

图像分解的多尺度变分模型

白 键* 冯象初 王旭东
(西安电子科技大学数学系 西安 710071)

摘 要: 该文提出了一种新的多尺度变分图像分解模型。首先在 Tadmor 的分层多尺度变分模型的基础上, 给出了一种新的 (BV, H^{-1}) 分层多尺度图像分解方法, 然后在逆尺度空间上积分“尺度”图像并将拉普拉斯算子作用于曲率项就得到了新的积分微分方程。该方程包含一个单调递增的尺度函数, 它的值与残差图像的星范数成反比。接着讨论了该方程的重要性质, 并给出了数值离散算法。理论分析与数值实验表明新的积分微分方程是一种有效的图像分解模型。

关键词: 图像分解; 泛函极小; 总变差最小; 积分微分方程

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)05-1190-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01459

A Multiscale Variational Model for Image Decomposition

Bai Jian Feng Xiang-chu Wang Xu-dong
(Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: This paper presents a novel multiscale variational image decomposition model. Based on the hierarchical multiscale variational model of Tadmor, a novel (BV, H^{-1}) hierarchical multiscale image decomposition method is proposed, then the novel Integro-Differential Equation (IDE) is obtained by integrating in inverse scale space a succession of refined slices of the image and balancing a Laplacian of the curvature term at the finer scale. The IDE includes a monotone increasing scaling function which is shown to dictate the size of the residual image measured in the star-norm. Some theoretical properties of the novel IDE and its numerical implementation methods are given. Theoretical analysis and numerical experiments show the effectiveness of the IDE model.

Key words: Image decomposition; Functional minimization; Total variation minimization; Integro-differential equation

1 引言

将图像分解成一些有意义的部分是图像处理的主要目标。其中最广泛的模型就是图像去噪模型。图像去噪将原始带噪图像分解成去噪后的图像和噪声图像。与图像去噪相似, 图像分解将原始图像分解成几何(卡通)部分和纹理(包括噪声和小尺度细节)部分。总变差最小(Total Variator, TV)模型^[1]在图像去噪方面能够很好地保持图像的边缘。然而, 在文献[2]中已经指出, 它不能区分具有小的灰度差的大尺度边缘和纹理细节, 所以它并不适合图像分解。例如, 当初始图像 $f(x, y)$ 是一个单位圆盘的时候, TV 最小化的解是 $cf(x, y)$, 其中 $c \in [0, 1)$ 是一个常数。无论将常数 TV 取多大也不可能得到 $c = 1$,

因此, $f - u$ 部分不仅包含纹理部分, 而且包含大尺度边缘。最近, 文献[2]中, Meyer 提出用 G 空间(在某种意义上的 BV 空间的对偶空间)来刻画纹理。 G 空间包含了更多的纹理并且适合提取图像的纹理部分。在 Meyer 提出的模型的基础上, 文献[3-6]中给出了一些图像分解的变分模型, 它们可以看成是经典的 TV 模型的推广。文献[4]提出用 H^{-1} 范数来代替 L^2 范数, 其相应的最小化问题导致解四阶偏微分方程。与经典的 TV 模型相比较, 这些新的分解模型在纹理部分具有更少的卡通成分。但是, 仍然有一些大尺度边缘存在于纹理部分中。

最近, 一些新的积分微分方程方法在图像去噪和分解上得到了一些应用。文献[6]中提出了一种新的积分微分方程, 该方程可以很好地去掉噪声并且将图像分解成卡通和纹理成分; 文献[7]中提出带有分数阶时间导数和分数阶空间导数的偏微分方程, 然而其本质仍然是积分微分方程; 文献[8]和文献[9]中首次提出带有时间积分的积分微分方程, 该方程

