

一种基于粒子群优化的稀疏恢复算法

刘鲁锋* 杜新鹏 成礼智
(国防科学技术大学理学院 长沙 410073)

摘要: 稀疏恢复问题是国际数学与信息处理领域的一个研究热点, 主要通过凸松弛法和贪婪追踪法两大类方法求解。但前者在恢复效率方面, 后者在恢复能力方面都存在缺陷, 而且两者都不能对高斯信号在较大的稀疏度下或在较小的观测度下获取有效的恢复。该文基于粒子群优化并结合了贪婪追踪法的思想, 提出了一种新的稀疏恢复算法。数值实验表明, 与其它方法相比, 该文提出的算法不仅能获得更有效的恢复, 而且在一般的稀疏度和观测度条件下运行速度较快。

关键词: 信息处理; 稀疏恢复; 粒子群优化; 贪婪追踪法

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)11-2733-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01397

A Sparse Recovery Algorithm Based on Particle Swarm Optimization

Liu Lu-feng Du Xin-peng Cheng Li-zhi

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Sparse recovery is a hot topic around the areas of international mathematics and information processing at present, and it is mainly solved by two major strategies including convex relaxation methods and greedy pursuit methods. However, considering the former on efficiency and the latter on ability, they own shortcomings respectively, and neither can recover Gaussian signals with large sparsity level or small measurement level effectively. In this paper, a new sparse recovery algorithm propose is proposed and based on particle swarm optimization combining with the thought of greedy pursuit methods. It is demonstrated by a series of numerical simulations that when compared to other methods, the proposed algorithm could not only achieve better recovery performance, but also runs relatively fast when recovering Gaussian signals with normal sparsity level or normal measurement level.

Key words: Information processing; Sparse recovery; Particle Swarm Optimization (PSO); Greedy pursuit methods

1 引言

近年来, 稀疏恢复问题^[1-5]经过国际数学和信息处理领域大量学者的不懈努力, 形成了相对完备的理论和算法体系, 并在处理许多实际问题中得到了成功的应用^[6,7]。

稀疏恢复问题是一个非凸的组合优化问题, 是 NP 难的, 没有确定性的方法能在短时间内完全解决^[1,7]。目前有两大类算法对其进行近似求解, 即贪婪追踪法和凸松弛法^[8]。前者简单快速, 但恢复能力不强; 后者具有良好的稳定性和理论保证, 但恢复效率不高; 并且它们都不能对高斯信号在较大的稀疏度下或在较小的观测度下获取有效的恢复。

为了针对高斯信号在较大的稀疏度下或在较小

的观测度下获取有效的恢复, 本文基于粒子群优化算法, 结合了贪婪追踪法的思想, 提出一种求解稀疏恢复问题的新算法。

2 粒子群优化算法

粒子群优化 (PSO) 算法由 Kennedy 和 Eberhart^[9]于 1995 年首次提出, 是一种模拟简单社会行为的群体搜索算法。该算法具有认知记忆, 群体内个体协作和群体间相互联系的优越性, 已经成功运用于组合优化^[10]、计算机科学与工程^[11]等问题的处理。

考虑极小化问题 $\min_{x \in \Omega} f(x)$, 其中 f 是适应度函数, 集合 Ω 是解空间。在粒子群算法中, 候选解之间合作共生; 每个解被称作一个“粒子”, 在 Ω 中寻找最优位置。一个粒子在寻找的过程中, 通过自身“经验”以及周围粒子的“经验”更新自己的位置。这里的“经验”表示记忆和追踪遇到的最好位置。

2012-10-30 收到, 2013-05-24 改回

国家自然科学基金(61271014)资助课题

*通信作者: 刘鲁锋 kewell7@foxmail.com

个体位置通过式(1)和式(2)进行更新:

$$\mathbf{v}_i(t+1) = w\mathbf{v}_i(t) + c_1r_1(t)(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i(t)) + c_2r_2(t)(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1) \quad (2)$$

其中 t 为群体代数, \mathbf{v}_i 称为粒子 i 的速度, 代表该粒子从当前位置运动的位移; \mathbf{x}_i 代表该粒子的位置, \mathbf{y}_i 代表它过去的最好位置, $\bar{\mathbf{y}}$ 代表群体中所有粒子过去的最佳位置。 c_1 与 c_2 为正常数, 称作加速系数, r_1 与 r_2 为服从均匀分布的随机数, 它们用于控制“经验”对当前粒子的影响程度。惯性权重 w 是一个用户指定的参数, 较大会导致全局探索(新区域), 而较小则促进开采当前搜索区域。群体的更新在终止条件满足之前一直重复进行, 基本的粒子群算法可以总结为表 1。

