第35卷第2期　　电子与信息学报　　Vol.35 No.2
2013年2月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Feb. 2013

一种基于积分微分方程的泊松噪声去除算法

白　键*　　冯象初
(西安电子科技大学理学院应用数学系　西安　710071)

摘　要：该文提出一种新的基于积分微分方程的泊松噪声去除算法。首先讨论了经典的总变差(TV)最小模型，在此基础上提出一种新的变分多尺度分层图像表示方法，然后在逆尺度空间上积分“尺度”图像从而得到了新的积分微分方程。这种新的积分微分方程含有一个单调增加的尺度函数。通过选取适当的尺度函数，该方程可以有效地去除泊松型噪声。数值实验证明了该算法比经典的TV和四阶偏微分方程算法具有更好的去噪效果。

关键词：图像处理；泊松噪声；总变差最小；积分微分方程

中图分类号：TN911.73　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2013)02-0451-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01087

An Integro-differential Equation Approach to Reconstructing Images Corrupted by Poisson Noise

Bai Jian　　Feng Xiang-chu
(*Department of Mathematics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: This paper presents a novel integro-differential equation approach for removing Poisson noise. The classical Total Variational (TV) minimization model is discussed, and then the novel hierarchical multiscale variational image representation model is given. To arrive at the novel integro-differential equation, one integrates in inverse scale space a succession of refined ‘slices’ of the image. The novel integro-differential equation includes a monotone increasing scaling function. According to choose an adaptive scaling function, this equation can remove Poisson noise efficiently. Finally, the experiment results demonstrate the proposed model obtains better effects compare with the classical TV and fourth-order partial differential equation models.

Key words: Image processing; Poisson noise; Total Variation (TV) minimization; Integro-differential equation

1　引言

图像去噪是图像处理的重要研究课题，也是图像预处理的重要步骤。至今已经有许多算法用来从带噪图像估计原始无噪图像。图像的噪声主要分为加性噪声和乘性噪声。目前去除加性高斯噪声已经较为成熟。例如最经典的总变差最小化方法[1]不仅能去除噪声而且能很好地保留图像的边缘。在此基础上，文献[2]给出了相应的去除乘性噪声的算法。然而，很多情况下，图像所含的噪声是信号相关的，并且服从泊松分布，如由光的统计特性和图像传感器中光电转换过程中引起的光电子噪声，就具有这种密度分布函数。对于受泊松噪声污染图像的处理，文献[3]用变分方法研究了图像泊松噪声的抑制，将泊松噪声的去除归结为演化一个二阶偏微分方程到稳定的状态。然而，二阶偏微分方程容易产生块效应并且计算量较大，文献[4]用四阶偏微分方程克服了这个缺点。文献[5]用交替投影法来降低计算量。

最近，一些新的积分微分方程方法在图像去噪上得到了一些应用。例如，文献[6]中提出了一种新的积分微分方程，该方程可以很好地去除噪声并且将图像分解成卡通和纹理成分；文献[7]中提出带有分数阶时间导数和分数阶空间导数的偏微分方程，然而其本质仍然是积分微分方程；文献[8,9]提出带有时间积分的积分微分方程，该方程在去除高斯型噪声方面比传统的偏微分方程方法有一定的优势。本文考虑服从泊松分布的噪声，在经典总变差(TV)最小模型的基础上，首先建立一种新的基于泊松噪声的多尺度分层图像表示模型，然后引入连续时间变量就得到了带有时间积分的新的积分微分方程。新的积分微分方程是一种逆尺度空间[10]方法，从零图像演化到原始带噪图像。对于新的积分微分方程，讨论了它的一些性质，得到了能量分解定理，并且给出了数值计算方法。数值实验证明本文的算法优于经典的TV算法和四阶微分方程算法。

2012-08-24收到，2012-12-07改回
国家自然科学基金(61105011)和博士点新教师基金(20100203120010)资助课题
*通信作者：白键　keywhite26@126.com

