

稀疏随机矩阵有限等距性质分析

张波* 刘郁林 王开

(重庆通信学院 DSP 研究室 重庆 400035)

摘要: 稀疏随机矩阵由于具有存储容量小、编码和重构复杂度低、易于更新等优良特性而适用于分布式应用。为确保稀疏随机矩阵可作为压缩感知观测矩阵, 该文证明了稀疏随机矩阵的有限等距性质(RIP)。首先, 证明了测量矩阵满足有限等距性质等价于其子矩阵的格拉姆矩阵特征值分布于1附近; 在此基础上, 证明了当测量值个数满足特定条件时, 稀疏随机矩阵以接近于1的概率满足有限等距性质。仿真实验表明, 稀疏随机矩阵在保证稀疏信号精确重建的同时, 大大节约了测量和重建所需的时间。

关键词: 压缩感知; 稀疏随机矩阵; 有限等距性质; 测量矩阵

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)01-0169-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00023

Restricted Isometry Property Analysis for Sparse Random Matrices

Zhang Bo Liu Yu-lin Wang Kai

(DSP Laboratory, Chongqing Communication Institute, Chongqing 400035, China)

Abstract: Sparse random matrices have attractive properties, such as low storage requirement, low computational complexity in both encoding and recovery, easy incremental updates, and they show great advantages in distributed applications. To make sure sparse random matrices can be used as the measurement matrix, the Restricted Isometry Property (RIP) of such matrices is proved in this paper. Firstly, it is shown that the measurement matrix satisfies RIP is equivalent to the Gram matrix of its submatrix has all of eigenvalues around 1; then it is proved that sparse random matrices satisfy RIP with high probability provided the numbers of measurements satisfy certain conditions. Simulation results show that sparse random matrices can guarantee accurate reconstruction of original signal, while greatly reduce the time of measuring and reconstruction.

Key words: Compressed Sensing (CS); Sparse random matrix; Restricted Isometry Property (RIP); Measurement matrix

1 引言

压缩感知^[1-5] (Compressed Sensing, CS)是一种全新的数据获取和采样理论。该理论指出: 如果信号是稀疏的或者在某个变换域是稀疏的, 则可用一个测量矩阵将该信号投影到低维空间, 投影后的低维信号包含了重构原始信号的全部信息, 通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中精确重构出原始信号。

测量矩阵设计是CS理论的一个重要研究方向。为保证信号在投影过程中不丢失信息, 测量矩阵应

满足一定性质。文献[2]证明了测量矩阵满足有限等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)是完全重构稀疏信号的充分条件, 并指出稠密高斯随机矩阵可以作为普适的测量矩阵。后续研究以减少精确重构原始信号所需的测量值个数为目标, 构建了部分傅里叶矩阵^[3], Toeplitz矩阵^[6]等性能优异的稠密测量矩阵。然而, 文献[7]指出, 采用传统的稠密测量矩阵作为网络数据收集的测量矩阵会带来密集观测问题, 即每个测量值的获取均需要所有节点参与运算^[8]。由于每个测量值均由密集观测得到, 因此测量值的获取需要极大的通信开销, 且进行重建时计算量巨大。为避免密集观测问题, 文献[9]提出用稀疏随机矩阵作为测量矩阵对网络数据进行测量, 该方法计算测量值只需部分节点参与, 显著减少了获取测量值的通信开销, 极大地推动了CS在无线传感器网络(Wireless Sensor Networks, WSNs)中的应用。除此之外, 稀疏随机矩阵在图像处理、遥感成

2013-01-8 收到, 2013-10-21 改回

教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0873), 重庆市自然科学基金重点项目(CSTC2011BA2016), 重庆高校创新团队建设计划(KJTD201343)和重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2013jcyjA40045)资助课题

