界和下界, 文献[13]假设信道状态在中继节点是严格因果已知的, 基于网络编码思想, 提出了消息和状态协作发送的可达方案。文献[14, 15]则研究了仅源节点非因果已知信道状态的中继信道的容量问题, 文献[14]得到了信道容量的上界和下界, 而文献[15]假设信道是正交的, 且信道状态具有一定的结构, 提出了几种中继协作策略, 并得到了相应的可达码率。在文献[16]中, 假设源节点、中继节点和目的节点均非因果已知部分的信道状态信息, 基于有噪的网络编码和 GP 编码, 得到了信道容量的下界。文献[17]研究了正交的中继信道, 假设源到中继间的信道依赖于信道状态, 且信道状态在目的节点处是非因果已知的, 采用部分译码-压缩转发中继策略, 得到了该信道的容量。

然而, 对于一般的有信道状态的中继信道, 确切的信道容量往往难以得到, 即使是对没有信道状态的中继信道而言, 信道的容量也仅仅在一些特定的信道条件下是已知的, 例如, 物理退化或逆退化的中继信道<sup>[18]</sup>, 半确定的中继信道<sup>[19]</sup>, 一类确定性的中继信道<sup>[20]</sup>, 一类正交的中继信道<sup>[21]</sup>。对于有信道状态的中继信道而言, 信道容量往往也仅在一些特定的信道条件下是已知的, 例如: (1) 源节点和中继节点因果已知信道状态的物理退化中继信道; (2) 源节点和中继节点非因果已知信道状态的高斯退化中继信道。

本文研究了一类有信道状态的正交中继信道, 源节点通过信道 1 与中继节点通信, 源节点和中继节点通过信道 2 与目的节点通信, 信道 1 和信道 2 两者相互正交且都受到同一公共的信道状态  $S$  的控制, 且该信道状态在源节点和中继节点处非因果已知。针对此信道, 本文首先得到了该信道容量的下界。然而, 对于该信道而言, 即使源节点和中继节点均非因果已知信道状态, 其确切的容量表达式仍难以刻画。本文研究了一类有信道状态的半确定性的正交中继信道, 其目的节点的信道输出  $Y$  是中继信道输入  $X_r$ 、源节点信道输入  $X_D$  以及信道状态  $S$  的确定性函数, 即  $Y = f(X_D, X_r, S)$ , 本文得到了该

信道容量的确切表达式。这样的半确定的正交中继信道虽然是一种特殊的信道形式, 但对其容量的研究可以进一步揭示中继信道的特征, 可以为中继信道用户间协作策略的设计, 为寻求一般性中继信道的容量提供重要的理论参考。

**符号表示:** 本文通过大写字母表示随机变量, 对应的小写字母表示该随机变量的实例, 向量通过黑体字母表示。 $\mathbf{x}_i^j$  用于表示  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ , 而  $\mathbf{x}^i$  表示  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $x_i$  表示向量  $\mathbf{x}^n$  中第  $i$  个元素, 其中,  $1 \leq i \leq j \leq n$ 。随机变量  $X$  的概率分布用  $P_X$  表示, 给定  $X$ , 随机变量  $Y$  的条件概率分布表示为  $P_{Y|X}$ 。标量随机变量  $X$  的字母集用对应的书法体字母  $\mathcal{X}$  表示。集合  $\mathcal{A}$  的势表示为  $|\mathcal{A}|$ 。 $\mathcal{T}_\varepsilon^n(\mathcal{X})$  表示  $\varepsilon$ -典型序列  $\mathbf{x}^n \in \mathcal{X}^n$  的集合。

## 2 信道模型

如图 1 所示, 本文考虑有信道状态的正交中继信道, 表示为  $P_{Y, Y_r | X_R, X_D, X_r, S}$ , 其中,  $Y \in \mathcal{Y}$ ,  $Y_r \in \mathcal{Y}_r$  分别为目的节点和中继节点的信道输出,  $X_R \in \mathcal{X}_R$  和  $X_D \in \mathcal{X}_D$  为源节点的两个正交信道的输入, 而  $X_r \in \mathcal{X}_r$  是中继节点的信道输入,  $S \in \mathcal{S}$  表示信道状态。在时刻  $i$  的信道状态  $S_i$  服从分布  $Q_S$ , 且所有时刻的  $S_i$  是独立同分布的, 源节点和中继节点非因果已知信道状态  $S$ 。

