

基于改进指数再生采样核的有限新息率采样系统

王亚军* 李明 刘高峰

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘要: 在有限新息率(Finite Rate of Innovation, FRI)采样框架中, 指数再生核具有良好的时域有限支撑特性, 因此被广泛用作采样核。但是这一过程会将信号中的白噪声变为有色噪声, 严重影响重构性能。为此, 该文利用指数再生形式能够在卷积运算中得以保留的特性, 提出一种改进的指数再生采样核, 其对应的系数矩阵能够保持噪声的统计特性, 进而保证重构算法性能。仿真实验表明该文方法能够有效提升重构性能。

关键词: 有限新息率; 子空间白化; 改进的指数再生采样核

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)09-2088-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00059

Finite Rate of Innovation Sampling System Based on Modified Exponential Reproducing Sampling Kernel

Wang Ya-jun Li Ming Liu Gao-feng

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Since exponential reproducing kernel has the finite support property in time domain, it is widely used as sampling kernel in Finite Rate of Innovation (FRI) sampling framework. However, this process will change white noise in signal to color one, which will grievously depress the performance of reconstruction. For this reason, by using the property that the exponential reproduction formula is preserved through convolution, a modified exponential reproducing kernel is proposed. Its coefficient matrix can keep the statistical property of noise, which ensures the reconstruction performance. Simulation results verify the validity of the proposed methods.

Key words: Finite Rate of Innovation (FRI); Subspace whitening; Modified exponential reproducing kernel

1 引言

工程中经常遇到一类非带限信号, 它们在单位时间内可以由有限个参数唯一确定, 称为有限新息率(Finite Rate of Innovation, FRI)信号或者参数化信号。比如 Dirac 脉冲序列, 分段多项式信号, 非均匀样条等等。由于其非带限特性, Nyquist 采样系统无法对其进行精确重构, 然而文献[1-5]提出的 FRI 框架则提供了一种采样与重构方法, 其核心思想是通过一个特殊设计的滤波器作为采样核对输入信号进行滤波并均匀采样, 经过进一步处理获得一组输入信号的傅里叶系数, 进而将脉冲延时和幅度的估计问题转化为一个标准的谱估计问题。正是利用 FRI 框架的这一特殊能力, 许多环境工程、雷达通信工程和生物医学领域中的问题有了可行方案^[6-11]。基于 FRI 框架的采样系统有两个关键问题, 第一是用什么样的采样核, 第二是用什么样的重构

方法。指数再生采样核^[12,13]相对于 sinc 核和高斯核^[1]具有有限支撑特性, 相对于 SoS 核^[6]具有更好的脉冲波形适应性, 因此获得了广泛应用^[14-16]。对于重构方法, 最基本的方法是采用零化滤波器^[1], 然而该方法对噪声非常敏感。之后提出了总体最小二乘方法(TLS)^[17,18], 结合 Cadzow 算法^[19]预降噪, 称为 Cadzow-TLS 重构方法^[17], 该方法的缺点是当信号自由度较高时, 运算量较大。因此更多是采用子空间重构方法^[20,21], 它利用数据矩阵的平移不变性来估计延时参数, 可以看做是 TLS 方法的扩展, 能够得到最优总体最小二乘解。无论是 Cadzow-TLS 还是子空间重构方法, 它们的一个共同前提是噪声必须是白噪声。然而对于以指数再生滤波器为采样核的 FRI 采样系统, 一般情况下, 由采样核得到的系数矩阵会改变信号中的噪声统计特性, 使原本的白噪声变为有色噪声, 这将严重影响重构算法的性能。因此本文提出了一种改进的指数再生采样核, 当脉冲波形的频谱在滤波器带宽内比较简单时, 通过改进原始采样核结构并适当地设置采样核参数来保持噪声统计特性不变, 进而保证了重构算法的适用条件。

2013-01-15 收到, 2013-03-29 改回

国家自然科学基金(61271297, 61272281), 博士点基金(20110203110001)和航空科学基金(20110181006)资助课题

*通信作者: 王亚军 jmwang83@sina.cn

文章首先介绍一些基本概念并构建基于一般指数再生采样核的 FRI 系统, 然后详细分析采样核对噪声的影响, 进而给出改进的指数再生采样核设计方法, 最后通过计算机仿真验证了本文方法的有效性。

