关于信号傅里叶变换存在条件问题的探讨

王道宪* 段晓辉 杨光临
(北京大学信息科学技术学院 北京 100871)

摘 要：对于一个任意给定的信号，判断其傅里叶变换是否存在一直是尚未解决的问题。由于此问题在信号分析类课程的教学或工程应用中常给人们带来困扰，该文对此进行了分析。从质疑斜坡信号的傅里叶变换入手，通过与常见能量信号和功率信号的傅里叶变换特征相对比，指出了斜坡信号傅里叶变换的一些问题。分析表明斜坡信号不满足傅里叶积分定理，并据此认为斜坡信号的傅里叶变换不成立。最后，通过仿真分析对所持观点进行了验证，并对一些常见信号傅里叶变换的一般规律进行了归纳总结。

关键词：信号分析；傅里叶变换；频谱
中图分类号：TN911.6 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2013)11-2790-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00223

Discussion about the Existence Condition of Signal Fourier Transform

Wang Dao-xian Duan Xiao-hui Yang Guang-lin
(*School of Electronics Engineering and Computer Science*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)

Abstract: For any given signal, determining the existence of its Fourier transform has remained an unsolved problem. This raises many concerns in the teaching of signal analysis courses, and also in many engineering applications. This paper presents an analysis of the problem. By comparing the characteristics of the ramp signal's Fourier transform with that of the Fourier transforms of common energy signals and power signals, the author points out some problems regarding the Fourier transform of the ramp signal. This analysis shows that ramp signal does not satisfy the Fourier integral theorem, thus invalidating the Fourier transformation of ramp signal. Finally, the author further proves this assertion through simulation analysis, and summarizes the general rules of some common signal's Fourier transform.

Key words: Signal analysis; Fourier transform; Spectrum

1 引言

傅里叶变换虽然在信号分析应用中是一种常用工具，但是针对一个任意给定的连续时间信号，能否确切判别该信号的傅里叶变换是否存在，至今仍是难以肯定回答的问题。这一问题也是傅里叶变换自诞生之日便受数学家们诟病的原因之一。举例如：连续时间信号 $f(t)$ 的傅里叶变换常定义为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

一般而言，只要所给信号的上述积分收敛，其傅里叶变换就有意义，这种情况下信号的分析过程较少引起争议。但如果积分不收敛，问题便随之产生：例如考察斜坡信号 $f(t)=tu(t)$ ，该信号的傅里叶积分不收敛，那么它的傅里叶变换是否存在？

虽然从当今许多教科书的常用信号傅里叶变换表中可以查到其傅里叶变换是[1,2]

$$t\cdot u(t)\Leftrightarrow j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2} \tag{1}$$

但笔者对这一结论表示质疑。

关于式(1)较详细的推导过程可参阅文献[3]，该文以 5 种不同方法验证了上述变换式。关于斜坡信号的傅里叶变换或许还有其它方法可推导出同样结论，却不能回避由下述方法导出的一个不同结果：因为

$$t\cdot u(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\eta)\mathrm{d}\eta=\int_0^t \mathrm{d}\eta$$

$$u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\eta)u(t-\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$=\int_0^{\infty} u(t-\eta)\mathrm{d}\eta=\int_0^t \mathrm{d}\eta$$

所以， $t\cdot u(t)=u(t)*u(t)$ 。

根据阶跃信号傅里叶变换的已知变换式

$$u(t)\Leftrightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

对其应用傅里叶变换性质中的时域卷积定理

2013-02-27 收到，2013-06-13 改回
国家高技术研究发展计划(2011AA01A106)资助课题
*通信作者：王道宪 wdx@pku.edu.cn

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

可以得出

$$t \cdot u(t) = u(t) * u(t) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]^2$$

所以由此方法导出的斜坡信号的傅里叶变换为

$$t \cdot u(t) \Leftrightarrow F(\omega) = \left[\pi^2\delta^2(\omega) - \frac{1}{\omega^2}\right] - j\frac{2\pi\delta(\omega)}{\omega} \quad (2)$$