消息  $W$  均匀分布于集合  $\mathcal{W} = \{1, 2, \dots, M\}$ 。源节点在中继节点的协作下通过  $n$  次信道利用向目的节点发送消息。设  $\mathbf{X}_R^n = (X_{R,1}, \dots, X_{R,n})$ ,  $\mathbf{X}_D^n = (X_{D,1}, \dots, X_{D,n})$ ,  $\mathbf{X}_r^n = (X_{r,1}, \dots, X_{r,n})$  分别为源节点和中继节点的信道输入, 信道分布满足式(1)条件时, 称为无记忆正交中继信道。

$$P(\mathbf{y}^n, \mathbf{y}_r^n | \mathbf{x}_R^n, \mathbf{x}_D^n, \mathbf{x}_r^n, \mathbf{s}^n) = \prod_{i=1}^n P(y_{r,i} | x_{r,i}, x_{R,i}, s_i) P(y_i | x_{r,i}, x_{D,i}, s_i) \quad (1)$$

源节点和中继节点非因果已知信道状态的正交中继信道的  $(M, n)$ -码包含如下组成部分:

源节点的编码函数:

$$\varphi^n : \{1, 2, \dots, M\} \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{X}_D^n \times \mathcal{X}_R^n \quad (2)$$

中继节点的编码函数:

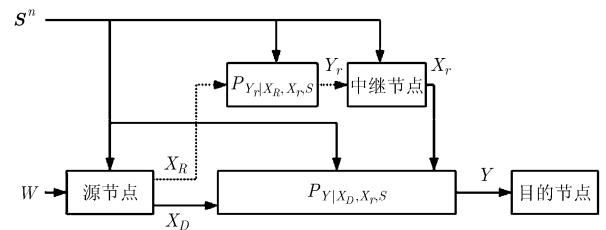


图 1 源节点和中继节点非因果已知信道状态的正交中继信道

$$\varphi_{r,i} : \mathcal{Y}_r^{i-1} \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{X}_r \quad (3)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ , 目的节点的译码函数:

$$\phi^n : \mathcal{Y}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$$

信息码率定义为

$$R = \frac{1}{n} \log_2 M \quad (\text{bit/trans.})$$

$(\varepsilon_n, n, R)$ -码为平均错误小于  $\varepsilon_n$  的编码, 即

$$\Pr(W \neq \phi^n(y^n)) \leq \varepsilon_n$$

当存在一系列  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  的  $(\varepsilon_n, n, R)$ -码时, 称码率  $R$  是可达的。信道容量定义为所有可达码率集合的上确界。

### 3 有信道状态的正交中继信道的容量下界

本节首先得到了如图 1 所示信道的容量的下界, 如定理 1 所示。在此基础之上, 当目的节点的信道输出  $Y$  满足  $Y = f(X_D, X_r, S)$  时, 得到了该半确定性正交中继信道的容量。

**定理 1(容量下界)** 对于源节点和中继节点非因果已知信道状态的正交中继信道, 满足式(4)码率  $R$  是可达的。

$$R \leq \max \min \{I(U, U_r; Y) - I(U, U_r; S),$$

$$I(X_R; Y_r | X_r, S) + I(U; Y | U_r) - I(U; S | U_r)\} \quad (4)$$

其中, 最大值运算取值于具有式(5)形式的所有联合概率分布函数:

$$P_{S, X_r, U_r, U, X_R, X_D} = Q_S P_{X_r, U_r | S} P_{X_R | U_r, X_r, S} P_{U, X_D | U_r, X_r, S} \quad (5)$$

且辅助变量  $U$  和  $U_r$  的字母集合的势是有界的。

**注 1** 由于源节点和中继节点都非因果已知信道状态, 通过 PDF 中继策略, 源节点和中继节点可以通过 GP 编码协作发送消息, 即, 协作的 GP 编码。同样由于源节点和中继节点均已知信道状态, 在码簿构造和编码时, 可以将信道状态序列  $s^n$  看作分序列。