*通信作者: 张波 zhangboswjtu@163.com

像、雷达探测、数据流计算等领域都具有巨大的应用潜力,引起了广泛关注^[9-12]。

现有文献缺乏对稀疏随机矩阵 RIP 的证明,本文则给出了其严格证明。首先,证明了测量矩阵满足 RIP 等价于其子矩阵的格拉姆矩阵特征值分布位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围内,将矩阵满足 RIP 的证明问题转化为格拉姆矩阵特征值分布范围的讨论问题;然后,证明当测量值个数满足特定条件时,格拉姆矩阵特征值以接近 1 的概率位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围内,从而证明稀疏随机矩阵满足 RIP。

2 基本理论

2.1 压缩感知

CS 的基本思想是利用稀疏信号的少量投影值重构原始信号。考虑一个长度为 n 、稀疏度为 k ($k < n$) 的信号 \mathbf{x} , 用 $m \times n$ ($m \ll n$) 的测量矩阵 \mathbf{A} 对 \mathbf{x} 投影:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{e} \in R^{m \times 1}$ 为测量误差向量, $\mathbf{y} \in R^{m \times 1}$ 为测量值向量。如果测量矩阵 \mathbf{A} 满足 RIP, 那么可以由 m 个非自适应的线性投影值 \mathbf{y} 重构出原始信号 \mathbf{x} 。RIP 定义如下:

定义 1 (有限等距性质) 如果 $m \times n$ 的矩阵 \mathbf{A} 满足

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{z}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad \forall \mathbf{z} \in R^{|T|} \quad (2)$$

那么就称矩阵 \mathbf{A} 以参数 $\delta_k \in [0, 1)$ 满足 k 阶有限等距性质, 简记为 $\mathbf{A} \in \text{RIP}(k, \delta_k)$ 。其中 $J = \{1, 2, \dots, n\}$ 是矩阵 \mathbf{A} 的列索引集合, $T \subseteq J$ 是矩阵 \mathbf{A} 的子列索引集合, $|T| \leq k$, $|\cdot|$ 表示集合的势, 即集合元素的个数, \mathbf{A}_T 为保留 \mathbf{A} 中子列索引集合 T 对应列构成的子矩阵。文献[13]给出了精确重构 k 稀疏信号的充分条件为 $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$, 文献[14]进一步得到了恢复 k 稀疏信号的充分条件为 $\delta_k < 0.307$ 。

稀疏信号 \mathbf{x} 的重构问题^[15,16]可等价于求解矩阵列向量的稀疏组合方式问题, 利用 l_1 范数意义下的优化问题可求解得到 \mathbf{x} 的近似解 $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

2.2 稀疏随机矩阵

定义 2 (稀疏随机矩阵) 设 \mathbf{A} 为一个 $m \times n$ 的矩阵, 如果 \mathbf{A} 的每一列仅含有 μm 个非零元素, 且非零元素独立同分布, 那么就称矩阵 \mathbf{A} 为稀疏随机矩阵, 且稀疏率为 μ 。

μ 控制了稀疏随机矩阵的稀疏度, 当 $\mu = 1$ 时, 稀疏随机矩阵即为稠密随机矩阵。

3 有限等距性质的特征值分布条件

通过讨论格拉姆矩阵特征值的分布范围, 文献[6]和文献[17]分别证明了 Toeplitz 矩阵和准 Toeplitz 矩阵满足有限等距性质。然而, 上述文献并未证明矩阵满足 RIP 与格拉姆矩阵特征值分布位于 1 附近的等价关系, 下面将利用 Rayleigh-Ritz 定理证明测量矩阵满足 k 阶 RIP 等价于该矩阵任意抽取 k 列构成子矩阵的格拉姆矩阵的特征值分布位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围内。

引理 1 (Rayleigh-Ritz 定理) 设 \mathbf{D} 是 $n \times n$ 的 Hermite 矩阵, 并令 \mathbf{D} 的特征值按递减排序排列, 即 $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}$, 则

$$\max_{\mathbf{z} \neq 0} \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{D} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}} = \lambda_{\max} \quad (4)$$

$$\min_{\mathbf{z} \neq 0} \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{D} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}} = \lambda_{\min} \quad (5)$$