表 1 基本粒子群优化算法

算法 1 基本粒子群优化算法

步骤 1 (初始化) 设定群体规模 P , 令 $t = 0$ 。对群体中每个粒子 i ($i = 1, 2, \dots, P$) 执行步骤 1 中的(1)–(3)的操作:

(1) 随机初始化 $\mathbf{v}_i(t)$ 与 $\mathbf{x}_i(t)$, 并计算 $f(\mathbf{x}_i(t))$;

(2) 初始化 $\bar{\mathbf{y}}$ 为初始群体中具有最优适应度的粒子;

(3) 初始化 \mathbf{y}_i 为初始群体 $\{\mathbf{x}_i(t) \mid i = 1, 2, \dots, P\}$ 。

步骤 2 在终止条件满足前令 $t = t + 1$, 并对每个粒子 i ($i = 1, 2, \dots, P$) 重复步骤 2 中的(1)–(3)的操作:

(1) 按式(1)、式(2)更新 $\mathbf{v}_i(t)$ 与 $\mathbf{x}_i(t)$, 并计算 $f(\mathbf{x}_i(t))$;

(2) 当 $f(\mathbf{x}_i(t)) < f(\mathbf{y}_i)$ 时更新 $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i(t)$;

(3) 当 $f(\mathbf{y}_i) < f(\bar{\mathbf{y}})$ 时更新 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_i$ 。

3 基于粒子群优化的稀疏恢复算法

本节中, 基于基本粒子群优化(算法 1), 结合贪婪追踪法^[12–15]的思想, 提出一种稀疏恢复算法。下面从粒子位置和适应度、初始化、粒子位置更新机制 3 个方面进行。

3.1 粒子位置和适应度

稀疏恢复问题可以描述为

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \quad \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 是一个稀疏向量, 即 \mathbf{x} 中大量元素为零; $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ ($m < n$) 为度量矩阵, $\mathbf{b} \in R^m$ 为观测向量(称 m 为观测度); $\|\cdot\|_0$ 代表 0-拟范数, 即向量中非零元素的个数。若 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K \leq m$, 称 \mathbf{x} 是 K -稀疏的, 且称 K 是 \mathbf{x} 的稀疏度。向量 \mathbf{x} 中非零元素对应的指标集称为 \mathbf{x} 的支撑。此时, 问题式(3)的解存在唯一的充分必要条件为 $K < \text{spark}(\mathbf{A})/2$ (恢复性能的理论极限)^[16], 其中 $\text{spark}(\mathbf{A})$ 代表 \mathbf{A} 的列向量达到线性

相关的最小列数, 满足 $\text{spark}(\mathbf{A}) \leq m + 1$ 。

如果已知 \mathbf{x} 是 K -稀疏的, 问题式(3)可以转化为其等价形式^[8]:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_0 \leq K \quad (4)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 代表向量的 2-范数。为求解问题式(4), 贪婪追踪法在每次迭代中先通过某种有效的方法找到待恢复信号 \mathbf{x} 的支撑估计 \bar{a} , 且使 $|\bar{a}| = K$; 然后利用最小二乘法估计信号:

$$\mathbf{x}_{\bar{a}} = \mathbf{A}_{\bar{a}}^+ \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{S-\bar{a}} = 0 \quad (5)$$

其中, $|\cdot|$ 代表集合基数, $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 为全集; $\mathbf{x}_{\bar{a}}$ 与 $\mathbf{x}_{S-\bar{a}}$ 分别代表 \mathbf{x} 以 \bar{a} 或其补集中元素为指标的分量; $\mathbf{A}_{\bar{a}}$ 是 \mathbf{A} 以 \bar{a} 中元素为指标的列构成的子矩阵, $\mathbf{A}_{\bar{a}}^+ = (\mathbf{A}_{\bar{a}}^T \mathbf{A}_{\bar{a}})^{-1} \mathbf{A}_{\bar{a}}^T$ 是它的 Moore-Penrose 广义逆。从而, 贪婪追踪法按照式(5)的过程直接求解优化问题 $\min_{|\bar{a}|=K} \|\mathbf{A}_{\bar{a}} \mathbf{A}_{\bar{a}}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}\|_2$ 。

