

## 基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计方法

孙磊 王华力\* 许广杰 苏勇  
(解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)

**摘要:** 针对采用  $l_1$  范数优化的稀疏表示 DOA 估计算法正则化参数选取困难、计算复杂度高的问题, 该文提出一种基于稀疏贝叶斯学习的高效算法。该算法首先利用均匀线阵的结构特性, 将 DOA 估计联合稀疏模型的构建与求解转换到实数域进行。其次, 通过优化稀疏贝叶斯学习的基消除机制, 使该算法具有更快的收敛速度。仿真结果表明, 与  $l_1$  范数优化类算法相比, 该文方法具有更高的空间分辨率和估计精度且计算复杂度低。

**关键词:** 阵列信号处理; 波达方向; 实数域; 联合稀疏; 稀疏贝叶斯学习

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2013)05-1196-06

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2012.01429

## Efficient Direction-of-arrival Estimation via Sparse Bayesian Learning

Sun Lei Wang Hua-li Xu Guang-jie Su Yong

(College of Communications Engineering, PLA University of Science & Technology, Nanjing 210007, China)

**Abstract:** Sparsity-based Direction-Of-Arrival (DOA) estimation via  $l_1$ -norm optimization requires fine tuning of the regularization parameter and large computational times. To alleviate these problems, this paper presents an efficient approach based on Sparse Bayesian Learning (SBL). The presented approach constructs and solves the jointly sparse DOA estimation model in real domain by making good use of the special geometry of the uniform linear array. Furthermore, the basis pruning mechanism of sparse Bayesian learning is modified to speed up the convergence rate. Simulation results demonstrate that the presented approach provides higher spatial resolution and accuracy with lower computational complexity in comparison with those  $l_1$ -norm-based estimators.

**Key words:** Array signal processing; Direction-Of-Arrival (DOA); Real domain; Jointly sparse; Sparse Bayesian Learning (SBL)

### 1 引言

利用天线阵列估计入射信号波达方向 (Direction-Of-Arrival, DOA), 在雷达、声呐和移动通信等领域有着广泛的应用。传统基于二阶统计特性的子空间类 DOA 估计算法, 如 MUSIC 和 ESPRIT, 具有空间分辨率高、实现简单等优点, 但均以准确获取信号或噪声子空间为前提, 在快拍数较少和信噪比较低的情况下, 估计性能明显恶化。

近年来兴起的稀疏表示技术为 DOA 估计提供了一种崭新的思路, 并已经出现了一些性能优越的算法。稀疏表示类 DOA 估计算法利用来波空域稀疏的先验信息, 将 DOA 估计转化为从多测量矢量 (Multiple Measurement Vectors, MMV) 中重构稀疏信号的问题。Malioutov 等人<sup>[1]</sup>提出的  $l_1$ -SVD 算法基于信号奇异矢量构建  $l_{2,1}$  范数约束下的联合稀疏模

型, 采用二阶锥规划 (Second Order Cone Programming, SOCP) 求解, 并给出了平衡稀疏性与重构精度的正则化参数选择方法。Yin 等人<sup>[2]</sup>通过协方差矩阵矢量联合稀疏表示估计信号 DOA, 并基于渐进统计特性提出了噪声抑制方法, 然而该算法计算量较大。Xu 等人<sup>[3]</sup>利用均匀线阵协方差矩阵的 Toeplitz 特性, 将 DOA 估计简化为单测量矢量 (Single Measurement Vector, SMV) 重构问题。同样针对均匀线阵, Blanco 等人<sup>[4]</sup>提出通过非负  $l_1$  范数优化快速重构协方差矩阵估计 DOA。需要指出的是文献[3,4]中的算法不能用于存在相干源的场景。本质上, 稀疏度应通过  $l_0$  范数表征, 采用  $l_1$  范数凸松弛近似必然存在性能上的损失。为提高对  $l_0$  范数近似的精确度, Zheng 等人<sup>[5,6]</sup>提出采用噪声子空间加权的  $l_1$  范数约束重构稀疏性。Xu 等人<sup>[7]</sup>针对非相干信号, 进一步提出了采用 Capon 空间谱作为  $l_1$  范数加权矢量, 并基于对偶性给出了最优正则化参数的选择方法。Hyder 等人<sup>[8]</sup>提出的 JLZA-DOA 算法采用平滑的  $l_0$  范数约束来波稀疏性, 但需经验设置的参数较