式(4)取等号的条件是 $\mathbf{D}\mathbf{z} = \lambda_{\max}\mathbf{z}$, 式(5)取等号的条件是 $\mathbf{D}\mathbf{z} = \lambda_{\min}\mathbf{z}$ 。

定理 1 矩阵 \mathbf{A} 满足 k 阶 RIP 性质的充要条件为矩阵 \mathbf{A} 中任意抽取 k 列构成子矩阵的格拉姆矩阵 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T) = \mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T$ 的所有特征值均位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围内。

证明 (1)充分性 记 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)$ 的最大和最小特征值分别为 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T))$ 和 $\lambda_{\min}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T))$, 由于 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)$ 是 Hermite 矩阵, 根据引理 1 可知, 对任意的 $\mathbf{z} \in R^k$ 有式(6)成立。

$$\lambda_{\min}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) \leq \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) \quad (6)$$

即

$$\lambda_{\min}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{z}\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad (7)$$

令 $\delta_k = \max\{1 - \lambda_{\min}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)), \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) - 1\}$, 那么

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{z}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad (8)$$

(2)必要性 采用反证法证明, 设 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) > 1 + \delta_k$, 根据引理 1, 当 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)\mathbf{z} = \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T))\mathbf{z}$ 时, 有

$$\frac{\mathbf{z}^H \mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{z}} = \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) > (1 + \delta_k) \quad (9)$$

即存在一个 $\mathbf{z} \in R^k$ 满足:

$$\|\mathbf{A}_T \mathbf{z}\|_2^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) \|\mathbf{z}\|_2^2 > (1 + \delta_k) \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad (10)$$

这与 RIP 的定义相矛盾, 故假设不成立, 即 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) < 1 + \delta_k$, 同理可得 $\lambda_{\min}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)) > 1 - \delta_k$ 。即 $\mathbf{G}(\mathbf{A}_T)$ 的所有特征值均位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围内。证毕

4 稀疏随机矩阵有限等距性质分析

根据定理 1 可知, 要证明一个矩阵以参数 δ_k 满足 k 阶 RIP, 只需证明该矩阵任意抽取 k 列构成子矩阵的格拉姆矩阵的所有特征值均位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 。在经典的特征分析中, 圆盘定理对矩阵的特征值范围作出了估计。

引理 2 (Gersgorin 圆盘定理) 矩阵 $M_{u \times u}$ 的特征值分布于 u 个圆盘 $d_i = d_i(c_i, r_i)$ 的并集 $\left(\bigcup_{i=1}^u d_i(c_i, r_i)\right)$ 中, 其中 $i = 1, 2, \dots, u$, 圆盘的圆心 $c_i = M_{i,i}$, 半径 $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^u |M_{i,j}|$, 其中 $M_{i,i}$ 和 $M_{i,j}$ 分别是矩阵 M 的对角线元素和非对角线元素。

矩阵 A 任意抽取 k 列构成的子矩阵 A_T 共有 C_n^k 个, 要依次证明每个子矩阵格拉姆矩阵的特征值分布位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 是一个组合复杂度问题, 因此, 本文将证明所有子矩阵格拉姆矩阵的特征值同时位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围。矩阵 A 的格拉姆矩阵 $G(A)$ 包含了所有子矩阵格拉姆矩阵的特征值分布信息, 为证明所有子矩阵的格拉姆矩阵的特征值分布均位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围, 可适当选取 $\delta_d, \delta_o > 0$, $\delta_d + \delta_o = \delta_k \in (0, 1)$, 如果 $G(A)$ 的各对角元素 $G_{i,i}$ 满足 $|G_{i,i} - 1| < \delta_d$, 各非对角元素 $G_{i,j} (i \neq j)$ 满足 $|G_{i,j} - 1| < \delta_o/k$, 即各 Gersgorin 圆盘的圆心与 1 之间的距离不超过 δ_d , 各圆盘的半径不超过 δ_o , 根据引理 2 即可证明 $G(A_T)$ 的所有特征值分布位于 $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$ 范围。如果矩阵 A 的非零元素独立同分布于高斯分布, 则 $G(A)$ 的各对角元素为高斯变量的平方和, 各非对角元素为独立高斯变量的乘积之和, 对角元素和非对角元素的取值范围可由以下引理确定。