2 基于泊松噪声的 TV 模型

经典的 TV 模型[1]是从求式(1)的极小化能量泛函得到的。

$$E_{\mathrm{TV}}(u)=\int_{\Omega}|\nabla u|\,\mathrm{d}\Omega+\beta\int_{\Omega}(f-u)^2\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

其中β为正则化参数。式(1)中，第 1 项称为正则化项，第 2 项称为忠诚项。TV 模型能很好地去除高斯型噪声并且很好地保持图像的边缘。针对图像分布的泊松分布特性，文献[3]先从贝叶斯估计的角度分析图像去噪的极值问题，进而构造相应的变分模型。

假设图像加性噪声服从泊松分布，即

$$P_{\mu}(n)=\frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!},\quad n\ge 0 \tag{2}$$

其中，均值和方差都是μ。为了从观测图像f估计原始无噪图像u，基于对u最大后验估计来分析这一问题。根据贝叶斯原理，有

$$P(u|f)=\frac{P(f|u)P(u)}{P(f)} \tag{3}$$

则问题就是极大化$P(f|u)P(u)$。在泊松噪声假设下，对每一个$x\in\Omega$，有

$$P\big(f(x)\mid u\big)=P_{u(x)}\big(f(x)\big)=\frac{e^{-u(x)}u(x)^{f(x)}}{f(x)!} \tag{4}$$

假设在区域Ω中f在各像素点$\{x_i\}$处的值是彼此独立的，则

$$P(f|u)=\prod_{i}\frac{e^{-u(x_i)}u(x_i)^{f(x_i)}}{f(x_i)!} \tag{5}$$

总变差正则化可以从假设先验分布

$$P(u)=\exp\Big(-\lambda\int_{\Omega}|\nabla u|\,\mathrm{d}u\Big) \tag{6}$$

得到，其中λ是正则化参数。

将$P(f|u)P(u)$的极大化问题转化为极小化$-\log(P(f|u)P(u))$，此时问题等价于极小化

$$\sum_{i}\big(u(x_i)-f(x_i)\log u(x_i)\big)+\lambda\int_{\Omega}|\nabla u|\,\mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

引入连续变量x，式(7)可以看成下面泛函的离散化：

$$E(u)=\int_{\Omega}\big(u-f\log u\big)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\lambda|\nabla u|\mathrm{d}\Omega \tag{8}$$

泛函式(8)在$u\in BV$有定义并且满足$\log u\in L^1(\Omega)$，它的极小化解与泛函式(1)的极小化解有本质的区别，那就是泛函式(8)的极小化解不能保持图像的平均灰度值。更进一步，有下面的性质：

定理 1 对于任意给定的λ，有$\int_{\Omega}u\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\Omega-\lambda\|u\|_{BV}$，其中$\|u\|_{BV}=\int_{\Omega}|\nabla u|\mathrm{d}\Omega$是$BV$半范。

证明 式(8)的欧拉-拉格朗日方程为

$$f+\lambda u\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=u$$

两端积分并由格林公式得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}f\mathrm{d}\Omega+\lambda\int_{\Omega}u\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\mathrm{d}\Omega\\&=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\Omega-\lambda\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\nabla u\right)\\&=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\Omega-\lambda\|u\|_{BV}=\int_{\Omega}u\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

证毕

3 新的积分微分方程

泛函式(8)的极小解就是去噪图像。为了和文献[7]中的形式保持一致，将泛函式(8)改写成

$$E(u)=\int_{\Omega}|\nabla u|\mathrm{d}\Omega+\lambda\int_{\Omega}(u-f\log u)\,\mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

对于非常小的λ，泛函式(9)的极小化解u_{λ}仅仅包含图像的主要轮廓。当λ越来越大时，u_{λ}就含有越来越多的图像细节。如果将f在初始尺度λ_0下分解，有

$$u_{\lambda_0}=\mathop{\arg\min}_{v=u-f\log u}\left\{\|u\|_{BV}+\lambda_0\int_{\Omega}v\mathrm{d}\Omega\right\} \tag{10}$$