2 基本概念

2.1 有限长 FRI 信号模型

通常来讲, FRI 信号包括有限长 FRI 信号、无限长 FRI 信号和周期 FRI 信号。由于无限长 FRI 信号和周期 FRI 信号都可以看做是有限长 FRI 信号组合而成, 因此我们只讨论有限长 FRI 信号, 其在数学上可以表示为

$$x(t) = \sum_{l=1}^L a_l h(t - t_l) \quad (1)$$

其中 $h(t)$ 为时宽为 τ 的已知脉冲波形, L 表示 $x(t)$ 中含有的脉冲个数, $\{t_l\}_1^L \triangleq (t_1, t_2, \dots, t_L)$ 和 $\{a_l\}_1^L \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_L)$ 分别是由 L 个脉冲的延时与幅度值构成的集合, $a_l \in \mathbb{C}$ 。设 T 为脉冲序列 $x(t)$ 的时宽, 这里要求 L 个脉冲都完全包含在 $[0, T]$ 内, 所以要求 $\tau < T$, 且对 $l = 1, 2, \dots, L$, 有 $t_l \in [0, T - \tau]$ 。另外需要指出, 这里并没有对脉冲间的间隔提出特殊要求, 甚至允许脉冲间存在重叠。由式(1)可以看出, 由于 $h(t)$ 是已知的, 该类信号可以由 L 个延时参数和 L 个幅度参数唯一确定, 对于这一类信号, 可以依据 FRI 框架来进行采样与重构。

2.2 指数再生核理论

指数再生核是指能够与其各个平移函数加权求和生成指数函数的一类函数。如果用 $\psi(t)$ 表示一个指数再生核, 那么对于任意一组 M 个数值 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$, 当合适地选择一组加权系数 $c_{m,k}$, 可以得到式(2)所示关系:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{m,k} \psi(t - k) = e^{\alpha_m t}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

这里的 α_m , 可以取实数或复数, 且当 α_m 为纯虚数时, 需要对 $\forall p \neq q$ 满足 $\alpha_p - \alpha_q \neq 2k\pi$ [12,13]。其中的系数 $c_{m,k}$ 可以通过式(3)来计算。

$$c_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t} \hat{\psi}(t - k) dt \quad (3)$$

其中 $\hat{\psi}(t)$ 是 $\psi(t)$ 的准正交函数[2], 例如我们可以取 $\hat{\psi}(t)$ 为 $\psi(t)$ 的对偶函数, 即 $\langle \hat{\psi}(t - n), \psi(t - k) \rangle = \delta_{n,k}$ 。

指数样条就是一类重要的指数再生核[12,13], 假设一阶指数样条函数为 $\beta_\alpha(t)$, 其频域表达式为 $\Xi_\alpha(\omega) = (1 - e^{-\alpha - j\omega}) / (j\omega - \alpha)$, 高阶指数样条函数则是由多个一阶指数样条函数卷积构成的, 即在频域

上为

$$\Xi_\alpha(\omega) = \prod_{m=1}^M \frac{1 - e^{\alpha_m - j\omega}}{j\omega - \alpha_m} \quad (4)$$

其中 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]$, 加权系数 $c_{m,k}$ 可以通过下式来计算。

$$c_{m,k} = \frac{e^{\alpha_m(k+1)}}{\sum_{n=-M+1}^1 e^{\alpha_m n} \beta_\alpha(1 - n)} \quad (5)$$

式(4)所示的指数样条可以生成指数 $e^{\alpha_m t}$, $m = 1, 2, \dots, M$, 另外, 由于指数再生形式能够通过卷积运算传递, 因此, 任何满足形式 $\eta(t) * \beta_\alpha(t)$ 的函数都能生成指数函数, 这里的 $*$ 表示卷积运算, 这一点对于后面的改进指数再生核设计极为重要。