2012-11-08 收到, 2013-02-01 改回

国家自然科学基金(61271354)和国家留学基金资助课题

\*通信作者: 王华力 huali\_wang@yahoo.com.cn

多，算法的收敛性无法保证。

总体上说，当前基于稀疏表示的 DOA 算法中以  $l_1$  范数优化类最为流行，在低信噪比和低快拍数条件下比传统算法具有更高的估计精度和鲁棒性。然而在取得优异性能的同时， $l_1$  范数优化类 DOA 估计算法还存在着 3 个主要问题需要进一步研究：(1) 提高  $l_1$  范数对  $l_0$  范数的近似度；(2) 低信噪比下最优正则化参数的选取；(3) 如何有效降低计算复杂度。针对上述问题，本文基于稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian Learning, SBL) 算法<sup>[9,10]</sup>，提出了一种适于均匀线阵的高效 DOA 估计方法 (Real-SVD-MSBL)。该方法利用均匀线阵的中心对称性，对酉变换后的实数据进行稀疏建模，采用针对多测量矢量的稀疏贝叶斯学习 (Multi-vectors SBL, MSBL) 算法重构信号空间谱，最终完成信号 DOA 估计。除此之外，文中通过合理设置迭代初值和改进基消除方法加快了 MSBL 的收敛速度。仿真结果表明，本文方法在估计精度和计算速度方面均优于  $l_1$  范数优化类 DOA 估计算法。

全文中，采用  $\mathbf{A}(m,:)$  和  $\mathbf{A}(:,n)$  分别表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $m$  行和第  $n$  列， $\mathbf{I}$  表示单位矩阵。运算符  $(\cdot)^*$ ,  $(\cdot)^T$ ,  $(\cdot)^H$ ,  $\text{Re}(\cdot)$ ,  $\text{Im}(\cdot)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\|\cdot\|_2$  和  $\|\cdot\|_F$  分别表示共轭、转置、共轭转置、取实部、取虚部、内积、欧几里得范数和矩阵 Frobenius 范数。

## 2 数学模型

### 2.1 背景知识

假设有  $M$  个远场非相关窄带信号以角度  $[\theta_1, \dots, \theta_M]$  入射到  $L$  ( $M < L$ ) 元均匀线阵上，阵元间距  $d = \lambda/2$  ( $\lambda$  为入射信号波长)，则  $t$  时刻阵列接收的基带信号  $\mathbf{y}(t)$  可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{e}(t) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{e}(t), \quad t = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_m) = [1, e^{-j\pi \sin \theta_m}, \dots, e^{-j\pi(L-1) \sin \theta_m}]^T$  对应从  $\theta_m$  方向入射信号的导向矢量， $s_m(t)$  为第  $m$  个信号的复包络， $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T$ ， $\mathbf{e}(t)$  表示方差为  $\sigma_n^2$  的阵列观测噪声， $N$  表示快拍数。假设信号与噪声均为零均值的平稳复高斯随机过程，不同阵元上的噪声互不相关，且噪声与信号也互不相关。

采用矩阵  $\mathbf{Y}$ ， $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{E}$  分别表示矩阵形式的观测数据、信号和噪声，则增广数据矩阵  $\mathbf{Y}_{\text{aug}} = [\mathbf{Y}, \mathbf{\Pi}_L \mathbf{Y}^* \mathbf{\Pi}_N]$  具有中心 Hermite 特性，其中  $\mathbf{\Pi}_L$  表示反对角线元素为 1、其余元素均为 0 的  $L \times L$  维置换矩

阵。根据文献[11]， $\mathbf{Y}_{\text{aug}}$  可通过变换转换为实矩阵  $\mathbf{Y}_r$ ：

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q}_L^H \mathbf{Y}_{\text{aug}} \mathbf{Q}_{2N} \quad (2)$$