引理 3 设序列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中仅有 $n\mu$ 个非零元素, 并且非零元素服从均值为 0, 方差为 $1/(n\mu)$ 的高斯分布, 那么

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1\right| \geq \delta_d\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta_d^2 n\mu}{16}\right) \quad (11)$$

Pr 表示事件发生的概率。

证明 首先考虑序列 $\{z_i\}_{i=1}^n$, 其中各元素独立同分布于均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯分布, 对 $0 \leq t \leq 1$, 由文献[6]可知

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^n z_i^2 - n\delta^2\right| \geq 4\delta^2 \sqrt{nt}\right) \leq 2 \exp(-t) \quad (12)$$

$\sum_{i=1}^n x_i^2$ 为序列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 各元素的平方和, 加法具有交换性, 因此可通过交换元素顺序将 $n\mu$ 个非零元

素交换到前 $n\mu$ 项, 那么有

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^{n\mu} x_i^2 \quad (13)$$

将式(13)和非零元素方差 $1/(n\mu)$ 代入式(12)可得

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n\mu} x_i^2 - 1\right| \geq \frac{4}{n\mu} \sqrt{n\mu t}\right) \leq 2 \exp(-t) \quad (14)$$

令 $\delta_d = \frac{4}{n\mu} \sqrt{n\mu t}$, 代入式(14)可得

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n\mu} x_i^2 - 1\right| \geq \delta_d\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta_d^2 n\mu}{16}\right) \quad (15)$$

证毕

引理 4 设序列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 中仅有 $n\mu$ 个非零元素, 并且非零元素服从均值为 0, 方差为 $1/(n\mu)$ 的高斯分布, 那么

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\mu t^2}{4 + 2t}\right) \quad (16)$$

证明 首先考虑 $\{z_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{r_i\}_{i=1}^n$, 其中各元素独立同分布于均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯分布, 则由文献[6]可知

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^n z_i r_i\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2(n\sigma^2 + t/2)}\right) \quad (17)$$

设序列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 非零元素的混叠长度为 l (显然 $l \leq n\mu$), 那么 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 只有 l 项非零, 加法具有交换性, 将 l 个非零元素交换到前 l 项, 那么有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^l x_i y_i \quad (18)$$

将式(18)和非零元素方差 $1/(n\mu)$ 代入式(17)有

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \geq t\right) &= \Pr\left(\left|\sum_{i=1}^l x_i y_i\right| \geq t\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{n^2 \mu^2 t^2}{4l + 2n\mu t}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\mu t^2}{4 + 2t}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

证毕

借助以上引理可证明稀疏随机矩阵满足有限等距性质。

定理 2 设 A 为一个 $m \times n$ 维, 稀疏率等于 μ 的稀疏随机矩阵, 且非零元素独立同分布于均值为零, 方差为 $1/(m\mu)$ 的高斯分布。那么对任意 $\delta_k \in (0, 1)$, 存在常数 c_1 和 c_2 (由 δ_k 决定), 使得当 $m \geq (c_2 k^2 \log n) / \mu$ 时, 稀疏随机矩阵 A 以不小于 $1 - \exp(-c_1 m\mu / k^2)$ 的概率满足 k 阶 RIP 性质。

证明 记 $A_{i,j} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的第 (i, j) 元素, 那么 $G(A)$ 的对角线元素可表示为

$\mathbf{G}_{i,i} = \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ji}^2$, 由引理 3 可知

$$\Pr\left(|\mathbf{G}_{i,i} - 1| \geq \delta_d\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta_d^2 m \mu}{16}\right) \quad (20)$$