2.3 基于一般指数再生核的 FRI 采样与重构系统

采样系统可以用图 1 表示。

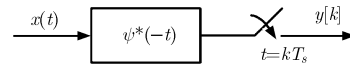


图 1 FRI 采样系统示意图

其中的 $f^*(-t)$ 为采样核 $f(t)$ 的共轭反转, T_s 为均匀采样间隔, $y[k]$ 为采样值。本文采用 2.2 节给出的高阶指数样条采样核 $\beta_\alpha(t)$, 这里假设 $\alpha_m = \alpha_0 + jm\lambda$, $m = 1, 2, \dots, M$, α_0 为复数, λ 为实数。此时采样值 $y[k]$ 可以表示为

$$y[k] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \beta_\alpha^* \left(\frac{t}{T_s} - k \right) dt = \left\langle \beta_\alpha \left(\frac{t}{T_s} - k \right), x(t) \right\rangle \quad (6)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。假设有一组加权系数 $c_{m,k}$ 使得式(2)成立, 那么结合式(6)可以有如下结果:

$$\begin{aligned} \Gamma[m] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{m,k} y[k] = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{m,k} \beta_\alpha \left(\frac{t}{T_s} - k \right), x(t) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t / T_s} x(t) dt \end{aligned} \quad (7)$$

实际上 $\Gamma[m]$ 表示的是 $x(t)$ 的一个指数矩。尤其是当 α_m 为纯虚数时, $\Gamma[m]$ 表示的就是 $x(t)$ 的一组傅里叶变换系数。将式(1)所指信号代入式(7), 可以得到

$$\begin{aligned} \Gamma[m] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t / T_s} x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t / T_s} \sum_{l=1}^L a_l h(t - t_l) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{\alpha_m t / T_s} dt \sum_{l=1}^L a_l e^{\alpha_m t_l / T_s} \end{aligned} \quad (8)$$

定义 $\tilde{h}(t) \triangleq h(t) e^{\alpha_0 t / T_s}$, $\tilde{H}(\omega)$ 为 $\tilde{h}(t)$ 的傅里叶变换, 则, 如果 $\tilde{H}(-m\lambda / T_s) \neq 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}[m] &= \frac{\Gamma[m]}{\tilde{H}\left(\frac{-m\lambda}{T_s}\right)} = \sum_{l=1}^L a_l e^{\alpha_m t_l / T_s} \\ &= \sum_{l=1}^L a_l e^{\alpha_0 t_l / T_s} e^{j\lambda t_l / T_s} = \sum_{l=1}^L v_l u_l^m\end{aligned}\quad (9)$$

其中 $v_l = a_l e^{\alpha_0 t_l / T_s}$, $u_l = e^{j\lambda t_l / T_s}$ 。当系统含有噪声时, 会表现为对采样值的扰动, 即

$$\hat{y}[k] = y[k] + n[k] \quad (10)$$

其中 $n[k]$ 为采样数据中的噪声, 这里我们假设噪声信号是均值为 0, 方差为 σ^2 高斯白噪声。将式(10)代入式(7)并进一步代入式(9)可以得到

$$\hat{\Phi}[m] = \Phi[m] + E[m] \quad (11)$$

其中 $E[m] = \sum_{k \in \mathcal{Z}} c_{m,k} n[k] / (\tilde{H}(-m\lambda / T_s))$, 由 $\hat{\Phi}[m]$ 构建 $P \times Q$ (这里要求 $P, Q > L$, 因此 M 至少要满足 $M \geq 2L$) 的 Hankel 矩阵为

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}[1] & \hat{\Phi}[2] & \cdots & \hat{\Phi}[Q] \\ \hat{\Phi}[2] & \hat{\Phi}[3] & \cdots & \hat{\Phi}[Q+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\Phi}[P] & \hat{\Phi}[P+1] & \cdots & \hat{\Phi}[P+Q-1] \end{bmatrix} \quad (12)$$

同样的方法得到 Φ 和 E , 进而有

$$\hat{\Phi} = \Phi + E \quad (13)$$

然后就可以采用子空间重构算法, 其算法步骤如下:

(1) 对 $\hat{\Phi}$ 进行奇异值分解, 即 $\hat{\Phi} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$, 找到最大的 L 个奇异值对应的左奇异向量构成子矩阵 \mathbf{U}_S , 并由 \mathbf{U}_S 构建矩阵 $\mathbf{Z} = \mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S$, 其中 $(\bullet)^H$ 表示矩阵的共轭转置, (\bullet) 和 $(\bar{\bullet})$ 分别表示将矩阵去掉最后一行和去掉第 1 行的操作, $(\bullet)^\dagger$ 表示矩阵的 Moore-Penrose 逆;