式中变换矩阵  $\mathbf{Q}$  为酉矩阵，对于奇偶不同的维数情况，分别定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & j\mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{\Pi}_n & \mathbf{0} & -j\mathbf{\Pi}_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & j\mathbf{I}_n \\ \mathbf{\Pi}_n & -j\mathbf{\Pi}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

对于本文研究的均匀线阵，其流型矩阵  $\mathbf{A}$  满足：

$$\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{\Pi}_L (\mathbf{A}\mathbf{L})^* \quad (4)$$

式中  $\mathbf{A}$  为  $M \times M$  维对角矩阵，其第  $m$  个对角元素为  $e^{j((L-1)/2)\pi \sin \theta_m}$ ，易知  $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I}_M$ ，即  $\mathbf{A}$  为酉矩阵。

### 2.2 联合稀疏模型

不失一般性，假设阵元数  $L$  为偶数，将式(2)展开并将式(4)代入可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_r &= \mathbf{Q}_L^H [\mathbf{A}\mathbf{S}, \mathbf{\Pi}_L \mathbf{A}^* \mathbf{S}^* \mathbf{\Pi}_N] \mathbf{Q}_{2N} \\ &\quad + \mathbf{Q}_L^H [\mathbf{E}, \mathbf{\Pi}_L \mathbf{E}^* \mathbf{\Pi}_N] \mathbf{Q}_{2N} \\ &= \sqrt{2} \mathbf{A}_r [\text{Re}(\mathbf{A}^* \mathbf{S}), -\text{Im}(\mathbf{A}^* \mathbf{S})] + \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{A}_r \mathbf{S}_r + \mathbf{E}_r \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{A}_r = \mathbf{Q}_L^H \mathbf{A} \mathbf{A} = [\mathbf{a}_r(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_r(\theta_M)]$ ，变换后的导向矢量  $\mathbf{a}_r(\theta)$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r(\theta) &= \sqrt{2} [\cos(\pi((L-1)/2) \sin \theta), \dots, \\ &\quad \cos(\pi \sin \theta / 2), \sin(\pi((L-1)/2) \sin \theta), \dots, \\ &\quad \sin(\pi \sin \theta / 2)]^T \end{aligned} \quad (6)$$

噪声项  $\mathbf{E}_r$  具有式(7)结构：

$$\mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{E}_1 + \mathbf{\Pi}_l \mathbf{E}_2^*\} & -\text{Im}\{\mathbf{E}_1 - \mathbf{\Pi}_l \mathbf{E}_2^*\} \\ -\text{Im}\{\mathbf{E}_1 + \mathbf{\Pi}_l \mathbf{E}_2^*\} & \text{Re}\{\mathbf{E}_1 - \mathbf{\Pi}_l \mathbf{E}_2^*\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中  $l = L/2$ ， $\mathbf{E} = [\mathbf{E}_1^T, \mathbf{E}_2^T]^T$ 。

类似文献[1]，可将式(5)重写为式(8)的稀疏表示形式：

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{S}}_r + \mathbf{E}_r \quad (8)$$

其中  $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_K]$  为覆盖信号所有可能入射方向的空域离散角度集，一般有  $K \gg L > M$ ， $\mathbf{A}_r(\tilde{\theta})$  为由如式(6)的导向矢量组成的对应  $\tilde{\theta}$  的实阵列流型矩阵。假设在整个观测期间信号入射角度固定，则当且仅当第  $m$  个信号的入射角度  $\theta_m = \tilde{\theta}_k$  时， $\tilde{\mathbf{S}}_r$  的第  $k$  行元素非零且等于该方向信号酉变换后的值，由  $K \gg M$  可知  $\tilde{\mathbf{S}}_r$  具有行稀疏性。反过来，一旦确定了  $\tilde{\mathbf{S}}_r$  非零行的位置，即可由该位置对应  $\tilde{\theta}$  中的角