这种运算方法的物理意义非常明显：如果将阶跃信号 $u(t)$ 看作是某线性系统所具有的冲激响应，则该系统的传输特性就是理想积分器。$u(t) * u(t)$ 的物理意义是将阶跃信号输入理想积分器，系统的零状态响应输出自然就形成了斜坡信号；对这一激励与响应关系施加傅里叶变换的结果就是式(2)。

式(1)，式(2)是截然不同的两个表达式，因为如果两个复变函数相等，必要求其实部、虚部各自都相等，但式(1)的实部是普通初等函数，式(2)的实部却是含 δ 函数的奇异函数，因此两式不相等可以被确认。

根据信号傅里叶变换结果的唯一性，连续时间信号傅里叶变换的结果不会因为所采用的运算方法不同而受影响，变换结果总是唯一的，因此式(1)，式(2)必须能够被证明相等才符合傅里叶变换的一般规律或运算性质。于是产生了悖论：假如斜坡信号的傅里叶变换确实存在，同一个信号怎么会具有两种截然不同的频谱？

2　傅里叶变换的一个缺陷

是什么原因导致了上述运算上的矛盾呢？笔者认为原因在于傅里叶变换本身所存在的一个缺陷：它没有针对任意有待分析的信号，给出一个其傅里叶变换是否存在的判断标准，这个判断标准就是信号傅里叶变换如果存在所应满足的必要条件。

傅里叶分析理论中涉及连续时间信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是否存在的判断标准方面，仅仅具有一个充分条件，这就是人们熟知的傅里叶积分定理。该定理可被简单概括为两项内容：$f(t)$ 在时域 $(-\infty,\infty)$ 上的任一有限区间均满足狄利赫利条件，在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t) \,|\, \mathrm{d}t < \infty$$

由于只是一个充分条件，它不能用以判定当所给信号不满足此条件时的傅里叶变换是否仍然存在。考虑到傅里叶变换 $F(\omega)$ 的物理意义是对应于连续时间信号 $f(t)$ 的频谱密度函数，因此意味着：任意给定一个连续时间信号 $f(t)$，无论它是否满足绝对可积条件，傅里叶分析理论都没有限制人们采用任何方法求得一个表面形式上的变换式 $F(\omega)$，而不必涉及这种变换是否具有实际意义。

傅里叶变换的这一缺陷使得斜坡信号虽然不满足绝对可积条件，人们却总可以求得它的变换式，但又无法辨别这种变换结果是否有效。

为弥补这种缺陷，傅氏变换被进一步拓广成两部分：傅里叶变换与广义傅里叶变换[4]。斜坡信号由于不绝对可积而被归类于广义傅里叶变换。

3　能量信号功率信号分类

广义傅里叶变换概念引入的原因在于许多具有工程应用意义的连续时间信号不满足绝对可积，但这些信号的傅里叶变换又确实存在，比如符号函数、各种幅度有界的周期信号等等。

斜坡信号的变换是否属于广义傅里叶变换？为此可参考广义傅里叶变换的这样一种定义[4]：设有信号 $f(t)$ 与信号序列 $f_N(t), N = 1,2,\cdots,\infty$，满足：$f(t) = \lim_{N\to\infty} f_N(t)$，如果序列中的每个信号 $f_N(t)$的傅里叶变换都存在，则 $f(t)$ 的广义傅里叶变换 $F(\omega)$ 存在。以符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$ 为例，它不绝对可积，难以按照一般求积分的方式求变换；为此可寻找一个函数序列如图 1 所示。

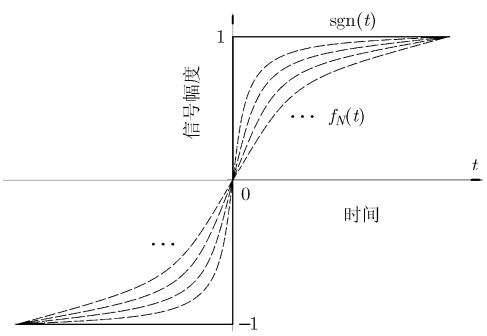

图 1　广义傅里叶变换举例示意

图中虚线部分描述了一个函数序列 $f_N(t), N = 1,2,\cdots,\infty$，序列中的每一个连续时间信号 $f_N(t)$都是绝对可积的，因而它们的傅里叶变换都存在。当 N 趋于无穷时，序列中信号波形逼近实线部分表示的符号函数，因此符号函数的傅里叶变换属于广义傅里叶变换。