**证明** 可达方案主要基于叠加码、PDF 中继策略和协作的 GP 编码。消息  $W$  划分为两个独立的部分  $W_D \in \{1, \dots, 2^{nR_D}\}$  和  $W_R \in \{1, \dots, 2^{nR_R}\}$ 。通过 PDF 中继策略, 中继节点译码部分的源消息, 即  $W_R$ 。在中继节点对消息  $W_R$  的可达性证明中, 将信道状态序列  $s^n$  看作分序列<sup>[22]</sup>, 对消息  $W_R$  的编码以及中继节点对  $W_R$  的译码过程基于文献[22]。考虑  $B+1$  个分组, 每个分组包含  $n$  个符号。  $B$  个消息序列  $w(k) \in [1, 2^{nR}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, B$ , 通过  $n(B+1)$  次信道传输发送至目的节点, 其中,  $w(k) = (w_D(k), w_R(k))$ ,  $w_D(k) \in [1, 2^{nR_D}]$ ,  $w_R(k) \in [1, 2^{nR_R}]$  以及  $R = R_D + R_R$ 。设  $w(B+1) = (w_D(B+1), w_R(B+1)) = (1, 1)$ ,  $s^n(k)$  为影响第  $k$  个分组发送的信道状态序列。

**码簿构造** 固定概率分布  $P_{X_r, U_r | S} P_{X_R | U_r, X_r, S}$

$$P_{U, X_D | U_r, X_r, S}。$$

(1) 根据概率分布  $P_{U_r^n}(\mathbf{u}_r^n) = \prod_{i=1}^n P_{U_r}(u_{r,i})$  生成

$2^{n(R_R + R_{r,s})}$  个独立同分布的码字集合  $\{\mathbf{u}_r^n(\tilde{w}_R, j_r)\}$ , 其中,  $\tilde{w}_R = 1, 2, \dots, 2^{nR_R}$ ,  $j_r \in \{1, \dots, 2^{nR_{r,s}}\}$ 。

(2) 对每一个码字  $\mathbf{u}_r^n(\tilde{w}_R, j_r)$ , 根据条件概率分布  $P_{U^n | U_r^n}(\mathbf{u}^n | \mathbf{u}_r^n) = \prod_{i=1}^n P_{U | U_r}(u_i | u_{r,i})$  生成  $2^{n(R_D + R_{d,s})}$  个独立同分布的码字集合  $\{\mathbf{u}^n(w_D, j_d | \tilde{w}_R, j_r)\}$ , 其中  $w_D = 1, 2, \dots, 2^{nR_D}$ ,  $j_d = 1, 2, \dots, 2^{nR_{d,s}}$ 。

(3) 对每一个码字  $\mathbf{u}_r^n(\tilde{w}_R, j_r)$  以及  $s \in \mathcal{S}$ , 根据概率分布

$$P_{X_R^n | U_r^n, s^n}(\mathbf{x}_R^n | \mathbf{u}_r^n, \mathbf{s}^n) = \prod_{i=1}^n P_{X_R | U_r, S}(x_{R,i} | u_{r,i}, s_i)$$

独立随机生成  $2^{nR_s}$  个码字集合  $\{\mathbf{x}_R^n(m_s | \tilde{w}_R, j_r, s)\}$ , 其中,  $m_s \in [1, 2^{nR_s}]$ 。这些码字序列构成了子码簿  $\mathcal{C}_s (s \in \mathcal{S})$ , 对于每一个  $\mathbf{u}_r^n(\tilde{w}_R, j_r)$ , 共有  $|\mathcal{S}|$  个对应的子码簿, 设  $R_R = \sum_{s \in \mathcal{S}} R_s$ 。

**编码** 考虑第  $k$  个分组的情况。设  $w(k) = (w_D(k), w_R(k)) \in \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ , 其中,  $w_D(k) \in \{1, 2, \dots, 2^{nR_D}\}$ ,  $w_R(k) \in \{1, 2, \dots, 2^{nR_R}\}$ , 为源节点在第  $k$  个分组时刻要发送的新消息。在第  $k$  个分组的编码过程如下:

(1) 中继已知了消息  $w_R(k-1)$  (译码过程将证实这一结果), 中继选择最小的  $j_r(k) \in \{1, 2, \dots, 2^{nR_{r,s}}\}$  使得  $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$  与  $\mathbf{s}^n(k)$  联合典型。如果不存在这样的  $j_r(k)$ , 编码发生错误,  $j_r(k)$  设为 1。根据文献[23]引理 3.3, 当  $n$  趋于  $\infty$  且  $R_{r,s}$  满足式(6)时, 该错误概率趋于 0。

$$R_{r,s} \geq I(U_r; S) \quad (6)$$

给定  $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$  和  $\mathbf{s}^n(k)$ , 中继发送向量  $\mathbf{x}_r^n(k)$ , 其中,  $\mathbf{x}_r^n(k)$  根据条件分布

$$P_{X_r^n | U_r^n, \mathbf{s}^n}(\mathbf{x}_r^n(k) | \mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k)), \mathbf{s}^n(k)) = \prod_i P_{X_r | U_r, S}(x_{r,i}(k) | u_{r,i}(w_R(k-1), j_r(k)), s_i(k))$$

产生。

(2) 源节点同样已知  $w_R(k-1)$  和  $\mathbf{s}^n(k)$ , 因此可以得到  $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$ 。给定  $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$ , 源节点选择最小的  $j_d(k) \in \{1, 2, \dots, 2^{nR_{d,s}}\}$  使得  $\mathbf{s}^n(k)$  与  $\mathbf{u}^n(w_D(k), j_d(k) | w_R(k-1), j_r(k))$  联合典型。如果不存在这样的  $j_d(k)$ , 编码发生错误,  $j_d(k)$  设为 1。同样, 根据文献[23]引理 3.3, 当  $n$  趋于  $\infty$ , 且  $R_{d,s}$  满足式(7)时, 该错误概率趋于 0。

$$R_{d,s} \geq I(U; S | U_r) \quad (7)$$

给定  $\mathbf{u}^n(w_D(k), j_d(k) | w_R(k-1), j_r(k))$  和  $\mathbf{s}^n(k)$ , 源节点发送向量  $\mathbf{x}_D^n(k)$ , 其中  $\mathbf{x}_D^n(k)$  根据条件分布

$$P_{X_D^n | U^n, \mathbf{s}^n}(\mathbf{x}_D^n(k) | \mathbf{u}^n(w_D(k), j_d(k) | w_R(k-1),$$

$$j_r(k)), \mathbf{s}^n(k))$$

$$= \prod_i P_{X_D | U_r, S}(x_{D,i}(k) | u_{r,i}(w_D(k),$$

$$j_d(k) | w_R(k-1), j_r(k)), s_i(k))$$

产生。

(3) 将消息  $w_R(k) \in [1, 2^{nR}]$  表示为唯一的消息集合  $\{m_s(k) : s \in \mathcal{S}\}$ 。给定  $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$ ，考虑码字集合  $\{\mathbf{x}_R^n(m_s(k) | w_R(k-1), j_r(k), s) : s \in \mathcal{S}\}$ ，将集合中每一个码字存储于一个长度为  $n$  的 FIFO (First-In-First-Out) 缓冲区。在传输时刻  $i$ ，源节点通过复用器根据当前时刻的信道状态  $s_i(k)$  从对应的 FIFO 缓冲区中选择发送符号并发送。