则所有的 $\mathbf{G}_{i,i}$ 满足

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n |\mathbf{G}_{i,i} - 1| \geq \delta_d\right) \leq 2n \exp\left(-\frac{\delta_d^2 m \mu}{16}\right) \quad (21)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{A})$ 的非对角线元素可表示为 $\mathbf{G}_{i,j} = \sum_{r=1}^m \mathbf{A}_{ri} \cdot \mathbf{A}_{rj}$, 由引理 4 可知

$$\Pr\left(|\mathbf{G}_{i,j}| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{m \mu t^2}{4 + 2t}\right) \quad (22)$$

将 t 用 δ_o/k 替换可得

$$\Pr\left(|\mathbf{G}_{i,j}| \geq \frac{\delta_o}{k}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{m \mu \delta_o^2}{4k^2 + 2k\delta_o}\right) \quad (23)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{A})$ 的非对角线元素具有对称性, 互不相同的非对角元素总共有 $n(n-1)/2$ 个, 则所有 $\mathbf{G}_{i,j}$ 联合概率分布满足

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\mathbf{G}_{i,j}| \geq \frac{\delta_o}{k}\right) \leq n^2 \exp\left(-\frac{m \mu \delta_o^2}{4k^2 + 2k\delta_o}\right) \quad (24)$$

记 P 为稀疏随机矩阵满足 RIP 的概率, 假设 $\delta_d = (2/3)\delta_k$, $\delta_o = (1/3)\delta_k$ 及 $n \geq 2$, 由式(21)和式(24)可知

$$\bar{P} = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \left[|\mathbf{G}_{i,i} - 1| \geq \delta_d\right]\right) + \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[|\mathbf{G}_{i,j}| \geq \frac{\delta_o}{k}\right]\right)$$

$$\leq 2n^2 \exp\left(-\frac{m \mu \delta_k^2}{36k^2 + 6k\delta_k}\right) \leq 2n^2 \exp\left(-\frac{m \mu \delta_k^2}{42k^2}\right)$$

对任意的 $c_1 < \frac{\delta_k^2}{42}$ 及 $c_2 = \frac{126}{(\delta_k^2 - 42c_1)}$, 若测量值个数 m 满足

$$m \geq \frac{c_2}{\mu} k^2 \log n \quad (26)$$

则有

$$P \geq 1 - \exp\left(-\frac{c_1 m \mu}{k^2}\right) \quad (27)$$

证毕

5 仿真实验

本节将通过仿真实验分析稀疏随机矩阵的性能, 验证稀疏随机矩阵作为压缩感知观测矩阵的可行性和实用性。

图 1 是 1 维稀疏信号的重构实验, 信号长度 $n = 500$, 稀疏度 $k = 30$, 测量次数 $m = 200$, 分别采用稀疏率 μ 为 0.2, 0.4, 0.6, 1.0 的稀疏随机矩阵对信号进行测量, 然后用正交匹配追踪^[15](Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法重构, 相应的重构结果如图 1(a)~ 图 1(d)所示。由图 1 实验结果可看出, 4 种不同稀疏率的稀疏随机矩阵均精确重构出原始信号。