所以在本文提出的算法中, 定义粒子的位置为信号 \mathbf{x} 的支撑估计 \bar{a} , 粒子的适应度函数定义为

$$f(\bar{a}) = \|\mathbf{A}_{\bar{a}} \mathbf{A}_{\bar{a}}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}\|_2 \quad (6)$$

最终, 问题式(4)转化为待处理的极小化问题:

$$\min_{|\bar{a}|=K} f(\bar{a}) \quad (7)$$

本文提出的算法通过求解式(7)得到粒子的位置, 即待恢复信号的支撑估计; 进而通过式(5)估计待恢复信号。

3.2 初始化

假设群体规模为 P , 初始群体记为 $\{a_i(0) \mid i = 1, 2, \dots, P\}$ 。下面介绍个体的初始化。

第 1 个粒子: 粒子位置 $a_1(0)$ 设置为 $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$ 中绝对值最大的 K 个分量对应的指标集。第 i ($i=2, 3, \dots, P$) 个粒子: 在 S 中随机选择 q ($K \leq q < \text{spark}(\mathbf{A})$) 个元素构成集合 c_i , 粒子位置 $a_i(0)$ 设置为 $\mathbf{A}_{c_i}^+ \mathbf{b}$ 中绝对值最大的 K 个分量对应的指标集。

至此, 初始群体生成完毕。其中, 第 1 个粒子位置的选取采用了简单的贪婪追踪阈值法^[17]; 当待恢复信号的稀疏度较小时, 它总能精确估计待恢复信号的支撑。其余粒子的位置是对随机成分利用贪婪追踪阈值法得到的结果, 为群体在空间的搜索和快速开采创造了条件。

进一步需要初始化个体与群体最优位置。第 i 个粒子的最优位置 \bar{a}_i 设置为 $a_i(0)$, 群体最优位置设置为 $\bar{a} = \arg \min_{a_i(0)} f(a_i(0))$, ($i = 1, 2, \dots, P$)。

3.3 粒子位置更新机制

更新机制是粒子速度与位置在算法迭代过程中进行更新采取的策略。本文基于粒子群优化, 并结合贪婪追踪法的思想, 设计了一种新的更新机制,

具体如下所述。

在第 $t+1(t \geq 0)$ 代群体中，第 $i(i = 1, 2, \dots, P)$ 个粒子的速度 $I_i(t+1)$ 定义为包含粒子位置 $a_i(t)$ 的一个基数为 q 的候选指标集，采用以下策略更新：

(1) 设置 $J_i(t) = a_i(t) \cup (\bar{a}_i \cap \bar{a})$ ，这个集合包含了粒子位置关于个体最优位置的自身“经验”和群体最优位置的周围“经验”。

(2) 当 $|J_i(t)| \leq q$ 时，设置 $G_i(t)$ 为 $S - J_i(t)$ 中一个基数为 $q - |J_i(t)|$ 的随机子集，并更新粒子速度 $I_i(t+1) = J_i(t) \cup G_i(t)$ 。

当 $|J_i(t)| > q$ 时，设置 $G_i(t)$ 为 $(\bar{a}_i \cap \bar{a}) - a_i(t)$ 中一个基数为 $q - K$ 的随机子集，并更新粒子速度 $I_i(t+1) = a_i(t) \cup G_i(t)$ 。

利用第 $i(i = 1, 2, \dots, P)$ 个粒子的速度 $I_i(t+1)$ ，粒子位置 $a_i(t+1)$ 采用如下策略更新：

更新粒子位置 $a_i(t+1)$ 为 $\mathbf{A}_{I_i(t+1)}^+ \mathbf{b}$ 中绝对值最大的 K 个分量对应的指标集。

本更新机制借鉴了粒子群优化的概念与过程，通过混合当前最优的支撑估计与随机成分，利用贪婪追踪阈值法实现了对恢复信号支撑估计的更新。

此时，如果粒子适应度小于它的个体最优适应度，即 $f(a_i(t+1)) < \bar{f}_i$ ，则更新个体最优位置 $\bar{a}_i = a_i(t+1)$ ，否则保持不变。如果个体最优适应度小于群体最优适应度，即 $\bar{f}_i < \bar{f}$ ，则更新群体最优位置 $\bar{a} = \bar{a}_i$ ，否则保持不变。