其中残差图像为$v_{\lambda_0}=f-u_{\lambda_0}$，它仍然包含一些图像的细节，所以$v_{\lambda_0}$仍然可以在尺度$\lambda_1$下分解：

$$u_{\lambda_1}=\mathop{\arg\min}_{v=u-v_{\lambda_0}\log u}\left\{|u|_{BV}+\lambda_1\int_{\Omega}v\mathrm{d}\Omega\right\} \tag{11}$$

其中残差图像为$v_{\lambda_1}=v_{\lambda_0}-u_{\lambda_1}$。如果用一系列变化的尺度参数$\lambda_1<\lambda_2<\cdots$来代替固定的尺度参数$\lambda$，那么就得到一个新的多尺度分层图像表示，即求下面一系列泛函的极小解：

$$u_{\lambda_j}=\mathop{\arg\min}_{v=u-v_{\lambda_{j-1}}\log u}\left\{|u|_{BV}+\lambda_j\int_{\Omega}v\mathrm{d}\Omega\right\} \tag{12}$$

其中残差图像为$v_{\lambda_j}=v_{\lambda_{j-1}}-u_{\lambda_j}$。

为了能够得到新的积分微分方程，引入连续时间步长τ，并将u_{λ_j}以τ为单位重新求解，得

$$u_{\lambda_j}=\mathop{\arg\min}_{v=\tau u-v_{\lambda_{j-1}}\log\tau u}\left\{|u|_{BV}+\lambda_j\int_{\Omega}v\mathrm{d}\Omega\right\} \tag{13}$$

其中残差图像$v_{\lambda_j}=v_{\lambda_{j-1}}-\tau u_{\lambda_j}$，所以在$N+1$步后就得到了下面的多尺度分层图像表示：$f=\tau u_{\lambda_0}+v_{\lambda_0}=\tau u_{\lambda_0}+\tau u_{\lambda_1}+v_{\lambda_1}=\cdots=\tau u_{\lambda_0}+\tau u_{\lambda_1}+\cdots+\tau u_{\lambda_N}+v_{\lambda_N}$，即

$$f=\sum_{k=0}^{N}\tau u_{\lambda_k}+v_{\lambda_N} \tag{14}$$

对于多尺度图像表示的第$N+1$步：

$$u_{\lambda_N}=\mathop{\arg\min}_{v=\tau u-v_{\lambda_{N-1}}\log\tau u}\left\{|u|_{BV}+\lambda_N\int_{\Omega}v\mathrm{d}\Omega\right\} \tag{15}$$

其中残差图像为$v_{\lambda_N}=v_{\lambda_{N-1}}-u_{\lambda_N}$。其欧拉-拉格朗日方程为

$$\tau u_{\lambda_N}-v_{\lambda_{N-1}}=\frac{1}{\lambda_N}u_{\lambda_N}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u_{\lambda_N}}{|\nabla u_{\lambda_N}|}\right) \tag{16}$$

从等式(14)有 $v_{\lambda_{N-1}} = f - \sum_{k=0}^{N-1} \tau u_{\lambda_k}$ ，将其代入式(16)得到

$$\sum_{k=0}^{N} \tau u_{\lambda_k} - f = \frac{1}{\lambda_N} u_{\lambda_N} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_{\lambda_N}}{\left|\nabla u_{\lambda_N}\right|}\right) \tag{17}$$

令 $\tau \to 0$ ，就得到新的积分微分方程(18)：

$$\int_0^t u(x,y,s)\,\mathrm{d}s - f(x,y) = \frac{1}{\lambda(t)} u(x,y,t) \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(x,y,t)}{\left|\nabla u(x,y,t)\right|}\right) \tag{18}$$

其中初始条件为 $u(x,y,0)=0$ ，边界条件为 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0\ (t \ge 0)$，尺度函数 $\lambda(t)$ 是单调增加的。