度估计出入射信号 DOA,正是这种对应关系构成了稀疏表示类算法的基础。

在进一步处理式(8)之前,我们先来分析实数域稀疏建模可能对稀疏表示算法性能的影响。已有研究表明,对列归一化的稀疏字典,算法重构性能直接取决于稀疏字典的相干度<sup>[12, 13]</sup>,定义为

$$\mu(\Psi) = \arg \max_{1 \leq i, j \leq K} \left| \langle \psi_i, \psi_j \rangle \right| \quad (9)$$

式中  $\psi_i$  表示稀疏字典  $\Psi$  的第  $i$  列。对本文中采用的实稀疏字典  $\mathbf{A}_r(\tilde{\theta})$ , 其各列具有相同的模值, 计算其任意两列的互相关值得到:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{a}_r^H(\theta_i) \mathbf{a}_r(\theta_j) \right| \\ &= \left| e^{-j((N-1)/2)\pi(\sin\theta_i - \sin\theta_j)} \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{Q}_L \mathbf{Q}_L^H \mathbf{a}(\theta_j) \right| \\ &= \left| \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_j) \right| \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)易知实稀疏字典  $\mathbf{A}_r(\tilde{\theta})$  任意两列的相关值与复稀疏字典  $\mathbf{A}(\tilde{\theta})$  相同, 进而验证了二者具有相同的相干度。由于信号和噪声均设为平稳复高斯随机过程, 其统计特性在酉变换后保持不变。基于上述分析, 可知在实数域稀疏建模与复数域具有相同的效能, 保证了采用实稀疏重构算法进行 DOA 估计的有效性。

### 3 DOA 估计

#### 3.1 稀疏贝叶斯学习重构

为降低数据规模, 采用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)对数据矩阵  $\mathbf{Y}_r$  进行降维, 设  $\mathbf{Y}_r = 1/\sqrt{2N} \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{V}^T$  (注意此时快拍数由  $N$  增加到  $2N$ ), 式(8)的稀疏表示问题可简化为

$$\mathbf{Y}_{rsv} = \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{S}}_{rsv} + \mathbf{E}_{rsv} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{Y}_{rsv} = \mathbf{Y}_r \mathbf{V} \mathbf{D}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv} = \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{V} \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}_{rsv} = \mathbf{E}_r \mathbf{V} \mathbf{D}$ , 其中  $\mathbf{D} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{0}]$ 。需要指出的是 SVD 除具有降低数据规模的作用外, 还能积聚信号能量并分离噪声, 从而提高算法在低信噪比条件下的鲁棒性。式(11)中噪声项  $\mathbf{E}_{rsv}$  每列均服从零均值、协方差矩阵为  $\sigma_n^2 \mathbf{I}_L / 2N$  的高斯分布, 且列与列之间互不相关, 则  $\mathbf{Y}_{rsv}$  的高斯似然函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_{rsv} | \tilde{\mathbf{S}}_{rsv}) &= (2\pi\sigma_e^2)^{-LM/2} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left\| \mathbf{Y}_{rsv} - \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \mathbf{Y}_{rsv} \right\|_F^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\sigma_e^2 = \sigma_n^2 / 2N$ 。与  $l_1$ -SVD 算法采用混合  $l_{2,1}$  范数约束矩阵  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}$  的行稀疏性不同, MSBL 算法赋予  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}$  每行  $M$  维联合高斯先验分布:

$$p(\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}(k,:); \gamma_k) = (2\pi\gamma_k)^{-M/2} \exp \left[ -\frac{\left\| \tilde{\mathbf{S}}_{rsv}(k,:) \right\|_2^2}{2\gamma_k} \right] \quad (13)$$

式中  $\gamma_k$  为控制  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}(k,:)$  分布的未知先验方差, 当该

行元素全部为 0 时,  $\gamma_k$  值为 0, 反之  $\gamma_k$  值为一固定值。由  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}$  行与行之间互不相关, 可得

$$p(\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}; \boldsymbol{\gamma}) = \prod_{k=1}^K p(\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}; \gamma_k) \quad (14)$$