**译码** 第  $k$  个分组传输结束时，中继节点和目的节点分别接收到向量  $\mathbf{y}_r^n(k)$  和  $\mathbf{y}^n(k)$ 。

(1) 中继在第  $k-1$  分组已经成功译码  $w_R(k-1)$ ，并且已知  $\mathbf{x}_r^n(k)$ ， $\mathbf{u}_r^n(w_R(k-1), j_r(k))$  以及  $\mathbf{s}^n(k)$ ，其根据  $\mathbf{y}_r^n(k)$  译码消息  $\hat{w}_R(k)$ 。中继节点首先通过解复用器将  $\mathbf{y}_r^n(k)$  分解为子序列  $\{\mathbf{y}_r^{n_s(k)}(k)\}$ ，其中， $\sum_{s \in \mathcal{S}} n_s(k) = n$ 。设  $\mathbf{s}^n(k) \in \mathcal{T}_\varepsilon^n(\mathcal{S})$ ，则对所有  $s \in \mathcal{S}$  有  $n_s(k) \geq n(1-\varepsilon)p(s)$ 。对每一  $s \in \mathcal{S}$ ，给定  $\mathbf{x}_r^{n(1-\varepsilon)p(s)}(k)$ ，中继查找唯一的  $\hat{m}_s(k)$  使得码字序列  $\mathbf{x}_R^{n(1-\varepsilon)p(s)}(\hat{m}_s(k) | w_R(k-1), j_r(k), s)$  与  $\mathbf{y}_r^{n(1-\varepsilon)p(s)}(k)$  联合典型。根据大数定理 (Law of Large Numbers, LLN) 以及文献 [23] 引理 3.1，当  $n$  趋于  $\infty$ ，且  $R_s \leq p(s)I(X_R; Y_r | X_r, S=s)$  时，每一步译码错误概率趋于 0。因此，当式(8)满足时，若  $n$  充分大，中继对消息  $\hat{w}_R(k)$  的译码错误概率趋于 0。

$$R_R = \sum_{s \in \mathcal{S}} R_s \leq I(X_R; Y_r | X_r, S) \quad (8)$$

(2) 根据  $\mathbf{y}^n(k)$ ，目的节点查找唯一的四元组  $(\hat{w}_D(k-1), \hat{j}_r(k), \hat{w}_D(k), \hat{j}_d(k))$  使得

$$\left( \mathbf{u}^n(\hat{w}_D(k), \hat{j}_d(k) | \hat{w}_D(k-1), \hat{j}_r(k)), \mathbf{u}_r^n(\hat{w}_R(k-1), \hat{j}_r(k)), \mathbf{y}^n(k) \right) \in \mathcal{T}_\varepsilon^n(U, U_r, Y)$$

若不存在这样的四元组或满足条件的四元组不是唯一的，译码发生错误。根据文献 [23] 引理 3.1，对充分大的  $n$ ，当式(9)满足时，译码错误概率趋于 0。

$$\left. \begin{aligned} R_D + R_{d,s} &\leq I(U; Y | U_r) \\ R_D + R_{d,s} + R_R + R_{r,s} &\leq I(U, U_r; Y) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

根据式(7)-式(9)，在第  $k$  个分组结束时，当  $R$  满足式(10)时， $w(k-1) = (w_D(k-1), w_R(k-1))$  译码正确的概率趋于 1。

$$\left. \begin{aligned} R &\leq I(X_R; Y_r | X_r, S) + I(U; Y | U_r) - I(U; S | U_r) \\ R &\leq I(U, U_r; Y) - I(U, U_r; S) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

证毕

#### 4 有信道状态的半确定性正交中继信道的容量

当信道输出  $Y$  为  $X_D$ ， $X_r$  和  $S$  的确定性函数，

即， $Y = f(X_D, X_r, S)$  时，定理 1 所述的信道容量下界是紧的，定理 2 得到了此半确定性的正交中继信道的容量的确切表达式。

**定理 2 (容量)** 对于有信道状态的半确定性正交中继信道，目的节点的信道输出满足  $Y = f(X_D, X_r, S)$ ，其容量表示为

$$C = \max \min \left\{ H(Y) - I(U_r, Y; S), I(X_R; Y_r | X_r, S) + H(Y | U_r, S) \right\} \quad (11)$$

其中，最大值运算取值于具有式(12)形式的所有联合概率分布函数：

$$P_{S, X_r, U_r, X_R, X_D} = Q_S P_{X_r, U_r | S} P_{X_R | U_r, X_r, S} P_{X_D | U_r, X_r, S} \quad (12)$$