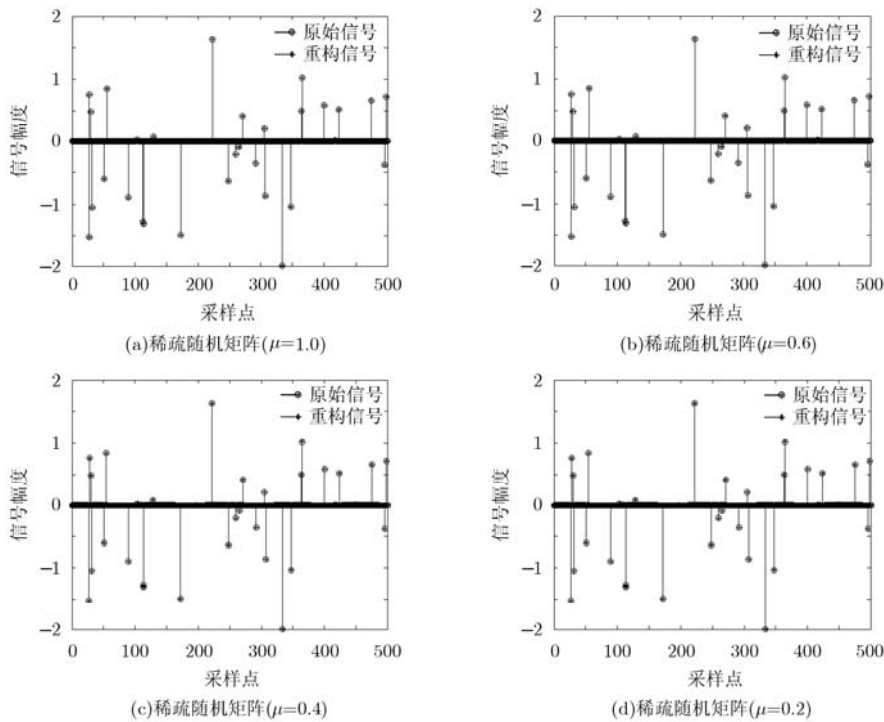


图 1 1 维稀疏信号重建

图 2 比较了不同稀疏率测量矩阵的重建成功率。图 2(a)中信号长度 $n = 500$ ，稀疏度 $k = 50$ ，测量次数 m 由 90 增加到 180，步长为 3。图 2(b)中信号长度 $n = 500$ ，测量值个数 $m = 200$ ，信号稀疏度由 30 逐渐增加到 120，步长为 3。对每组参数 (n, m, k) 重复实验 1000 次，将均方误差的相对值作为重构误差，如果重构误差小于 0.02 则视为重构成功，重构成功率为重构成功次数与总试验次数之比。由图 2 的实验结果可以看出，测量矩阵的稀疏 μ 和精确重建稀疏信号所需的测量值个数之间存在权衡问题，随着测量矩阵稀疏率的减小，精确重建稀疏信号所需的测量值个数略微增加。

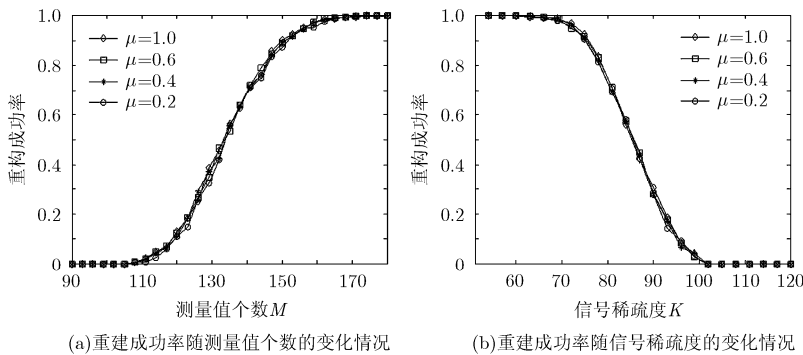


图 2 重建成功率比较

固定信号长度 $n = 500$ ，测量次数 $m = 200$ ，稀疏度 $k = 30$ ，稀疏率从 0.05 逐渐增大到 1.00，步长为 0.05，图 3 和图 4 分别是测量和重建时间随测量矩阵稀疏率增加的变化曲线。由图 3 和图 4 可以看出，测量和重建时间均随着测量矩阵稀疏率的增大而显著增大，这是因为在测量和重建过程中，需要进行矩阵和向量的乘法运算，稀疏随机矩阵中含有大量的零元素，导致运算量大大减少。

结合以上仿真结果可知：对稀疏随机矩阵加入大量零元素，可在略微增加精确重建所需的测量值个数的情况下，大大减少测量和重建时间，对于图像压缩传感、传感器网络数据压缩传感等实际应用具有重要的意义。