至此，基于基本粒子群优化，本文提出算法的 3 个部分已设计完毕。接下来，按算法 1 的流程，将本章内容表述为完整的算法如表 2 所示。

表 2 基于粒子群优化的稀疏恢复算法

算法 2 基于粒子群优化的稀疏恢复算法

步骤 1(初始化) 设定群体规模 P ，最大容许集合基数 q ，令 $t = 0$ 。对群体中每个粒子 $i(i = 1, 2, \dots, P)$ 执行步骤 1 的 (1)-(3) 的操作：

- (1) 初始化 $a_i(t)$ 并利用(6)式计算 $f(a_i(t))$ ；
- (2) 初始化 \bar{a} 为初始群体中具有最优适应度的粒子位置；
- (3) 初始化 \bar{a}_i 为初始群体 $\{a_i(t) | i = 1, 2, \dots, P\}$ 。

步骤 2 在终止条件满足前令 $t = t + 1$ ，并对每个粒子 $i(i = 1, 2, \dots, P)$ 重复步骤 2 的 (1)-(3) 的操作：

- (1) 更新 $a_i(t)$ ，并利用式(6)计算 $f(a_i(t))$ ；
- (2) 当 $f(a_i(t)) < \bar{f}_i$ 时更新 $\bar{a}_i = a_i(t)$ ；
- (3) 当 $\bar{f}_i < \bar{f}$ 时更新 $\bar{a} = \bar{a}_i$ 。

4 算法的性能与效率分析

4.1 性能分析

由于本文提出的算法是为求解问题式(3)设计的，因此得到的恢复结果具有一些本质属性。首先，本文提出的算法是一种全局寻优策略，因此得到的恢复结果受初始解的影响较小。而贪婪追踪法与凸松弛法则在初始解的周围寻找局部最优解。所以当需要恢复大稀疏度信号的支撑时，初始解的支撑总与其存在巨大的差异，而本文提出的算法则有更多机会找到精确的支撑。其次，问题式(3)的解在所有满足约束条件的解中是最稳定的，受噪声的影响较小^[3]。而贪婪追踪法则利用问题式(4)的梯度信息进行搜索，得到的恢复结果容易受噪声影响但影响程度不显著；凸松弛法则采用 1-范数惩罚项，得到的解不够稀疏，受噪声的影响较 0-拟范数惩罚项更大^[3,4]。

下一节将通过实验分析本文提出算法的支撑恢复能力及其受噪声影响的程度。

4.2 效率分析

本小节针对 K -稀疏信号的恢复问题，通过本文提出算法与贪婪追踪法、凸松弛法的计算复杂度对比，分析本文提出算法的计算效率。

贪婪追踪法与凸松弛法的计算复杂度分别为 $O(Kmn)$ ^[8]和 $O(m^2n^{3/2})$ ^[18]。对于本文提出的算法，每步迭代过程需要进行 3 类运算：矩阵与向量相乘，向量排序和最小二乘。关于度量矩阵 $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ 与向量的乘法，计算量为 $O(mn)$ 。向量排序的计算量为 $O(n)$ 。最小二乘问题，无论通过 QR 分解还是共轭梯度法求解，最多迭代 q 步终止，每步仅需要计算度量矩阵的 q 列构成的子矩阵与向量的乘积，总计算量为 $O(m^3)$ 。因此算法在每步迭代过程计算量为 $O(m^3 + mn)$ ，而迭代步数又维持在 $O(K)$ ，所以本文提出算法的计算量为 $O(Km^3 + Kmn)$ 。

由此可见，在 K 或 m 较小的情况下，本文提出算法的计算效率处于贪婪追踪法与凸松弛法之间，且更接近于贪婪追踪法。另一方面，由于本文提出的算法是一种启发式的全局搜索策略，因此当 K 或 m 较大时，与凸松弛法相比，算法将花费更多的时间来获取更好的恢复。下一节将通过实验分析本文提出算法的运行效率。