式中  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K]^T$ , 由上述分析易知  $\boldsymbol{\gamma}$  具有稀疏性。由式(12), 式(13)可导出  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}$  服从均值为  $\mathbf{U}$ , 方差为  $\boldsymbol{\Sigma}$  的后验高斯分布为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_r^T(\tilde{\theta}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{Y}_{rsv} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_r^T(\tilde{\theta}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \mathbf{\Gamma} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_y = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_r^T(\tilde{\theta})$ 。显然一旦确定了  $\boldsymbol{\gamma}$  中非零元素的位置, 即可立即估计出入射信号的 DOA,  $\tilde{\mathbf{S}}_{rsv}$  可视为冗余参数。稀疏矢量  $\boldsymbol{\gamma}$  和真实噪声方差  $\sigma_e^2$  可通过最小化代价函数式(16)得到

$$L|\boldsymbol{\gamma}, \sigma_e^2| \triangleq M \log |\boldsymbol{\Sigma}_y| + \sum_{m=1}^M \mathbf{Y}_{rsv}^T(:, m) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{Y}_{rsv}(:, m) \quad (16)$$

采用快速 EM 算法求解式(16), 其第  $i$  步的迭代公式为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k^{i+1} &= \frac{(1/M) \left\| \mathbf{U}(k,:) \right\|_2^2}{1 - (\gamma_k^i)^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}_{kk})_{(i)}}, \quad \forall k = 1, \dots, K \\ (\sigma_e^2)^{i+1} &= \frac{(1/M) \left\| \mathbf{Y}_{rsv} - \mathbf{A}_r(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{S}}_{rsv} \right\|_F^2}{L - K + \sum_{k=1}^K (\gamma_k^i)^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}_{kk})_{(i)}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中  $\boldsymbol{\Sigma}_{kk}$  表示  $\boldsymbol{\Sigma}$  的第  $k$  个对角元素。

#### 3.2 参数控制与设置

实际计算中, 为降低计算量并加快收敛速度, MSBL 算法在每次迭代求解过程中将  $\boldsymbol{\gamma}$  的每个元素与一个预设门限(如  $10^{-12}$ )进行比较, 仅保留  $\boldsymbol{\gamma}$  中门限之上的元素及其对应稀疏字典中的基向量进入下一次迭代。然而由于噪声的存在, 需要多次迭代才能使  $\boldsymbol{\gamma}$  中某一元素低于门限并被消除。为了加快基消除的速度, 我们对 MSBL 算法的门限判决机制进行改进, 具体在每一次迭代过程中, 采用相对门限算子式(18)代替固定门限对  $\boldsymbol{\gamma}$  中元素进行判决:

$$H(\gamma_k) = \begin{cases} 0, & 10 \lg(\gamma_k / \max(\boldsymbol{\gamma})) < \text{门限} \\ \gamma_k, & \text{其它} \end{cases} \quad (18)$$

式中  $\gamma_k = 0$  表示将元素  $\gamma_k$  及其在  $\mathbf{A}_r(\tilde{\theta})$  对应的基消除。与固定门限法不同, 相对门限法的判决门限取决于  $\boldsymbol{\gamma}$  中最大值, 在  $\boldsymbol{\gamma}$  收敛前每次迭代中不断更新。相对门限利用了  $\mathbf{Y}_{rsv}$  与  $\mathbf{A}_r(\tilde{\theta})$  中基向量的相关性,  $\boldsymbol{\gamma}$  中 0 元素对应基矢量与  $\mathbf{Y}_{rsv}$  的相关程度低于入射信号对应的基矢量, 且这种差别在迭代中不断被放大, 在超过一定门限后即可消除。经过仿真发现, 门限设置为 -30 dB 可较好地平衡消除速度和算法精度。

噪声方差  $\sigma_e^2$  起着与  $l_1$  范数优化算法中正则化参

数相同的折中重构精度与稀疏度的作用，不同的是其存在解析形式，可通过迭代不断更新，而无需预先设置。然而，准确地设置  $\sigma_e^2$  的初值可使 MSBL 更快地收敛到全局最优解。 $\sigma_e^2$  的初值可通过平均  $\mathbf{Y}_r$  的较小奇异值得到

$$\hat{\sigma}_e^2 = \sigma_n^2 / 2N = \frac{1}{2N(L - \hat{M})} \sum_{m=\hat{M}+1}^L \hat{\lambda}_m^2 \quad (19)$$