(2) 计算 \mathbf{Z} 矩阵的特征值 $\{z_l\}_1^L$ 作为 $\{u_l\}_1^L$ 的值; (文献[16]证明了 \mathbf{Z} 矩阵的特征值 $z_l = u_l$);

(3) 求解由 $\hat{\Phi}[m] = \sum_{l=1}^L v_l u_l^m + E[m]$ 构成的范德蒙系统的最小均方解得到 $\{v_l\}_1^L$ 的估计值;

(4) 由 $v_l = a_l e^{\alpha_0 t_l / T_s}$, $u_l = e^{j\lambda t_l / T_s}$ 得到 $\{a_l\}_1^L$ 和 $\{t_l\}_1^L$ 的值。

除了上述的子空间方法之外, 还可以利用传统的 MUSIC 和 ESPRIT 方法来重构信号, 但是由于这两种方法是基于信号的协方差矩阵的, 因此要求更多的采样值。

3 改进的指数再生核

子空间重构方法要求噪声的协方差矩阵必须是单位阵的纯量倍数, 即必须是同分布的白噪声。然而对于一般的指数再生核构建的 FRI 系统而言, 这一要求往往无法满足。具体来讲, 由 K 个

$\hat{y}[k] = y[k] + n[k]$ 得到的 $\hat{\Phi}[m]$ 写为向量和矩阵形式有

$$\hat{\Phi}_V = \Phi_V + E_V = \Phi_V + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{n} \quad (14)$$

其中 $\hat{\Phi}_V, \Phi_V, E_V$ 分别是由 $\hat{\Phi}[m], \Phi[m], E[m]$ 排列成的 M 维列向量, \mathbf{H} 为 M 维对角矩阵, 第 m 个对角元素为 $\tilde{H}(-m\lambda / T_s)$, \mathbf{C} 为 $M \times K$ 维矩阵, 其第 m 行 k 列元素为指数再生系数 $c_{m,k}$, \mathbf{n} 是由 $n[k]$ 排列成的 K 维列向量。理论上只有当式(14)中的噪声分量 E_V 各元素满足独立同分布特性时才能保证子空间方法的有效性。然而, 对于一般的指数再生核, \mathbf{n} 经过 $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}$ 的作用将不能保持其原有统计特性。为此, 我们需要对指数再生核进行一些特殊设计, 使得 \mathbf{n} 的统计特性在 E_V 中得以保持。

假设有一个新的采样核 $\psi(t)$, 它生成的函数空间与 $\beta_\alpha(t)$ 一致, 根据指数再生核的特性可知新采样核可以表示为 $\psi(t) = \eta(t) * \beta_\alpha(t)$, 在频域为

$$\Psi(\omega) = \Upsilon(\omega) \Xi_\alpha(\omega) \quad (15)$$

其中 $\Upsilon(\omega)$ 是 $\eta(t)$ 的傅里叶变换。为了保持 \mathbf{n} 的统计特性, 直观上看就是要保证 $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}$ 的各行是标准正交的。这里我们定义 $\mathbf{A} \triangleq \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}$, 其元素 $a_{m,k} = c_{m,k} / \tilde{H}(-m\lambda)$, 作为理论推导, 这里我们不失一般性地假设 $T_s = 1$ 。由式(3)可知 $c_{m,k} = e^{\alpha_m k} c_{m,0}$, 进而有 $a_{m,k} = e^{\alpha_m k} a_{m,0}$, 因此, 当 $\alpha_m = j2\pi m / K$ 时, 即 $\alpha_0 = 0$, $\lambda = 2\pi / K$, 可以保证 \mathbf{A} 的行向量相互正交, 定义 $\omega_m \triangleq 2\pi m / K$, 并结合式(3)可得每一行的范数为

$$\begin{aligned}|a_{m,0}| &= \left| \frac{c_{m,0}}{\tilde{H}\left(\frac{-2\pi m}{K}\right)} \right| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(t) e^{j\frac{2\pi m t}{K}} dt}{\tilde{H}\left(\frac{-2\pi m}{K}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{\tilde{\Psi}(\omega_m)}{\tilde{H}(\omega_m)} \right|\end{aligned}\quad (16)$$