且辅助变量  $U_r$  的字母集合的势是有界的。

**证明** 因为  $Y = f(X_D, X_r, S)$ ，可达性证明可以根据定理 1，令  $U = Y$  直接得到。反向证明如下：

考虑平均错误概率  $P_e^{(n)} \leq \varepsilon_n$  的  $(\varepsilon_n, n, R)$ -码，根据 Fano 不等式，有

$$H(W | Y^n) \leq n R P_e^{(n)} + 1 = n \delta_n \quad (13)$$

其中  $n \rightarrow +\infty$  时  $\delta_n \rightarrow 0$ 。因此，

$$nR = H(W) \leq I(W; \mathbf{Y}^n) + n \delta_n \quad (14)$$

定义辅助变量  $\bar{U}_{r,i} = (\mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n)$ ，

$$\begin{aligned} I(W; \mathbf{Y}^n) &\leq I(W; \mathbf{Y}^n, \mathbf{Y}_r^n) \\ &\leq I(W; \mathbf{Y}^n, \mathbf{Y}_r^n | \mathbf{S}^n) \\ &= \sum_i I(W; Y_i, Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n) \\ &= \sum_i I(W; Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n) \\ &\quad + I(W; Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n) \end{aligned} \quad (15)$$

其中，第 2 个不等式是由于  $\mathbf{S}^n$  独立于  $W$ 。

式(15)中的两项分别计算如下：

$$\begin{aligned} &\sum_i I(W; Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n) \\ &= \sum_i H(Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n) \\ &\quad - H(Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n, W) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_i H(Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n, X_{r,i}) \\ &\quad - H(Y_{r,i} | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}^n, W, X_{r,i}, X_{R,i}) \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_i H(Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i) - H(Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i, X_{R,i}) \\ &= \sum_i I(X_{R,i}; Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 (a) 因为  $X_{r,i}$  是  $(\mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}^n)$  的确定函数， $X_{R,i}$  是  $(W, \mathbf{S}^n)$  的确定函数；(b) 由于条件熵减小以及

Markov 链  $(\mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n, \mathbf{S}^{i-1}, W) \leftrightarrow (X_{r,i}, X_{R,i}, S_i) \leftrightarrow Y_{r,i}$ 。

$$\begin{aligned} & \sum_i I(W; Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n) \\ &= \sum_i H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n) \\ & \quad - H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n, W) \\ &= \sum_i H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n) \\ & \quad - H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n, W, X_{D,i}, X_{r,i}) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_i H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{Y}_r^{i-1}, Y_{r,i}, \mathbf{S}^n) \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_i H(Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n, S_i) \\ &= \sum_i H(Y_i | \bar{U}_{r,i}, S_i) \end{aligned} \quad (17)$$

其中(a)因为  $Y_i = f(X_{D,i}, X_{r,i}, S_i)$ ; (b) 由于条件使熵减小。

根据式(14)-式(17), 有

$$R \leq \frac{1}{n} \left( \sum_i I(X_{R,i}; Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i) + H(Y_i | \bar{U}_{r,i}, S_i) \right) + \delta_n \quad (18)$$

同时

$$\begin{aligned} I(W; \mathbf{Y}^n) &= \sum_i I(W; Y_i | \mathbf{Y}^{i-1}) \\ &\leq \sum_i I(W, \mathbf{Y}^{i-1}; Y_i) \\ &= \sum_i I(W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n; Y_i) \\ & \quad - I(\mathbf{S}_{i+1}^n; Y_i | W, \mathbf{Y}^{i-1}) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_i I(W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n; Y_i) \\ & \quad - I(\mathbf{Y}^{i-1}; S_i | W, \mathbf{S}_{i+1}^n) \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_i H(Y_i) - H(Y_i | W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n) \\ & \quad - I(W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n; S_i) \\ &\stackrel{(c)}{\leq} \sum_i H(Y_i) - I(W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n, Y_i; S_i) \\ &\leq \sum_i H(Y_i) - I(\mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n, Y_i; S_i) \\ &= \sum_i H(Y_i) - I(\bar{U}_{r,i}, Y_i; S_i) \end{aligned} \quad (19)$$

其中(a)由 Csiszár-Körner's 不等式得到; (b)由于  $S_i$  独立于  $(W, \mathbf{S}_{i+1}^n)$ ; (c) 由不等式  $H(Y_i | W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n) \geq I(Y_i; S_i | W, \mathbf{Y}^{i-1}, \mathbf{S}_{i+1}^n)$  得到。