式中  $\hat{M}$  为采用 MDL 准则得到的信源数目估计值， $\hat{\lambda}_m$  为  $\mathbf{Y}_r$  的第  $m$  个奇异值。

归纳本文算法的实施步骤如下：

(1)通过式(2)将接收复数据变换到实数域；

(2)进行奇异值分解，确定信号子空间维数，并估计噪声功率；

(3)采用改进的 MSBL 算法求解稀疏重构问题式(11)并估计信号 DOA。

#### 4 算法复杂度分析

考虑  $l_1$ -SVD 即其改进算法，奇异值分解的计算复杂度为  $O(L^3)$ ，采用内点法重构每次迭代的计算复杂度为  $O(M^3 K^3)$ ，最大迭代次数为  $O(\sqrt{MK})$ <sup>[1]</sup>。但由于内点法是针对实数据的，而  $l_1$ -SVD 算法中处理的是复数据，因此在计算中数据维数加倍。考虑到  $K \gg L$  (如  $K = 180$ ,  $L = 10$ )，算法的计算复杂度主要在于稀疏重构部分。

本文所提算法由数据酉变换、奇异值分解和 MSBL 重构 3 部分组成。酉变换只涉及到加减运算，其计算复杂度可忽略不计。本文算法奇异值分解在实数域进行，虽然经过酉变换后数据长度加倍，但考虑到实际中 1 个复数乘法需要通过 4 个实数乘法完成，计算量仍低于在复数域运算。与  $l_1$ -SVD 算法相同，本文算法的计算复杂度由实数域 MSBL 算法决定。MSBL 算法单次迭代的计算复杂度为  $O(L^2 K)$ <sup>[10]</sup>，目前尚无理论上对 MSBL 收敛时所需迭代次数的分析，实际仿真中我们发现在引入相对门限判断算子和精确设定噪声初值的条件下，MSBL 一般在 40 次迭代后收敛。

上述分析表明本文算法在计算复杂度上远低于

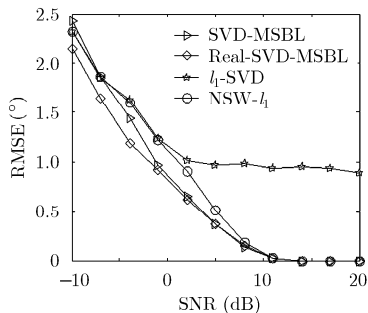


图1 不同信噪比下 DOA 估计 RMSE

基于  $l_1$  范数优化的  $l_1$ -SVD 及其改进算法。同样基于复数与实数运算的关系，相比在直接采用复 MSBL 算法估计信号 DOA，本文算法在计算量方面显然更具优势。与传统的子空间类算法相比，本文算法的计算复杂度仍然较大，但考虑到其在低快拍和低信噪比情况下的优异性能，这种计算复杂度也是可以接受的。实际中，可采用文献[1]中先“粗扫描”再“细扫描”的方法缩减冗余字典规模，进一步降低计算量。

#### 5 仿真分析

本节通过计算机仿真对本文所提 Real-SVD-MSBL 算法性能进行分析，并与  $l_1$ -SVD 算法<sup>[1]</sup>、NSW- $l_1$  算法<sup>[9]</sup>及复数域 SVD 与固定门限 MSBL 相结合的算法(表示为 SVD-MSBL)进行比较。仿真中假设噪声为加性复高斯白噪声，窄带信源服从复高斯分布，接收阵列为理想的 10 元均匀线阵，阵元间距为来波中心波长的一半，空域以  $1^\circ$  为步长离散成 180 个角度，仿真中所有角度均为与阵列法线方向夹角，信源个数通过 MDL 准则估计。 $l_1$ -SVD 与 NSW- $l_1$  算法的置信区间均设置为 0.99，复数域 SVD-MSBL 算法基消除门限设置为  $10^{-5}$ 。信噪比 (SNR) 定义为  $10 \lg(\sigma_s^2 / \sigma_n^2)$ ，其中  $\sigma_s^2$  和  $\sigma_n^2$  分别表示信号功率和噪声功率。DOA 估计均方根误差 (RMSE) 定义为

$$\text{RMSE} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\hat{\theta}_{mj} - \theta_m)^2} \quad (20)$$