其中 $\tilde{\Psi}(\omega)$ 为 $\tilde{\psi}(t)$ 的傅里叶变换, 因此矩阵 \mathbf{A} 各行的标准正交性可以由 $|a_{m,0}| = 1$ 来保证, 即 $|\tilde{\Psi}(\omega_m)| = |\tilde{H}(\omega_m)|$ 。我们知道, 对偶函数与原函数在频域有式(17)的关系

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{\sum_{k \in \mathcal{Z}} |\Psi(\omega + 2\pi k)|^2} \quad (17)$$

而且由于 $\forall k \in \mathcal{Z}$ 且 $k \neq 0$ 有 $\Xi_\alpha(\omega_m + 2\pi k) = 0$, 因此在 ω_m 处有

$$\tilde{\Psi}(\omega_m) = \frac{\Psi(\omega_m)}{|\Psi(\omega_m)|^2} \quad (18)$$

结合式(16)和式(18)可知, 当 $\Upsilon(\omega_m)$ 满足式(19)即可保证矩阵 \mathbf{A} 各行的标准正交性。

$$\Upsilon(\omega_m) = |\tilde{H}(\omega_m)\mathcal{E}_\alpha(\omega_m)|^{-1} \quad (19)$$

此处, 为了得到最短支撑的采样核, 我们可以取 $\eta(t)$ 为一个 D 阶微分算子, 即 $\psi(t) = \sum_{i=0}^{D-1} d_i \beta_\alpha^{(i)}(t)$, 其中 d_i 为加权值, $(\bullet)^{(i)}$ 表示 i 阶微分。这是一个最大阶最小支撑采样核的变形形式^[22]。变换到频域为 $\Psi(\omega) = \mathcal{E}_\alpha(\omega) \sum_{i=0}^{D-1} d_i (j\omega)^i$, 即

$$\Upsilon(\omega) = \sum_{i=0}^{D-1} d_i (j\omega)^i \quad (20)$$

此时, 需要设置合适的 $\{d_i\}_0^{D-1}$ 使得式(19)成立。将式(20)代入式(19)并写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} 1 & (j\omega_1)^1 & \cdots & (j\omega_1)^{D-1} \\ 1 & (j\omega_2)^1 & \cdots & (j\omega_2)^{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (j\omega_M)^1 & \cdots & (j\omega_M)^{D-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{D-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\tilde{H}(\omega_1)\mathcal{E}_\alpha(\omega_1)|^{-1} \\ |\tilde{H}(\omega_2)\mathcal{E}_\alpha(\omega_2)|^{-1} \\ \vdots \\ |\tilde{H}(\omega_M)\mathcal{E}_\alpha(\omega_M)|^{-1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

这是一个典型的范德蒙矩阵方程, 由于采样值数量 $K \geq M$, 因此 $\{\omega_m\}_1^M$ 是互异的, 此时只要 $D \geq M$ 就必定能找到满足要求的加权系数 $\{d_i\}_0^{D-1}$, D 越大, 设计 $\{d_i\}_0^{D-1}$ 的自由度也越大, 但是系统也越复杂, 因此一般取 $D = M$ 。

图 2 所示的是当 $K = 60$, $M = 25$ 时, 对应于 Dirac 脉冲波形和高斯脉冲波形得到的改进指数再生采样核及其幅频响应, 其中高斯脉冲波形的时宽为 $\tau = 12$ (由于频率和时间是一个相对关系, 因此在不涉及实测数据情况下, 它们的具体单位不会影响讨论的结果。为了简明起见, 本文中频率单位都默认为赫兹(Hz), 时间单位都默认为秒(s), 标准差为

$\sigma_G = 0.4$, 数学上表示为

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}} e^{-t^2/(2\sigma_G^2)}, \quad -\tau/2 \leq t < \tau/2 \quad (22)$$

从图中可以看出, 针对 Dirac 脉冲的改进采样核, 由于 Dirac 脉冲频域特性特殊, 采样核特性将更接近于理想滤波器, 实际上, 当 $M+1 = K$ 时该滤波器就成了一个 Dirichlet 核。而对于高斯脉冲的改进采样核则明显受到高斯脉冲频谱调制。