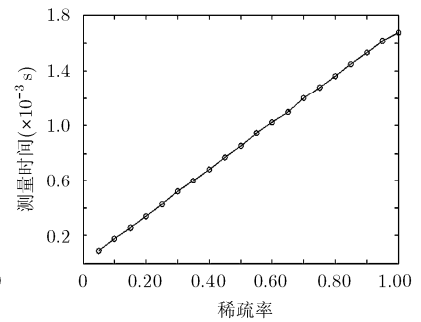


图 3 测量时间随测量矩阵稀疏率变化情况

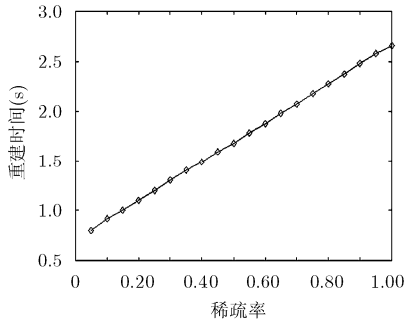


图 4 重建时间随测量矩阵稀疏率变化情况

6 结束语

测量矩阵满足 RIP 是确保重构稀疏信号的充分条件。本文证明了稀疏随机矩阵满足 RIP，为应用稀疏随机矩阵作为 CS 观测矩阵实际问题提供了理论指导。该证明分两步进行：首先，推导得到了测量矩阵满足 RIP 的特征值分布条件，将 RIP 的证明问题转化为格拉姆矩阵特征值分布范围的讨论问题；然后，证明了当测量值个数满足特定条件时，稀疏随机矩阵以接近 1 的概率满足 RIP。下一步将以本文的结论为基础，针对 WSNs 的具体应用，深

入研究适用于 WSNs 数据收集的稀疏测量矩阵设计问题。

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candes E J and Tao T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [3] Candes E J, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [4] Candes E J, Eldar Y C, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59-73.
- [5] Zhang T. Sparse recovery with orthogonal matching pursuit under RIP[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(9): 6215-6221.
- [6] Haupt J, Bajwa W, Raz G, et al. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. *IEEE Transactions Information Theory*, 2010, 56(11):

- 5862-5875.
- [7] Luo J, Liu X, and Rosenberg C. Does compressed sensing improve the throughput of wireless sensor networks?[C]. IEEE International Conference on Communications, Cape Town, 2010: 1-6.
- [8] Lee S, Patten S, Sathiamoorthy M, *et al.*. Spatially-localized compressed sensing and routing in multi-hop sensor networks[C]. Proceedings of the Third International Conference on Geosensor Networks, Oxford, 2009: 11-20.
- [9] Wang Wei, Garofalakis M, and Ramchandran K. Distributed sparse random projections for refinable approximation[C]. IEEE International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, Cambridge, 2007: 331-339.
- [10] Gilbert A and Indyk P. Sparse recovery using sparse matrices [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 937-947.
- [11] Wu K and Guo X. Compressive sensing with sparse measurement matrices[C]. Proceedings of the 73rd IEEE Vehicular Technology Conference, Budapest, 2011: 1-5.
- [12] 孙晶明, 王殊, 董燕. 稀疏随机矩阵的观测次数下界[J]. 信号处理, 2012, 28(8): 1156-1163.
Sun Jing-ming, Wang Shu, and Dong Yan. Lower bounds on the number of measurements of sparse random matrices[J]. *Signal Processing*, 2012, 28(8): 1156-1163.
- [13] Candes E J, Romberg J, and Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [14] Cai T T, Wang L, and Xu G W. New bounds for restricted isometry constants[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(9): 4388-4394.
- [15] Tropp J A and Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [16] 甘伟, 许录平, 苏哲, 等. 基于贝叶斯假设检验的压缩感知重构[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(11): 2640-2646.
Gan Wei, Xu Lu-ping, Su Zhe, *et al.*. Bayesian hypothesis testing based recovery for compressed sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(11): 2640-2646.
- [17] Liu Y L, Wang K, and He J W. Signal recovery by compressed sensing in IR-UWB systems[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2012, 21(2): 339-344.
- 张波: 男, 1987年生, 硕士, 助教, 研究方向为压缩感知、无线传感器网络.
- 刘郁林: 男, 1971年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为盲信号处理、超宽带通信、无线传感器网络等.
- 王开: 男, 1984年生, 硕士, 讲师, 研究方向为超宽带通信、压缩感知及其应用.