式中  $J$  为独立蒙特卡洛实验的次数，仿真中均为 1000 次， $M$  为信号源总个数， $\theta_m$  为第  $m$  个信号源 DOA 真实值， $\hat{\theta}_{mj}$  为第  $j$  次蒙特卡洛实验得到的相应估计值。

(1)非相干信源场景 DOA 估计算法性能 假设 4 个等功率不相关信号自远场入射至接收阵列，入射角分别为  $-20^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $10^\circ$  和  $30^\circ$ 。图 1 为快拍数固定为 100 时，4 种算法 DOA 估计 RMSE 随 SNR 变化的曲线。图 2 为 SNR 为 0 dB 时，4 种算法 DOA 估计 RMSE 随快拍数变化的曲线。

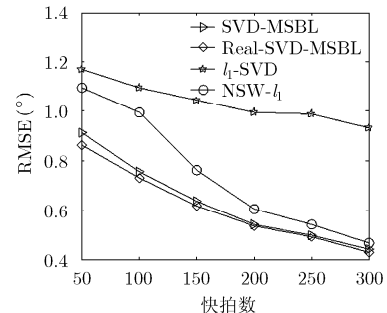


图2 不同快拍数时 DOA 估计 RMSE

图 1 和图 2 中可以看出, 当存在空间间隔较近的信号时,  $l_1$ -SVD 算法存在固定估计误差。由于加权  $l_1$  范数对  $l_0$  范数的近似性更好, NSW- $l_1$  算法性能优于  $l_1$ -SVD。本文算法在低信噪比和低快拍情况下性能最为优越。以 MATLAB7.12 环境下各算法的平均运行时间为指标对其计算复杂度进行比较, 仿真运行时间通过 MATAB 中 TIC 和 TOC 指令计算。图 3 为 SNR 为 0 dB 时, 4 种算法运行时间随快拍数变化的情况。从图中可以看出  $l_1$ -SVD 和 NSW- $l_1$  算法的运行时间相对固定且用时最长, 本文算法运行时间最短, 在快拍数为 100 时仅为  $l_1$ -SVD 运行时间的 1/8, 且随快拍数的增加计算时间进一步变短。

(2)存在相干源时算法性能 假设 4 个等功率信号自远场入射至接收阵列, 入射角分别为  $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $10^\circ$  和  $30^\circ$ , 其中第 1 个信号与第 4 个信号相干, 但与另外两个非相关信号均不相关。图 4 为快拍数固定为 100 时, 4 种算法 DOA 估计 RMSE 随 SNR 变化的曲线。从图 4 中可以看出  $l_1$ -SVD 算法在角度空间间隔较大时估计精度较高, 相干信号的存在使 NSW- $l_1$  算法在信噪比大于  $-5$  dB 时性能略低于  $l_1$ -SVD 算法。本文算法由于酉变换中的前后向平滑