根据式(14)以及式(19), 有

$$R \leq \frac{1}{n} \sum_i \left( H(Y_i) - I(\bar{U}_{r,i}, Y_i; S_i) \right) + \delta_n \quad (20)$$

因此, 根据式(18)和式(20), 有

$$\left. \begin{aligned} R &\leq \frac{1}{n} \left( \sum_i I(X_{R,i}; Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i) \right. \\ & \quad \left. + \sum_i H(Y_i | \bar{U}_{r,i}, S_i) \right) + \delta_n \\ R &\leq \frac{1}{n} \sum_i \left( H(Y_i) - I(\bar{U}_{r,i}, Y_i; S_i) \right) + \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

引入分时随机变量  $T$ ,  $T$  均匀分布于  $\{1, 2, \dots, n\}$ , 将随机变量集合表示为

$$(X_R, X_r, Y_r, Y, \bar{U}_r, S) = (X_{R,T}, X_{r,T}, Y_{r,T}, Y_T, \bar{U}_{r,T}, S_T)$$

考虑式(21)的第1项, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left( \sum_i I(X_{R,i}; Y_{r,i} | X_{r,i}, S_i) + \sum_i H(Y_i | \bar{U}_{r,i}, S_i) \right) \\ &= I(X_R; Y_r | X_r, S, T) + H(Y | \bar{U}_r, S, T) \\ &= H(Y_r | X_r, S, T) \\ & \quad - H(Y_r | X_r, X_R, S, T) + H(Y | \bar{U}_r, S, T) \\ &= I(X_R; Y_r | X_r, S) + H(Y | \bar{U}_r, S, T) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, 最后一步等式是因为  $T$  独立于其它所有的随机变量以及 Markov 链  $T \leftrightarrow (X_R, X_r, S) \leftrightarrow Y_r$ 。

考虑式(21)的第2项, 类似可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_i \left( H(Y_i) - I(\bar{U}_{r,i}, Y_i; S_i) \right) \\ & \leq H(Y) - I(\bar{U}_r, T, Y; S) \end{aligned} \quad (23)$$

定义  $U_r = (\bar{U}_r, T)$ , 有

$$\left. \begin{aligned} R &\leq I(X_R; Y_r | X_r, S) + H(Y | U_r, S) + \delta_n \\ R &\leq H(Y) - I(U_r, Y; S) + \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

很容易验证如下 Markov 链成立:

$$\bar{U}_{r,i} \leftrightarrow (X_{r,i}, X_{D,i}, X_{R,i}, S_i) \leftrightarrow (Y_{r,i}, Y_i)$$

因此, 对于当  $n$  趋于  $\infty$  时  $\varepsilon_n$  趋于 0 的  $(\varepsilon_n, n, R)$ -码, 存在概率分布  $P_{S, X_r, U_r, X_R, X_D} = Q_S P_{U_r | S} P_{X_r | U_r, S} P_{X_R, X_D | U_r, X_r, S}$  使得码率  $R$  满足式(11)。不失一般性, 联合概率分布函数可以限定为  $P_{S, X_r, U_r, X_R, X_D} = Q_S P_{U_r | S} P_{X_r | U_r, S} P_{X_R | U_r, X_r, S} P_{X_D | U_r, X_r, S}$ 。证毕

## 5 结束语

本文考虑了一类有信道状态的正交中继信道, 源节点到中继节点间的信道以及源节点和中继节点到目的节点间的信道是正交的, 且这两个正交的信道受到同一个公共信道状态的影响, 而信道状态在源节点和中继节点是非因果已知的。源节点基于叠加码, 中继节点采用 PDF 中继策略, 源节点和中继节点采用协作的 GP 编码策略, 本文首先得到了该信道的容量的下界。其次, 进一步考虑目的节点的信道输出是中继输入  $X_r$ , 信道状态  $S$  以及源节点信

道输入  $X_D$  的确定函数, 即  $Y = f(X_D, X_r, S)$  的半确定正交中继信道, 本文得到了其容量的确切表达式。尽管本文仅得到了一类半确定的正交中继信道的容量, 但为进一步揭示中继信道的容量的本质, 为中继信道协作策略的设计提供了重要参考。