5 数值实验的设计与结果

本节通过实验来研究本文提出算法的性能，并与 L1-Magic^[18]、OMP^[19]作比较。实验由无噪声和含噪声两种情形构成，其中在含噪声情形下对观测向量 \mathbf{b} 添加标准差 $\sigma = 0.01$ 的高斯白噪声(信噪比在 35

dB 周围变化)。度量矩阵 \mathbf{A} 取为各列标准化的随机高斯矩阵(此时, $\text{spark}(\mathbf{A}) = m + 1$ 成立的概率是 1)。考虑长度为 n 、稀疏度为 K 的高斯信号 \mathbf{x} , 其支撑随机选取, 其非零分量取值为高斯随机数。在本文提出的算法与 L1-Magic 中, 最大迭代次数取作 $\max(K, 100)$, 误差限 ε 设置为 10^{-5} 。对于无噪声情形, 每种算法在原始信号 \mathbf{x} 的恢复 $\bar{\mathbf{x}}$ 满足 $\|\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon$ 或达到最大迭代次数时终止。对于含噪声情形, 每种算法在原始信号 \mathbf{x} 的恢复 $\bar{\mathbf{x}}$ 满足 $\|\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \sqrt{m}\sigma + \varepsilon$ 或达到最大迭代次数时终止。在实验过程中记录下 CPU 的运行时间。

数值实验的软硬件环境: Pentium Dual-Core (2.70 GHz, 1 GB RAM); MATLAB 7.8.0(R2009a)。

5.1 恢复信号比较

本小节通过一个具体的稀疏高斯信号恢复来研究本文提出算法的恢复性能。假设 $n = 512$, $m = 256$, $K = 120$ 。实验结果如图 1 所示。

从图 1 可以发现: 在无噪声和含噪声两种情形下, 当 L1-Magic 与 OMP 在恢复较大稀疏度的高斯信号失效时, 本文提出的算法依然可以精确恢复。

5.2 算法性能与效率比较

本小节设定 $n = 512$, 通过大量独立实验来研究算法恢复性能与恢复效率。将原始高斯信号 \mathbf{x} 与其恢复信号 $\bar{\mathbf{x}}$ 的支撑完全匹配视为成功恢复。平均运行时间为算法在无噪声与含噪声两种情形下成功恢复所用时间的平均。

首先, 考察算法对不同稀疏度高斯信号的恢复性能与恢复效率。设定 $m = 330$, 稀疏度 K 从 0 到 180 运行 3 种算法各 100 次。在无噪声与含噪声情形下, 各算法的成功恢复率分别在图 2(a), 图 2(b) 中表示, 平均运行时间结果在图 2(c) 中表示。

其次, 考察算法在不同观测度下对稀疏高斯信号的恢复性能与恢复效率。设定 $K = 100$, 观测度 m

从 200 到 400 运行 3 种算法各 100 次。在无噪声与含噪声情形下, 各算法的成功恢复率分别在图 3(a), 图 3(b) 中表示, 平均运行时间结果在图 3(c) 中表示。

从图 2, 图 3 所示的实验结果中可以看出: 在无噪声情形下, 本文提出算法对高斯信号的恢复能力更强。在含噪声情形下, 本文提出算法对高斯信号的恢复能力与 OMP 相近, 且能在较大的稀疏度下或在较小的观测度下获得更好的恢复。在无噪声情形完全成功恢复(即成功恢复率为 100%)的情况下, 本文提出的算法比 L1-Magic 算法计算效率高。值得一提的是, 本文算法具有天然的并行能力, 使得在分布式处理器上运行, 计算效率能得到更大程度的提升。

5.3 相图分析

恢复相图是由 Donoho 提出^[20,21], 用来研究算法在无噪声情形下的恢复能力。本小节通过绘制 3 种算法的恢复相图进行分析。设定 $n = 400$, 每幅相图以 $\delta = m/n$ 为横轴, $\rho = K/m$ 为纵轴, 它们均取值于 $[0, 1]$; 相图中每个像素值都是对观测度为 m 和稀疏度为 K 的高斯信号, 每种算法进行 100 次独立实验的成功恢复率。

从图 4 中可以观察到, 在观测度 m 相同的情况下, 本文提出的算法比其它算法能完全成功恢复稀疏度 K 更大的高斯信号; 在稀疏度 K 相同的情况下, 本文提出的算法比其它算法又能完全成功恢复观测度 m 更小的高斯信号。进一步, 算得 3 种算法的完全成功恢复率分别如下: OMP 为 20.25%, L1-Magic 为 30.75%, 本文算法为 43%; 其中, 完全成功恢复率定义为完全成功恢复的情形(取值 100 的像素点数)占有所有实验情形(相图分辨率)的比重。对本实验而言, 恢复性能的理论极限为 $\rho \leq 1/2$ ^[16], 即完全成功恢复率达到 50%。因此, 本文提出的算法与理论极限相比近似达到 90% 的量级。