当假设脉冲波形如式(22)所示, 且式(10)中的噪声分量 $n[k]$ 为 0 均值高斯白噪声时, 在一般指数样条采样核和改进采样核的 FRI 系统中, 由式(13)中的噪声 \mathbf{E} 估计得到的噪声协方差矩阵如图 3 所示, 其中噪声的标准差为 $\sigma = 0.4130$, 改进的采样核如图 3(b)所示。

从图 3 中可以看出, 一般的指数样条采样核改变了噪声原有的统计特性, 而改进的采样核能够保持噪声分量的统计特性, 正如前面所说, 该特性保证了后续算法的前提条件得以满足, 因此使系统稳健性更好。

4 仿真实验

本节通过计算机仿真来验证改进的指数再生核在提高系统重构性能方面的作用。为了保证再生核参数有足够的自由度, 实验中我们以高斯脉冲序列作为输入信号。重构质量用延时估计误差和幅度值估计误差来评估, 两种误差分别定义为 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_e\|_2^2$ 和 $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_e\|_2^2$, 其中 \mathbf{t} 和 \mathbf{t}_e 分别表示由真实延时值和估计值对信号长度 T 归一化之后组成的向量, \mathbf{a} 和 \mathbf{a}_e 表示真实幅度值与估计值相对于原始值归一化得到的向量。

在本实验中, 设输入信号为长度 $T = 60$ 的高斯脉冲序列叠加零均值高斯白噪声, 高斯脉冲波形如式(22)所示, 脉冲宽度为 $\tau = 12$, 标准差为 $\sigma_G =$

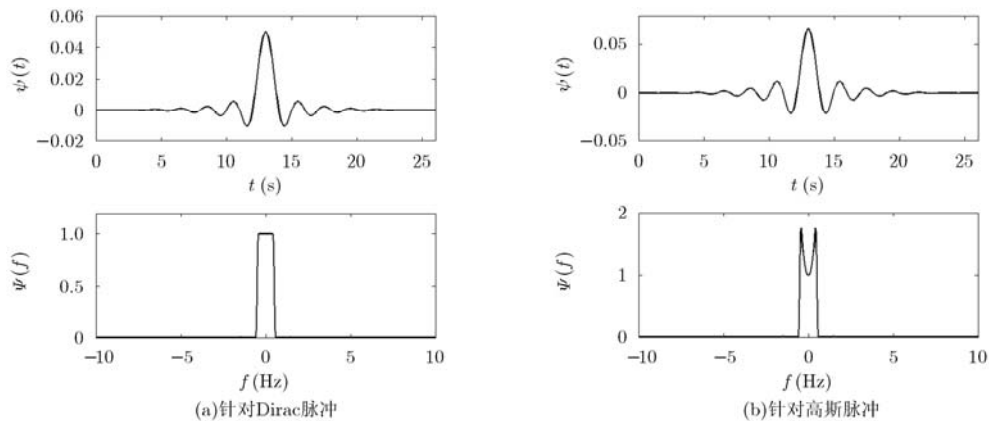


图 2 针对两种不同波形的改进指数再生采样核

0.4。脉冲个数 $L = 6$ ，脉冲延时为 $\{t_l\}_1^L = (7.1, 16.7, 24.9, 33.0, 37.7, 44.6)$ ，脉冲幅度为 $\{a_l\}_1^L = (0.8471, -0.7702, 0.8009, -0.6044, -0.9487, 0.7803)$ 。采样频率 $T_s = 1$ ，采样点数 $K = T/T_s = 60$ ，指数再生核的阶数 $M = 5L = 30$ ，选择再生核参数 $\alpha_m = jm\lambda$ ，且 $m = -M/2, -M/2 + 1, \dots, M/2 - 1, M/2$ ，这可以保证滤波器为实的。另外，对于原始的指数再生核与改进的指数再生核，其 λ 都设为 $2\pi/K$ 。为了使结果具有可比性，实验中保持脉冲幅度和延时值不变，分别在不同的信噪比情况下做蒙特卡洛分析，每个信噪比都做 500 次独立重复试验求平均，重构过程采用了子空间重构算法，仿真结果如图 4 所示。

从图 4 中可以看出，相对于原始指数采样核，使用改进指数采样核能较大程度上提升重构性能。另外一个需要注意的问题是幅度值估计误差曲线在小于 15 dB 的低信噪比区段不够平滑，甚至并不总是单调，下面我们对此进行解释。