### 参 考 文 献

- [1] Keshet G, Steinberg Y, and Merhav N. Channel coding in the presence of side information: subject review[J]. *Foundation and Trends in Communications and Information Theory*, 2008, 4(6): 445-586.
  - [2] Shannon C E. Channels with side information at the transmitter[J]. *IBM Journal Research and Development*, 1958, 2(4): 289-293.
  - [3] Gel'fand S I and Pinsker M S. Coding for channel with random parameters[J]. *Problems of Control and Information Theory*, 1980, 9(1): 19-31.
  - [4] Costa M H M. Writing on dirty paper[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1983, 29(3): 439-441.
  - [5] Gel'fand S I and Pinsker M S. On Gaussian channels with random parameters[C]. Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory, Tashkent, Union of Soviet Socialist Republics, 1984: 247-250.
  - [6] Steinberg Y. Coding for the degraded broadcast channel with random parameters, with causal and noncausal side information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(8): 2867-2877.
  - [7] Kotagiri S and Laneman J N. Multiple access channels with state information known to some encoders and independent messages[J]. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2008, ID: 450680.
  - [8] Zaidi A, Piantanida P, and Shamai S. Multiple access channel with states known noncausally at one encoder and only strictly causally at the other encoder[C]. Proceedings of 2011 IEEE International Symposium on Information Theory, Saint Petersburg, Russia, July 31-Aug.5, 2011: 2801-2805.
  - [9] Pourbabaee M F, Emadi M J, Davoodi A G, et al. Lattice coding for multiple access channels with common message and additive interference[C]. Proceedings of 2012 IEEE Information Theory Workshop, Lausanne, Switzerland, 2012: 412-416.
  - [10] Somekh-Baruch A, Shamai S, and Verdú S. Cooperative multiple-access encoding with states available at one transmitter[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(10): 4448-4469.
  - [11] Bross S I, Lapidot A, and Wigger M. Dirty-paper coding for the Gaussian multiaccess channel with conferencing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(9): 5640-5668.
  - [12] Zaidi A, Kotagiri S P, Laneman J N, et al. Cooperative relaying with state available noncausally at the relay[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(5): 2272-2298.
  - [13] Li M, Simeone O, and Yener A. Message and state cooperation in a relay channel when the relay has strictly causal state information[C]. Proceedings of Information Theory and Applications Workshop, California, USA, 2011: 1-6.
  - [14] Zaidi A, Shamai S, Piantanida P, et al. Bounds on the capacity of the relay channel with noncausal state at source[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(5): 2639-2672.
  - [15] Bakanoglu K, Erkip E, Simeone O, et al. Relay channel with orthogonal components and structured interference known at the source[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(4): 1277-1289.
  - [16] Khormuji M N, El Gamal A, and Skoglund M. State-dependent relay channel: achievable rate and capacity of a semideterministic class[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(5): 2629-2638.
  - [17] Aguerri I E and Gunduz D. Capacity of a class of relay channels with state[C]. Proceedings of 2012 IEEE Information Theory Workshop, Lausanne, Switzerland, Sept. 3-7, 2012: 277-281.
  - [18] Cover T M and El Gamal A. Capacity theorems for the relay channel[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1979, 25(5): 572-584.
  - [19] El Gamal A and Aref M. The capacity of the semideterministic relay channel[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, 28(3): 536.
  - [20] Kim Y H. Capacity of a class of deterministic relay channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(3): 1328-1329.
  - [21] El Gamal A and Zahedi S. Capacity of a class of relay channels with orthogonal components[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(5): 1815-1817.
  - [22] Goldsmith A J and Varaiya P P. Capacity of fading channels with channel side information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, 43(6): 1986-1992.
  - [23] El Gamal A and Kim Y H. *Network Information Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011: 38-77.
- 邓志祥：男，1980年生，博士生，研究方向为多用户信息论、信息理论安全。
- 王保云：男，1967年生，教授，博士生导师，研究方向为多用户信息论、无线通信中的博弈与协作、无线通信中的信号处理技术等。
- 郎非：男，1977年生，博士生，研究方向为多用户信息论、信息理论安全。