2012-11-14 收到, 2013-02-06 改回

国家自然科学基金(61105011)和博士点新教师基金(20100203120010)资助课题

*通信作者: 白键 keywhite26@126.com

在去噪声方面比传统的偏微分方程方法有一定的优势, 但是由于 $L^2(\Omega)$ 和 $L^1(\Omega)$ 并不是刻画纹理的适当的空间, 所以它们仍然不是图像分解最好的选择。本文提出了一种新的多尺度图像分解模型。首先给出了新的多尺度分层图像分解模型, 该模型需要求解一系列凸变分问题。如果引入连续时间变量, 就得到新的带有尺度函数的积分微分方程。在新的积分微分方程模型中, 尺度参数不是一个固定的值, 而是一个随时间递增的单调增函数。因此, 该模型能够连续提取残差图像中的纹理部分。与经典的尺度空间方法(例如热方程或各向异性扩散)相反, 新的积分微分方程方法是一种逆尺度空间方法。随着时间的增加, 它将越来越多的小尺度细节加入到卡通部分中。新的积分微分方程很适合图像分解, 纹理部分中包含很少的结构。理论分析与数值实验证明提出的积分微分方程可以有效地对图像进行“卡通+纹理”分解。

2 相关的图像分解模型

近些年来, 将图像分解成卡通部分(有界变差部分)和纹理部分(震荡部分)是图像处理的重要研究课题。最近提出的偏微分方程^[3-6]可以看成经典的 TV 模型^[1]的推广。TV 模型在图像去噪方面能够很好地保持图像的边缘。然而, 如果 λ 太小, 小的细节(纹理)被去除了。为了克服这个缺点, 文献[2]提出用 G 范数来代替 $f - u$ 的 L^2 范数:

$$E_Y(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \|f - u\|_* \quad (1)$$

文献[2]还给出了下面两个重要的不等式^[2]:

引理 1 如果 $v \in L^2$, 那么

$$\left| \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy \right| \leq \|f\|_{BV} \|v\|_*$$

引理 2 如果 $u \in L^2$, 那么

$$\|u\|_* = \sup((u, v)_{L^2} / \|v\|_{BV} : v \in BV)$$

G 范数的形式非常复杂, 为了简化计算, 文献[4]提出用 H^{-1} 范数来代替 G 范数:

$$E_{OSV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \|f - u\|_{H^{-1}}^2 \quad (2)$$

H^{-1} 范数定义为 $\|f - u\|_{H^{-1}}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(\Delta^{-1})(f - u)|^2 d\Omega$, 其中 Δ^{-1} 是逆拉普拉斯算子^[4]。泛函式(2)的能量极小化可以用下面四阶偏微分方程(OSV 方程)^[4]来求解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] - (u - f) \quad (3)$$

3 新的多尺度图像分解模型

与上面的偏微分方程方法不同, 文献[8]提出式(4)所求的积分微分方程(IDE):

$$\int_{s=0}^t u(x, y, s) ds = f(x, y) + \frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{|\nabla u(x, y, t)|} \right) \quad (4)$$

式(4)可以很好地去除噪声并且保持边缘。在文献[8]的工作基础上, 本文提出一种基于多尺度分层 (BV, H^{-1}) 图像分解的积分微分方程(IDE)。OSV 模型^[4]可以很好地将图像分解成卡通和纹理部分。然而, λ 是一个固定的参数。对于非常小的 λ , 泛函式(4)的极小化解 u_{λ} 仅仅包含图像的主要轮廓。当 λ 越来越大时, u_{λ} 就含有越来越多的图像细节。如果将 f 在初始尺度 λ_0 下分解, 有

$$\{u_{\lambda_0}, v_{\lambda_0}\} = \arg \min_{f=u+v} \{ \|u\|_{BV} + \lambda_0 \|v\|_{H^{-1}}^2 \}$$

残差图像是 $v_{\lambda_0} = f - u_{\lambda_0}$, 它可能仍然包含一些重要的细节, 因此如果用一系列变化的尺度参数 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ 来代替固定的尺度参数 λ , 就得到 v_{λ_j} 的多尺度分层 (BV, H^{-1}) 分解:

$$\{u_{\lambda_j}, v_{\lambda_j}\} = \arg \min_{v_{\lambda_{j-1}}=u+v} \{ \|u\|_{BV} + \lambda_j \|v\|_{H^{-1}}^2 \} \quad (5)$$