将斜坡信号对比广义傅里叶变换定义，难以找到一个与其对应的函数序列使其中每个函数的普通傅里叶变换都存在，因此无法判定斜坡信号的广义傅里叶变换是否存在。

一般而言，广义傅里叶变换是基于实际工程应用目的而定义的，物理上的可能性是变换存在性的有足够根据的条件，阶跃信号、符号函数、各类幅

度有限的周期信号[5–8]即是如此；它们的实际应用背景使这些信号的广义变换有意义。斜坡信号不同，除了理论上的抽象意义之外，该信号难以在实际工程应用方面得以真正实现。

分析绝大多数已知广义傅里叶变换存在的信号，虽然都不绝对可积，信号的平均能量却都是有限值。运算上信号的平均能量被定义为时间轴上信号平方积分的均值，故亦称这类信号为功率信号：

$$0<\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\mathrm{d}t<\infty \tag{3}$$

相比较而言，另一大类满足绝对可积的信号往往是能量有限的，故亦称这类信号为能量信号：

$$0<\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t<\infty \tag{4}$$

这两类信号的典型特征便于人们对其进行各种方式的频谱分析或仿真[9–13]，并由此验证其频谱特性。斜坡信号显然既不属于能量信号亦不属于功率信号，这使其在傅里叶变换中显得非常异类。

4 傅里叶积分定理

为判断斜坡信号的傅里叶变换是否有效，试分析一下傅里叶积分定理[14]。该定理也可以这样理解：如果信号的傅里叶变换关系存在，则在一定限制条件下，连续时间信号傅里叶变换的反变换等于原信号。因此，评判斜坡信号是否存在傅里叶变换，更有说服力的辨别方法，是对斜坡信号的傅里叶变换再求反变换，验证其结果能否还原到斜坡信号自身。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\cdot e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

限于篇幅，略去繁琐的推导过程，仅将结果表述如下：由式(1)，式(2)所体现的变换函数$F(\omega)$，与斜坡信号间都不满足傅里叶反变换关系：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\neq t\cdot u(t) \tag{5}$$

鉴于斜坡信号是一个没有间断点的连续时间信号，因而从式(5)结论基本可以推断式(1)，式(2)的傅里叶变换关系都不成立。

5 仿真分析

对于理论问题上的疑问，澄清的有效方式之一是进行实验验证，由于分析过程涉及一些奇异信号(属广义函数范畴)等典型的理论抽象，现实应用场景中难以构造出这些理想模型(这本身也是作者质疑该信号的原因之一)，因此运用软件仿真工具进行实验模拟的方法较为可行。

在目前基于计算机软件的数学仿真分析工具中，Matlab及其工具箱是应用最多且效率较高的运算平台，是各类数学仿真计算工具中的佼佼者，其中配备的各种积分变换函数能够为仿真运算带来极大便利，因此仿真环境选择Matlab，版本信息为：Version 7.0.0.19920(R14)。

仿真运算的内容仅有两项：斜坡信号的傅里叶变换结果；斜坡信号傅里叶变换的反变换是否能还原于斜坡信号。

考虑到仿真本身毕竟不是真实实验环境，在进行仿真实验前有必要对Matlab进行性能评估分析。

一般而言，Matlab的仿真运算在数学建模、数值分析等方面具有相当强大的能力，但作为软件，毕竟要受限于计算机硬件条件的限制。比如：目前CPU的数据位都是有限的(多数为32或64位)。计算机在有限字长的物理机制下，处理具有理论意义的无界变量(理论无穷大)方面始终存在着难以根本克服的障碍。在很多情况下，任何有限近似对于理论意义上的无穷大而言，都有可能导致有限与无限之间的本质属性改变，从而使仿真结果产生不确定性。可以举些简单例子用以评估Matlab中傅里叶变换函数的“实际运算能力”。

测试 1 求信号 $f(t)=e^{-|t|}\Leftrightarrow\dfrac{2}{1+\omega^2}$ 的傅里叶变换(依据相关领域常识，该信号傅里叶变换存在)。