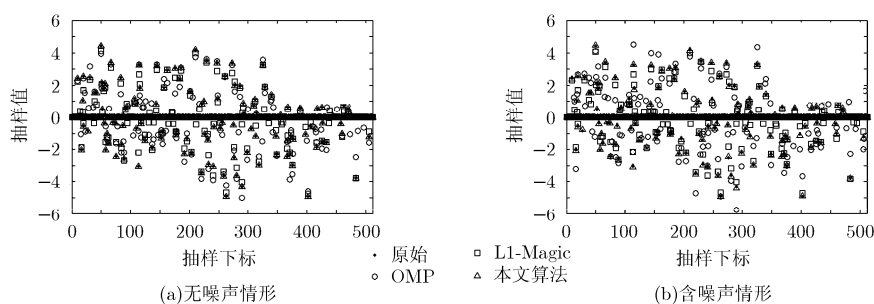


图 1 原始信号与 3 种算法恢复信号的比较

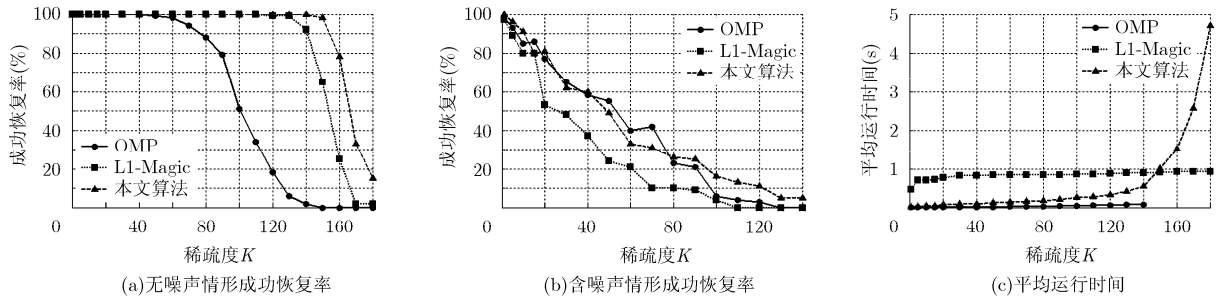


图 2 3 种算法对不同稀疏度信号的恢复性能比较

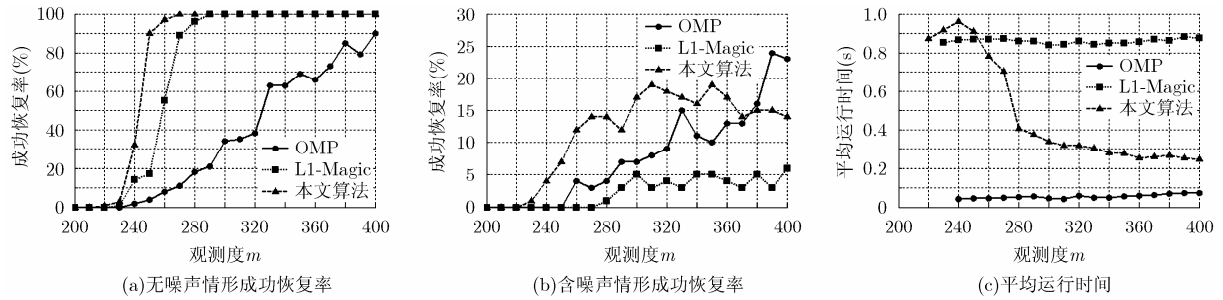


图 3 3 种算法在不同观测度下的恢复性能比较

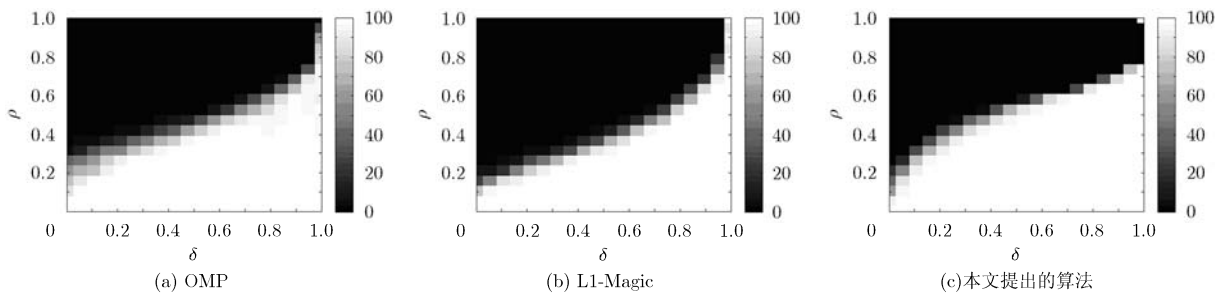


图 4 3 种算法的恢复效果相图

6 结论

本文基于基本的粒子群优化，结合贪婪追踪法的思想，提出了一种稀疏恢复算法。算法一方面继承了粒子群优化的全局搜索特点，具备更强的恢复能力。另一方面，算法发挥了贪婪追踪法快速有效的优势，能够在一般的稀疏度和观测度条件下快速终止。各项数值实验的结果表明，对于高斯信号的稀疏恢复问题，在无噪声和含噪声两种情形下，本文提出的算法与其它方法相比不仅能获得更有效的恢复，而且在一般的稀疏度和观测度条件下运行速度较快。

参考文献

[1] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
 [2] Candes E, Eldar Y, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. *Applied Computation Harmony Analysis*, 2011, 31(1): 59-73.

[3] Donoho D, Elad M, and Temlyakov V. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18.
 [4] Candes E, Romberg J, and Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
 [5] Blumensath T. Sampling and reconstructing signals from a union of linear subspaces[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(7): 4660-4671.
 [6] Duarte M and Eldar Y. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4053-4085.
 [7] Elad M. Sparse and Redundant Representations: from Theory to Applications in Signal and Image Processing[M]. New York: Springer, 2010: 169-354.
 [8] Tropp J and Wright S. Computational methods for sparse

- solution of linear inverse problem[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 948–958.
- [9] Kennedy J and Eberhart R. Particle swarm optimization[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, Australia, 1995: 1942–1948.
- [10] Shi X, Liang Y, Lee H, *et al.* Particle swarm optimization-based algorithms for TSP and generalized TSP[J]. *Information Processing Letters*, 2007, 103(5): 169–176.
- [11] Salman A, Ahmad I, and Al-Madani S. Particle swarm optimization for task assignment problem[J]. *Microprocessors and Microsystems*, 2002, 26(8): 363–371.