为了能够得到新的积分微分方程, 引入连续时间步长 τ , 并将 u_{λ_j} 以 τ 为单位重新求解, 那么式(5)可以改写为: $\{u_{\lambda_j}, v_{\lambda_j}\} = \arg \min_{v_{\lambda_{j-1}}=\tau u+v} \left\{ \|u\|_{BV} + \frac{\lambda_j}{\tau} \|v\|_{H^{-1}}^2 \right\}$ 。注意到在每一步都有 $v_{\lambda_{j-1}} - v_{\lambda_j} = \tau u_{\lambda_j}$, 所以在第 $N+1$ 步后就得到了下面的 (BV, H^{-1}) 多尺度分层图像表示: $f = \tau u_{\lambda_0} + \tau u_{\lambda_1} + \dots + \tau u_{\lambda_N} + v_{\lambda_N}$ 。

如果选取非常小的初始尺度 λ_0 , u_{λ_0} 是平凡的零值图像。这个结果可以从定理 1 得到。

定理 1 设 u 是泛函式(2)的极小化解并且满足 $v = f - u$, 那么

$$\|\Delta^{-1} f\|_* \leq \frac{1}{2\lambda} \text{ 当且仅当 } u = 0, v = f \quad (6)$$

证明可参看文献[4]。因此为了获得 f 的主要轮廓, 初始尺度应该很小但是不能太小: λ_0 应该大于某一阈值, 该值可以由式(6)中的星范数确定, $\lambda_0 > \lambda_L = \frac{1}{2\|\Delta^{-1} f\|_*}$ 。这就产生了分层多尺度 (BV, H^{-1}) 图像分解,

$$f = \sum_{k=k_0}^N \tau u_{\lambda_k} + v_{\lambda_N} \quad (7)$$

其中 λ_{k_0} 代表初始尺度, $u_{\lambda_{k_0}}$ 是第 1 个非平凡最小化解。

下面在多尺度 (BV, H^{-1}) 图像分解的基础上给

出新的 IDE。对于多尺度 (BV, H^{-1}) 分解的第 N 步: $[u_{\lambda_N}, v_{\lambda_N}] = \arg \min_{v_{\lambda_{N-1}} = \tau u + v} \left\{ |u|_{BV} + \frac{\lambda_N}{\tau} \|v\|_{H^{-1}}^2 \right\}$, 其欧拉-拉格朗日方程为

$$\Delta^{-1}(u_{\lambda_N} - v_{\lambda_{N-1}}) = \frac{1}{-2\lambda_N} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{\lambda_N}}{|\nabla u_{\lambda_N}|} \right) \quad (8)$$

从式(7)有 $v_{\lambda_{N-1}} = f - \sum_{k=k_0}^{N-1} \tau u_{\lambda_k}$, 将其代入式(8)得到

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} \left(\sum_{k=k_0}^N \tau u_{\lambda_k} - f \right) &= -\frac{1}{2\lambda_N} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{\lambda_N}}{|\nabla u_{\lambda_N}|} \right) \\ \text{令 } \tau \rightarrow 0, \text{ 有} \\ \Delta^{-1} \left(\int_{s=t_0}^t u(x, y, s) ds - f(x, y) \right) &= -\frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{|\nabla u(x, y, t)|} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

将拉普拉斯算子 Δ 作用于式(9), 得到式(10)所示的 IDE:

$$\begin{aligned} \int_{s=t_0}^t u(x, y, s) ds - f(x, y) &= -\frac{1}{2\lambda(t)} \Delta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{|\nabla u(x, y, t)|} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

其中初始条件为 $u(x, y, 0) = 0$, 边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ 并且 $\frac{\partial \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 (t \geq t_0)$ 。尺度