Matlab程序：

```
syms t
f =exp(-abs(t))      %设立指数信号
F=fourier(f )        %求其傅里叶变换
```

运行结果：

```
F =2/(1+w^2)         %结果正确
```

此项测试结果说明对于满足绝对可积条件的信号，Matlab仿真运算正确。

测试 2 求信号 $f(t)=e^{t^2}$ 的傅里叶变换和反变换(依据相关领域常识，信号傅里叶变换不存在)。

Matlab程序：

```
syms t
f =exp(t^2);         %设立复合函数指数信号
F=fourier(f )        %求其傅里叶变换
g=ifourier(F)        %再求傅里叶反变换
```

运行结果：

```
F=fourier(exp(t^2),t,w)    %未直接给出变换函数
g=exp(x^2)                 %结果错误
```

此项结果说明对不满足绝对可积条件的信号，且根据相关领域常识能够确认信号傅里叶变换不存在时，Matlab的仿真运算不正确。因为对于傅里叶变换不存在的连续时间信号而言，是无法通过对其傅里叶变换求反变换的方法还原出原函数的。

上述测试 2 表明，所标信号由于($t \to \infty$)时发散，不仅该信号的傅里叶变换不存在，甚至对发散函数具有很好收敛抑制效果的拉普拉斯变换也不存在，而 Matlab 却在这两种积分变换运算结果中(作者也进行了拉氏变换仿真)都“反变换求出了原函数”，在运算过程中没有体现出无界函数的异常因素，显然在处理含有无界函数的仿真运算时 Matlab 是具有局限性的。

分析 Matlab 运算出错的原因，观察其中间运算步骤(看积分变换后的结果)就能了解到：Matlab 在运算过程中将无法处理的运算表示成一种“运算关系”保存下来，而不去进行实际的解析运算操作，遇到反变换时直接从所保存的运算关系中还原出原函数而已。为证实这一分析，设定一个一般意义的函数作测试。

测试 3　给定 $f(t)$，但不明确该 $f(t)$具体是什么(依据常识，无法求出该信号的傅里叶变换)。

f =sym(‘$f(t)$’)

F= fourier(f);

g=ifourier(F)

运行结果：

g=$f(x)$

显然，如果 $f(t)$存在傅氏变换则仿真结果正确；如果 $f(t)$傅氏变换不存在则仿真结果错误，Matlab 不对运算对象作任何分析判断，它只按部就班执行既定的算法程序。

上述测试结果表明，Matlab 的傅里叶变换函数具有一定的局限性：它适用于对一般信号进行傅里叶变换的工程计算，而不对特殊信号进行是否存在傅里叶变换的理论研判，在这方面 Matlab 只是一个函数的数值计算工具。

以下是对斜坡信号的仿真：

f =sym(‘t*step(t) ’);

F=fourier(f)

g=ifourier(F)

运行结果：

F=i*diff(fourier(step(t),t,w),w)

g=x*step(x)

仿真结果中对于斜坡信号的傅里叶变换，竟然给出了不同于式(1)，式(2)的第 3 种结果，这进一步支持了作者对于斜坡信号傅氏变换存在性的质疑。至此，对两项仿真目标的验证结论是：

(1)斜坡信号的傅里叶变换不同于式(1)，式(2)。

(2)虽然给出了反变换原函数，但测试 1，测试 2 的结果表明这只是信号在函数表面形式上的“还原”，不具有实际解析运算意义。

6　结论

虽然傅里叶变换作为信号频谱分析工具所具有的优越性[15]毋庸置疑，但因信号傅里叶变换必要条件的缺失，使得实际应用中并非任意信号的傅里叶变换都有意义。鉴于必要条件缺失是傅里叶分析理论问世近 200 年来未获解决的问题，在这方面寻找解决途径毕竟非短时之功。为避免受这类问题的困扰，对于连续时间信号的傅里叶分析，可以对此前已经被验证过的一些结论加以归纳总结，作为对信号进行傅里叶分析时的参考。

工程实践表明：绝大多数能量信号的傅里叶变换存在；绝大多数功率信号的广义傅里叶变换存在；对于功率无限的信号而言其广义傅里叶变换很可能不存在。现有一些文献中所给出的那些关于平均能量无限信号的傅里叶变换结论是值得再讨论的，人们对这类信号进行频谱分析时有必要持慎重态度，作者期待就此结论与同行进行更深入的分析探讨。

参 考 文 献

[1]　刘明华, 周晖杰. 复变函数与积分变换[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2012: 220-221.
Liu Ming-hua and Zhou Hui-jie. Complex Function and integral transformation[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2012: 220-221.