我们知道，幅度值是通过求解如式(23)所示问题的最小均方解得到的。

$$\hat{\Phi}[m] = \sum_{l=1}^L v_l u_l^m + E[m] \quad (29)$$

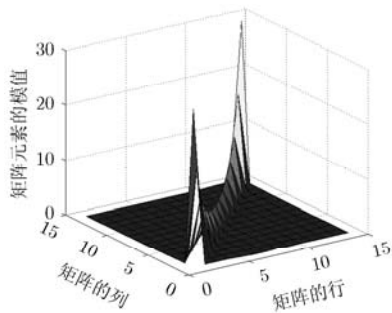
写成矩阵形式为 $Uv = \hat{\Phi} + E$ ，当矩阵 U 的条件数较大时会造成估计误差加大。矩阵 U 的第 m 行第 l 列

元素为 $u_{l,m} = e^{jm\lambda t_l/T_s}$ ，因此影响其条件数的因素有 λ 和 t_l ，由于在实验过程中 λ 的值是确定的，所以影响条件数发生变化的只有 t_l 。重构算法中，首先需要估计出 t_l 的值，然后才能根据式(23)估计幅度值， t_l 的估计误差会改变矩阵 U 的条件数，而对于不同的 SNR，矩阵 U 的条件数也是不同的，如图 5 所示。

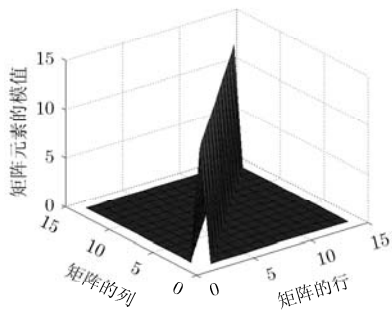
从图 5 中可以看出，无论是一般指数样条采样核系统还是改进指数再生采样核系统，整体而言，矩阵 U 的条件数都是随着信噪比的提高而减小，但在低信噪比区间，曲线并不平滑，甚至是非单调的，这也就导致了图 4 中幅度值估计误差曲线的类似特征。另外，改进指数再生采样核系统对应的矩阵 U 的条件数明显小于一般指数样条采样核系统，这也从另外一个角度解释了改进指数再生采样核能够提升系统稳健性的原因。

5 结束语

本文针对 FRI 采样框架中一般指数再生采样核会影响噪声统计特性这一问题，提出了一种改进的指数再生采样核，对于脉冲波形比较简单的情況，可以通过合理地设置该采样核参数来保持噪声统计特性，从而增加对后续子空间算法的适配性，达到提升性能的目的。

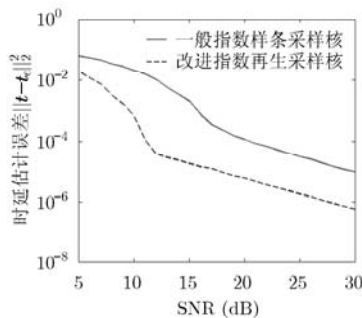


(a) 对应于一般指数样条采样核

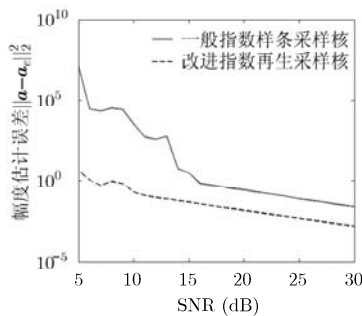


(b) 对应于改进采样核

图 3 估计得到的噪声协方差矩阵 (由 1000 次独立实验进行平均得到)