函数 $\lambda(t)$ 是单调增加的, 它在式(10)中所起的重要作用在第 4 节中可以看到。

本文用式(10)对图像进行分解。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 解 $U(\cdot, t) = U(x, y, t) = \int_{s=t_0}^t u(x, y, s) ds$ 收敛于初始图像 f , 所以为了获得好的分解效果, 时间演化应该在早期停止。函数族 $\{U(x, y, t)\}_{t \geq t_0}$ 可以看成 f 的逆尺度空间表示, t 是逆尺度参数^[10]。通过选取适当的时间参数 t , $U(x, y, t)$ 就是初始图像的卡通部分, $f - U$ 就是纹理部分。

4 新的积分微分方程的理论分析

在这一节给出新模型的一些重要的性质。为了书写方便, 用记 $V(x, y, t) = f(x, y) - \int_{s=t_0}^t u(x, y, s) ds$ 表示残差图像。

定理 2 对于积分微分方程模型式(10), 残差图像 $V(x, y, t)$ 可以由尺度函数 $\lambda(t)$ 控制, 即

$$\|\Delta^{-1}V(x, y, t)\|_* = \frac{1}{2\lambda(t)}$$

证明 由式(9), 对于 $\forall \varphi \in BV$, 有

$$|(\Delta^{-1}V, \varphi)| = \left| \left(\frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \varphi \right) \right|$$

再由格林公式和边界条件 $\frac{\Delta^{-1}\varphi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$, 得到

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \varphi \right) \right| &= \left| - \left(\frac{1}{2\lambda(t)} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla \varphi \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\lambda(t)} |\varphi|_{BV} \end{aligned}$$

所以有 $\|\Delta^{-1}V\|_* \leq \frac{1}{2\lambda(t)}$ 。

设 $\varphi = u$, 根据定理 1, 得到

$$\begin{aligned} |(\Delta^{-1}V, \varphi)| &= |(\Delta^{-1}V, u)| = \left| - \left(\frac{1}{2\lambda(t)} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u \right) \right| \\ &= \frac{1}{2\lambda(t)} |u|_{BV} \leq \|\Delta^{-1}V\|_* |u|_{BV} \end{aligned}$$

所以有

$$\|\Delta^{-1}V\|_* \geq \frac{1}{2\lambda(t)} \quad \text{证毕}$$

定理 2 给出了残差图像的星范数与尺度函数 $\lambda(t)$ 成反比。因此, 对于小的 $\lambda(t)$ 值, 只有很少的纹理在 $U(x, y, t)$ 中。随着 $\lambda(t)$ 增加, 越来越多的纹理被加入到 $U(x, y, t)$ 中。所以, 对于 $U(x, y, t)$, $\lambda(t)$ 可以看成“逆尺度函数”。特别是, 如果选择 $\lambda(t)$ 为单调增函数, 那么残差图像当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于零值图像。由 $\lambda(t)$ 的单调递增性还可以得到定理 3 关于式(10)的能量分解定理:

定理 3 对于积分微分方程式(10), 有下面的能量分解定理:

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda(s)} |u(x, y, s)|_{BV} ds + \|V(x, y, t)\|_{H^{-1}}^2 = \|f\|_{H^{-1}}^2$$

证明 积分微分方程式(10)可以写成

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(U(x, y, t) - f(x, y)) &= -\frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{|\nabla u(x, y, t)|} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

注意 $u(\cdot, t) = \frac{d}{dt}(U(\cdot, t) - f)$, 式(11)两边同时乘以

$u(x, y, t)$ 并在空域 Ω 进行积分, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^{-1}(U(\cdot, t) - f) \frac{d}{dt}(U(\cdot, t) - f) d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Delta^{-1}(U(\cdot, t) - f)(U(\cdot, t) - f) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \Delta^{-1}u(\cdot, t)(U(\cdot, t) - f) d\Omega \end{aligned}$$

利用格林公式, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \Delta^{-1}(U(:,t) - f) \frac{d}{dt}(U(:,t) - f) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Delta^{-1}(U(:,t) - f)(U(:,t) - f) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} -\frac{1}{2\lambda(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(:,t)}{|\nabla u(:,t)|} \right) u(:,t) d\Omega \quad (12)
 \end{aligned}$$