[2]　杜洪艳, 尤正书, 侯秀梅. 复变函数与积分变换[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2012: 190-191.
Du Hong-yan, You Zheng-shu, Huo Xiu-mei. Complex function and integral transformation[M]. Wuhan: Huazhong Normal University Press, 2012: 190-191.

[3]　刘正声. 斜坡信号频谱的推导方法[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 1984, (1): 65-69.
Liu Zheng-sheng. Method for deriving the ramp signal spectrum[J]. *Journal of Yangzhou University* (*Natural Science Edition*), 1984, (1): 65-69.

[4]　刘培森. 应用傅里叶变换[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990: 61-63.
Liu Pei-sen. Application of Fourier Transform[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1990: 61-63.

[5]　Philips L, Parr M, and Riskin E A. Signals, Systms, and Transforms[M]. Fourth Edition, NJ, Pearson Education Inc, 2008: 235-237.

[6]　Kanmani B. Introducing signals and systems concepts through analog signal processing first[C]. IEEE Digital Signal Processing Workshop (DSP/SPE), Sedona, Arizona, USA, 2011: 84-89.

[7]　姜小磊. 正确理解符号函数的傅里叶变换[J]. 电气电子教学学报, 2010, 32(6): 40-42.
Jiang Xiao-lei. Correctly understand the Fourier transform of

sign function[J]. *Journal of Electrical & Electronic Education*, 2010, 32(6): 40–42.

[8] 杨琳, 许小东, 路友荣, 等. 常见数字通信信号的谱线特征分析[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(5): 1067–1071.
Yang Lin, Xu Xiao-dong, Lu You-rong, *et al.*. Spectrum line feature analysis for digital communication signals[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(5): 1067–1071.

[9] 白谱伟, 胡庆龙. 基于 FPGA 的信号频谱分析系统[J]. 电子科技, 2012, 25(4): 73–77.
Bai Pu-wei and Hu Qing-long. Design of spectrum analyzer based on FPGA[J]. *Electronic Science and Technology*, 2012, 25(4): 73–77.

[10] Prasad M V N V, Ray K C, and Dhar A S. FPGA implementation of discrete fractional Fourier transform[C]. Signal Processing and Communications (SPCOM), Bangalore India, 2010: 1–5.

[11] Van der Byl A, Wilkinson R H, and Inggs M R. Recursive Fourier transform hardware[C]. Radar Conference (RADAR), Kansas City MO, 2011: 746–750.

[12] Seelamantula C S. Some new results on signal reconstruction from Fourier transform magnitude spectrum[C]. Signal Processing and Communications (SPCOM), Bangalore India, 2012: 1–5.

[13] 庞建丽, 高丽娜. 典型信号傅里叶分析及仿真实现[J]. 现代电子技术, 2011, 34(13): 78–80.
Pang Jian-li and Gao Li-na. Fourier analysis and simulation of typical signals[J]. *Modern Electronics Technique*, 2011, 34(13): 78–80.

[14] Vretblad A. Fourier Analysis and Its Applications[M]. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2003: 171–172.

[15] 李亚峻, 史兴荣, 李毅. 傅里叶变换在信号处理中的优越性[J]. 数学学习与研究, 2012, (13): 120–121.
Li Ya-jun, Shi Xing-rong, and Li Yi. The superiority of the Fourier transform in signal processing[J]. *Mathematics Learning and Research*, 2012, (13): 120–121.

王道宪： 男，1954 年生，高级工程师，研究方向为信号与信息处理.

段晓辉： 男，1968 年生，教授，研究方向为信号与信息处理.

杨光临： 男，1964 年生，副教授，研究方向为信号与信息处理.