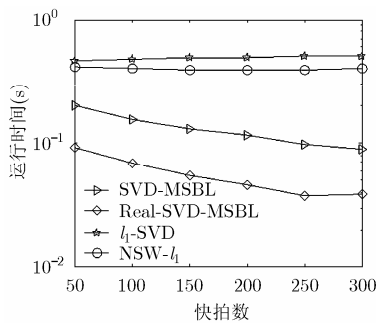


图 3 不同快拍数时算法运行时间

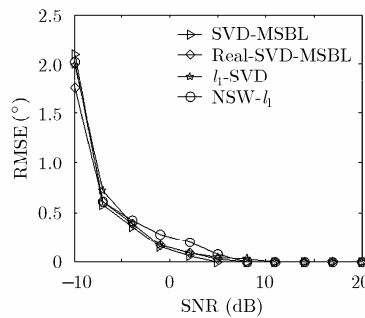


图 4 存在相干源时 DOA 估计 RMSE

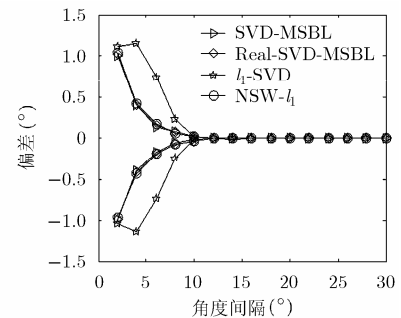


图 5 不同角度间隔下 DOA 估计偏差

的解相干作用, 在相干源存在时仍然保持较好性能。

(3)不同角度间隔下算法估计偏差 假设 2 个信噪比均为 0 dB 的不相关信号自远场入射至接收阵列, 其中一个信号入射角为  $0^\circ$ , 另一个信号入射角为  $0^\circ + \Delta\theta$ , 快拍数固定为 100。图 5 为 4 种算法 DOA 估计偏差随入射信号角度间隔  $\Delta\theta$  变化的曲线。从图中可以得出, 本文算法在角度间隔较小时与 NSW- $l_1$  和 SVD-MSBL 算法性能相当, 在空间角度间隔大于  $10^\circ$  时为无偏估计, 均优于  $l_1$ -SVD 算法。

## 6 结论

本文利用均匀线阵的结构特性, 提出了一种实数域基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计算法。分析表明, 在实数域构建 DOA 估计联合稀疏模型与复数域建模具有相同的基相干度, 保证了所提算法的有效性。采用稀疏贝叶斯学习算法避免了正则化参数选择的问题, 通过优化基消除机制并正确设置初值, 进一步加快了算法的收敛速度。计算机仿真结果表明本文算法在低快拍和低信噪比的情况下, 具有比  $l_1$  范数优化类算法更高的空域分辨率和估计精度, 且计算量显著降低。

## 参考文献

- [1] Malioutov D, Çetin M, and Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-3022.
- [2] Yin Ji-hao and Chen Tian-qi. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4489-4493.
- [3] Xu Dong-yang, Hu Nan, Ye Zhong-fu, et al. The estimate for DOAs of signals using sparse recovery method[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing, Kyoto, 2012: 2573-2576.
- [4] Blancol L and Najjar M. Sparse covariance fitting for direction of arrival estimation[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012, DOI: 10.1186/1687-6180-2012-111.
- [5] Zheng Chun-di, Li Gang, Zhang Hao, et al. An approach of DOA estimation using noise subspace weighted  $l_1$  minimization[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing, Prague, 2011: 2856-2859.
- [6] Zheng Chun-di, Li Gang, Liu Yi-min, et al. Subspace weighted  $l_{2,1}$  minimization for sparse signal recovery[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012, DOI: 10.1186/1687-6180-2012-98.
- [7] Xu Xu, Wei Xiao-han, and Ye Zhong-fu. DOA estimation based on sparse signal recovery utilizing weighted  $l_1$ -norm

- penalty[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(3): 155–158.
- [8] Hyder M M and Mahata K. Direction-of-arrival estimation using a mixed  $l_{2,0}$  norm approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9): 4646–4655.
- [9] Wipf D P and Rao B D. Sparse Bayesian learning for basis selection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(8): 4036–4048.
- [10] Wipf D P and Rao B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716.
- [11] Haardt M and Nosske J A. Unitary ESPRIT: how to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(5): 1232–1242.
- [12] Duarte M F and Baraniuk R G. Spectral compressive sensing [J]. *Applied and Computational Harmonics Analysis*, 2012, <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2012.08.003>.
- [13] Rauhut H, Schnass K, and Vandergheynst P. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(5): 2210–2219.
- 孙 磊： 男，1986 年生，博士生，研究方向为阵列信号处理与压缩感知。
- 王华力： 男，1967 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为信息感知与处理。
- 许广杰： 男，1987 年生，博士生，研究方向为压缩感知、信号检测与估计。