然后对式(12)两边关于 t 进行积分, 有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta^{-1}(U(:,t) - f)(U(:,t) - f) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta^{-1}f \cdot f d\Omega \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\Omega} -\frac{1}{2\lambda(s)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(:,t)}{|\nabla u(:,t)|} \right) u(:,t) d\Omega ds
 \end{aligned}$$

再由格林公式, 得到

$$\begin{aligned}
 & (\Delta^{-1}(U(:,t) - f), U(:,t) - f) - (\Delta^{-1}f, f)) \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda(s)} \left(\frac{\nabla u(:,t)}{|\nabla u(:,t)|}, \nabla u(:,t) \right) ds \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda(s)} \|u(:,t)\|_{BV} ds \quad \text{证毕}
 \end{aligned}$$

5 数值算法和实验

在这一节给出积分微分方程式(10)的图像分解效果。为了确保分母不为零, 在式(10)中用

$\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}$ 来代替 $|\nabla u|$, 其中 ε 是一个很小的正数。本文取 $\varepsilon = 0.001$, 这样式(10)可以写成

$$\begin{aligned}
 & \int_{s=t_0}^t u(x, y, s) ds - f(x, y) \\
 &= -\frac{1}{2\lambda(t)} \Delta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 0.001}} \right) \quad (13)
 \end{aligned}$$

在数值计算方面, 用有限差分法和线性方程组的雅克比迭代来求解式(13)。在本文的数值实验中, 选取尺度函数为 $\lambda(t) = 0.25 \times t^2$, 时间步长为 $\Delta t = 0.2$ 。第 1 个实验用 TV^[1], OSV^[4]和本文模型将标准的“Barbara”图像和一幅带噪的指纹图像分解成卡通和纹理部分。在这个实验中, 选取适当的参数 λ 和 t 使得 3 种模型得到的纹理图像的 L^2 范数保持一致。图 1 中列出了 3 种模型对“Barbara”图像的分解结果。可以看出用 TV 模型得到的纹理部分包含明显的卡通成分, 用本文模型和 OSV 模型得到的纹理部分包含很少的卡通成分。图 2 给出了指纹图像的分解结果。对于 TV 模型, 噪声被去除了, 但是有很多纹理仍然在卡通部分中。对于 OSV 和新模型, 卡通部分包含很少的纹理。本文模型的卡通部分包含最少的纹理。