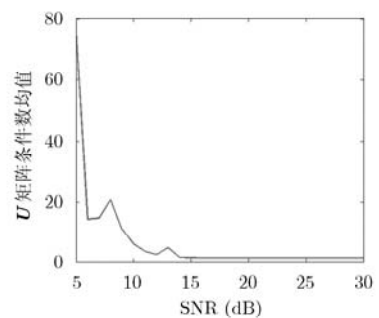


(a) 时延估计误差

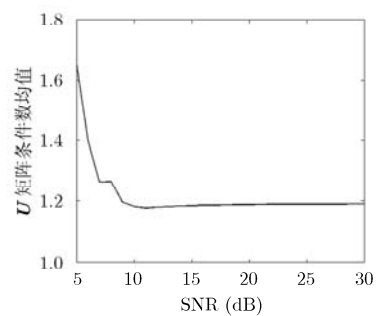


(b) 幅度值估计误差

图 4 指数采样核性能对比曲线



(a) 对应于一般指数样条采样核系统



(b) 对应于改进指数再生采样核系统

图 5 U 矩阵条件数随信噪比变化曲线对比

参考文献

- [1] Vetterli M, Marziliano P, and Blu T. Sampling signals with finite rate of innovation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(6): 1417-1428.
- [2] Dragotti P L, Vetterli M, and Blu T. Sampling moments and reconstructing signals of finite rate of innovation: Shannon meets strang-fix[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(5): 1741-1757.
- [3] Hormati A and Vetterli M. Compressive sampling of multiple sparse signals having common support using finite rate of innovation principles[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(5): 331-334.
- [4] Michaeli T and Eldar Y C. Xampling at the rate of innovation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1121-1133.
- [5] Bajwa W U, Gedalyahu K, and Eldar Y C. Identification of parametric underspread linear systems and super-resolution radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2548-2561.
- [6] Ranieri J, Dokmanic I, Chebira A, *et al.* Sampling and reconstruction of time-varying atmospheric emissions[C]. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP2012), Lansanne, March 2012: 3673-3676.
- [7] Kim B, Muchkaev A, and Kong S H. SAR image processing using super resolution spectral estimation with annihilating filter[C]. 3rd International Asia-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar (APSAR2011), Seoul, Sept. 2011: 1-4.
- [8] Dokmanic I, Ranieri J, Chebira A, *et al.* Sensor networks for diffusion fields: detection of sources in space and time[C]. 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Illinois, Sept. 2011: 1552-1558.
- [9] Asl H A and Dragotti P L. Simultaneous estimation of sparse signals and systems at sub-Nyquist rates[C]. 19th European Signal Processing Conference on Communication, Control and Computing (EUSIPCO 2011), Barcelona, Sept. 2011: 1552-1558.
- [10] Lu Y M, Dragotti P L, and Vetterli M. Localization of diffusive sources using spatiotemporal measurements[C]. 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Illinois, Sept. 2011: 1072-1076.
- [11] Tur R, Eldar Y C, and Friedman Z. Innovation rate sampling of pulse streams with application to ultrasound imaging[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1827-1842.
- [12] Unser M and Blu T. Cardinal exponential splines: Part I—theory and filtering algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(4): 1425-1438.
- [13] Unser M. Cardinal exponential splines: Part II—think analog, act digital[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(4): 1439-1449.
- [14] Berent J, Dragotti P L, and Blu T. Sampling piecewise sinusoidal signals with finite rate of innovation methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(2): 613-625.
- [15] Asl H A, Dragotti P L, and Baboulaz L. Multichannel sampling of signals with finite rate of innovation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(8): 762-765.
- [16] Chen C, Marziliano P, and Kot A C. 2D finite rate of innovation reconstruction method for step edge and polygon signals in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(6): 2851-2859.
- [17] Blu T, Dragotti P L, Vetterli M, *et al.* Sparse sampling of signal innovations[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 31-40.
- [18] 杨峰, 胡剑浩, 李少谦. 基于欠奈奎斯特采样的超宽带信号总体最小二乘重建算法[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(6): 1418-1422.
- Yang Feng, Hu Jian-hao, and Li Shao-qian. A total least squares reconstruction algorithm of UWB signals based on sub-Nyquist sampling[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(6): 1418-1422.
- [19] Cadzow J A. Signal enhancement — A composite property mapping algorithm[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1988, 36(1): 49-62.
- [20] Maravic I and Vetterli M. Sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2788-2805.
- [21] Erdozain A and Crespo P M. Reconstruction of aperiodic FRI signals and estimation of the rate of innovation based on the state space method[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(8): 1709-1718.
- [22] Blu T, Thevenaz P, and Unser M. MOMS: maximal-order interpolation of minimal support[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(7): 1069-1080.
- 王亚军: 男, 1983年生, 博士生, 研究方向为宽带信号处理。
- 李明: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为宽带信号处理与微弱目标检测、雷达图像处理与分析、高速并行信号处理、雷达抗干扰技术等。
- 刘高峰: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为极化SAR图像处理。