- [12] Tropp J and Gilbert A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666.
- [13] Zhang Tong. Sparse recovery with orthogonal matching pursuit under RIP[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(9): 6215–6221.
- [14] Liu E and Temlyakov V. The orthogonal super greedy algorithm and applications in compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(4): 2040–2047.
- [15] Varadarajan B, Khudanpur S, and Tran T. Stepwise optimal subspace pursuit for improving sparse recovery[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(1): 27–30.
- [16] Davies M and Eldar Y. Rank awareness for joint sparse recovery[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(2): 1135–1146.
- [17] Gribonval R, Rauhut H, Schnass K, *et al.* Atoms of all channels unite! average case analysis of multi-channel sparse recovery using greedy algorithms[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5): 655–687.
- [18] Candes E and Romberg J. L1-MAGIC: recovery of sparse signals via convex programming[OL]. <http://www.l1-magic.org/>. 2005.10.
- [19] Donoho D. SparseLab: seeking sparse solutions to linear systems of equations[OL]. <http://sparselab.stanford.edu/>. 2007.3.
- [20] Donoho D. Neighborly polytopes and the sparse solution of underdetermined systems of linear equations[R]. Technology Report of Statistics Department of Stanford University, California: Stanford, 2005.
- [21] Donoho D. High-dimensional centrally symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension[J]. *Discrete Computation Geometry*, 2006, 35(4): 617–652.
- 刘鲁锋: 男, 1989 年生, 硕士生, 研究方向为计算智能方法在稀疏优化中的应用.
- 杜新鹏: 男, 1984 年生, 博士生, 研究方向为稀疏恢复、计算智能、阵列信号处理.
- 成礼智: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为小波理论与应用、新型算法与应用、高精度计算.