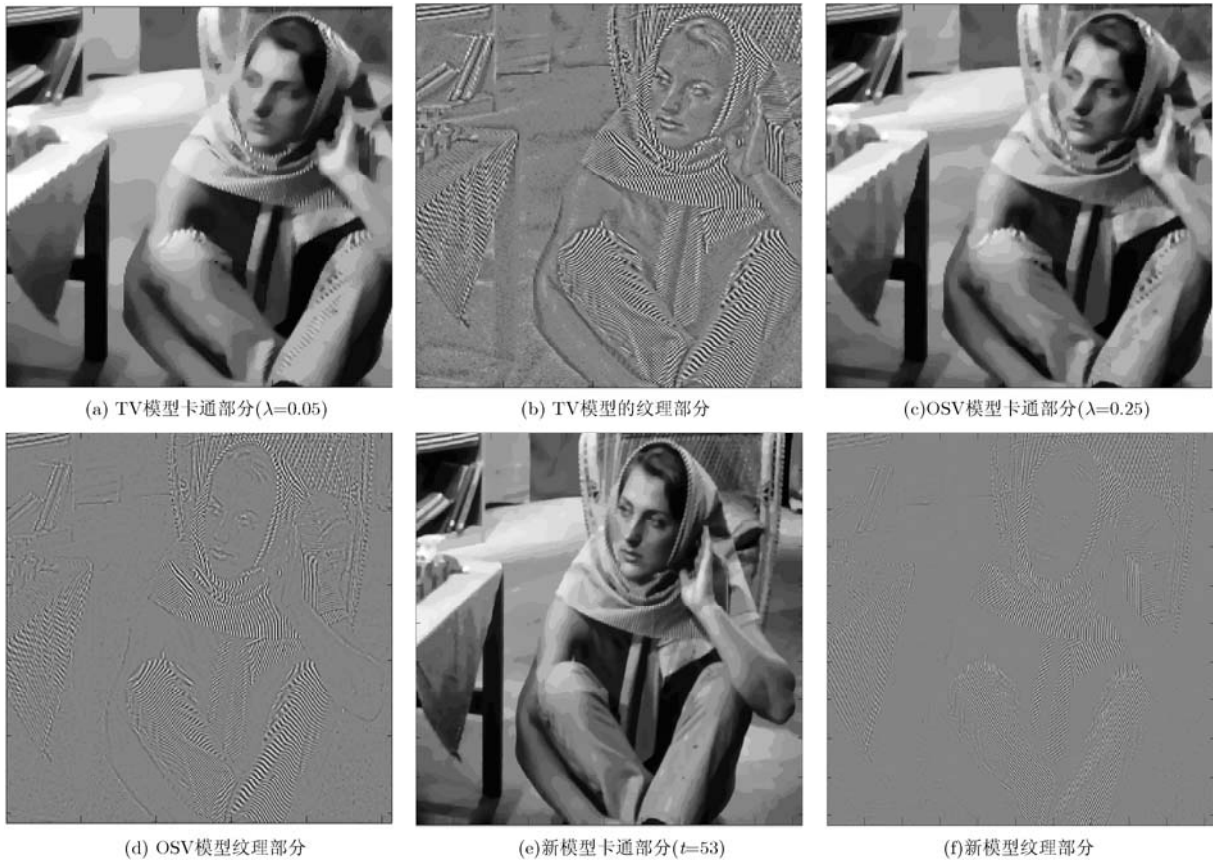


图 1 3 种模型分解结果比较

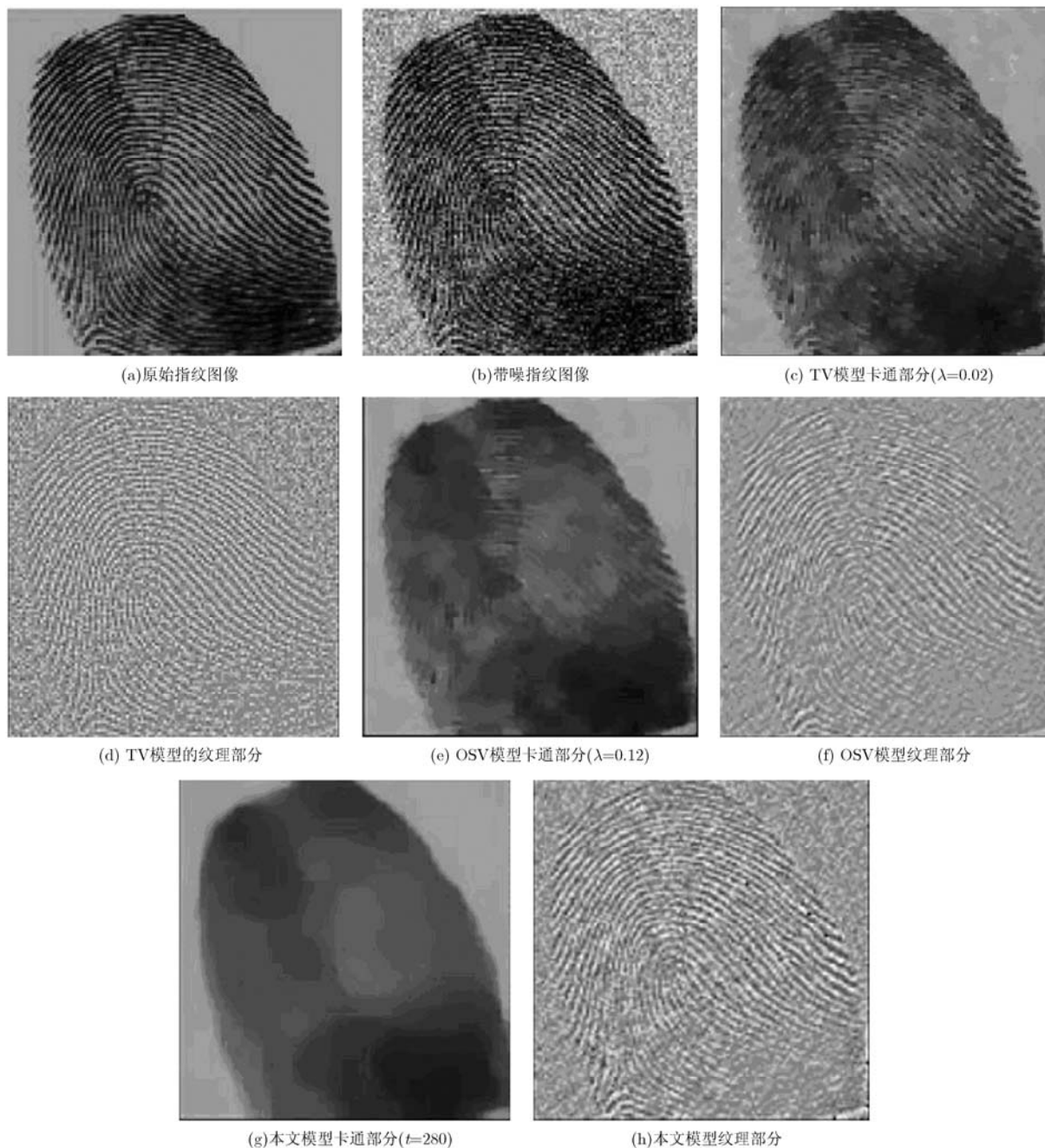


图 2 指纹图像分解结果比较

第 2 个实验是对一幅几何图像进行去噪。在这个实验中，加入方差 $\sigma = 20$ 的高斯白噪声。对于一幅带噪的几何图像，噪声可以看成是纹理部分，所以去噪实验可以反映出 3 种模型图像分解的效果。选取适当的参数 λ 和 t 使得 3 种模型达到最好的信噪比(SNR)。3 种算法的去噪效果在图 3 中给出。可以看出本文模型获得了最好的信噪比和视觉效果。这也证明了新模型在图像分解方面优于经典的 TV 和 OSV 模型。

6 结论

本文从 OSV 模型出发，提出了一种新的 (BV, H^{-1}) 多尺度图像分解模型，构造了一种新的 IDE。随着时间的增加，新的 IDE 将图像的纹理成分逐渐加入到图像的卡通部分中，所以通过选择一个适当的单调增加的尺度函数，该方程可以有效地将图像分解成卡通和纹理部分。实验结果证明新的 IDE 模型优于经典的 TV 与 OSV 模型，这主要是因为新的 IDE 模型是一种逆尺度空间方法，逆尺度空间方法对纹理具有很好的保护作用^[10]。

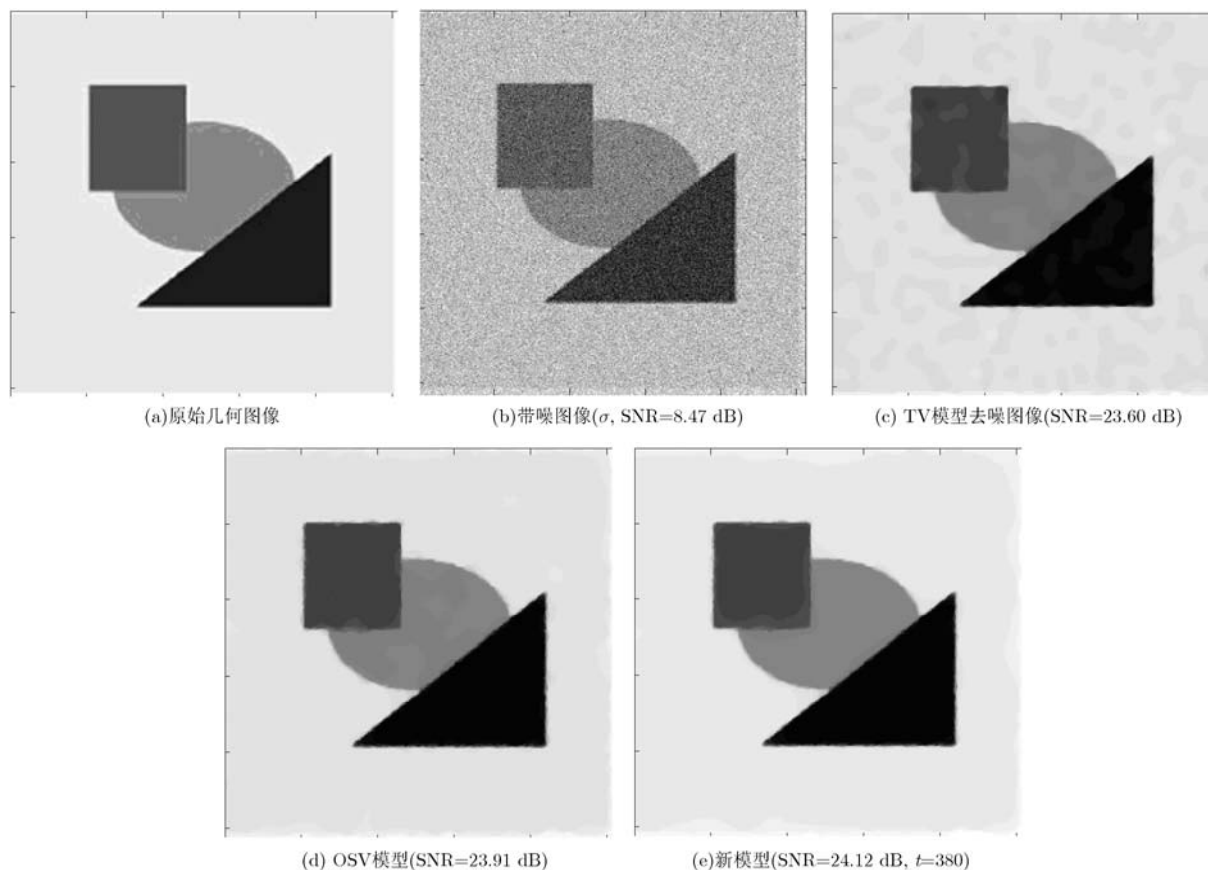


图3 3种模型去噪结果比较

参 考 文 献

- [1] Rudin L I, Osher S, and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [2] Meyer Y. Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations[R]. University Lecture Series, 22, American Mathematics Society, Providence, 2001.
- [3] Vese L A and Osher S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2003, 19(1/3): 553-572.
- [4] Osher S J, Solé A, and Vese L A. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^{-1} norm[J]. *Multiscale Modeling Simulation*, 2003, 1(3): 349-370.
- [5] Aujol J F and Chambolle A. Dual norms and image decomposition models[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2005, 63(1): 85-104.
- [6] Bai J and Feng X C. Image denoising and decomposition using non-convex functional[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2012, 21(1): 102-106.
- [7] Janev M, Pilipovic S, Atanackovic T, et al. Fully fractional anisotropic diffusion for image denoising[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2011, 54(1): 729-741.
- [8] Tadmor E and Athavale P. Multiscale image representation using integral-differential equations[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2009, 3(4): 693-710.
- [9] Athavale P and Tadmor E. Integro-differential equation based on (BV, L^1) image Decomposition[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1): 300-312.
- [10] Marcucilli J A. A review of some inverse scale space methods for image restoration[D]. [Ph. D. dissertation], The Faculty of San Diego State University, 2012.

白 键: 男, 1979 年生, 讲师, 研究方向为偏微分方程图像处理.

冯象初: 男, 1962 年生, 教授, 研究方向为偏微分方程图像处理.

王旭东: 男, 1973 年生, 博士生, 研究方向为偏微分方程图像处理.