本文用积分微分方程式(18)对带有泊松噪声的图像进行去噪。根据实验结果，当 $t \to \infty$ 时，解 $U(x,y,t) = \int_0^t u(x,y,s)\,\mathrm{d}s$ 收敛于初始带噪图像 f，所以函数族 $\{U(x,y,t)\}_{t \ge 0}$ 可以看成 f 的逆尺度空间表示，t 是逆尺度参数。因此通过选择适当的时间参数 t ，$U(x,y,t)$ 就是去噪图像，$V(x,y,t) = f(x,y) - U(x,y,t)$ 为残差图像。与定理 1 完全类似，对于新的积分微分方程有下面的性质：

定理 2　对于积分微分方程(18)，有

$$\int_\Omega U \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega f \mathrm{d}\Omega - \frac{1}{\lambda(t)} \|u\|_{BV}$$

证明与定理 1 类似，不再累述。

定理 3　对于积分微分方程式(18)，有下面的能量分解式：

$$4\int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} \int_\Omega u(x,y,s)\left|\nabla u(x,y,s)\right| \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}s + \left\|V(x,y,t)\right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

证明　为了书写方便，以下将空间变量 x,y 省略。由式(18)，有

$$U(\cdot,t) - f = \frac{1}{\lambda(t)} u(\cdot,t) \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(\cdot,t)}{\left|\nabla u(\cdot,t)\right|}\right) \tag{19}$$

对式(19)两边同乘以 $u(\cdot,t)$ ，有

$$\left(U(\cdot,t) - f\right) u(\cdot,t) = \frac{1}{\lambda(t)} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(\cdot,t)}{\left|\nabla u(\cdot,t)\right|}\right) u^2(\cdot,t) \tag{20}$$

注意到 $u(\cdot,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U(\cdot,t) - f\right)$，对式(20)两端在 Ω 上进行积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(U(\cdot,t) - f\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U(\cdot,t) - f\right) \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \left(U(\cdot,t) - f\right)\left(U(\cdot,t) - f\right) \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\lambda(t)} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(\cdot,t)}{\left|\nabla u(\cdot,t)\right|}\right) u^2(\cdot,t)\,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{21}$$

接下来对式(21)两端在 $[0,t]$ 上作时间积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \left(U(\cdot,t) - f\right)\left(U(\cdot,t) - f\right) d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega f \cdot f \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_s^t \int_\Omega \frac{1}{\lambda(s)} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(\cdot,s)}{\left|\nabla u(\cdot,s)\right|}\right) u^2(\cdot,s)\,\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}s \\
&= \left\|U(\cdot,t) - f\right\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{s=0}^t \frac{2}{\lambda(s)} \left(\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(\cdot,s)}{\left|\nabla u(\cdot,s)\right|}\right), u^2(\cdot,s)\right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

(由格林公式得)

$$\begin{aligned}
&= -\int_{s=0}^t \frac{2}{\lambda(s)} \left(\frac{\nabla u(\cdot,s)}{\left|\nabla u(\cdot,s)\right|}, \nabla u^2(\cdot,s)\right) \mathrm{d}s \\
&= -\int_{s=0}^t \frac{2}{\lambda(s)} \int_\Omega 2u(\cdot,s)\left|\nabla u(\cdot,s)\right| \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

移项后即得所证。能量分解定理 3 给出了解 u，残差图像 V 和 f 之间的关系。如果 $\lambda(t)$ 满足某种条件，还有更进一步的结果。

定理 4　给定带噪图像 $f \in BV$ ，对于积分微分方程(18)，如果尺度函数 $\lambda(t)$ 增加的足够快使其构成阿达玛序列，即 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\lambda(t/2)}{\lambda(t)} = 0$ ，那么有

$$\int_\Omega f(x,y) \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \int_0^\infty u(x,y,s)\,\mathrm{d}s \mathrm{d}\Omega$$

证明　残差图像 $V(\cdot,t)$ 可以写成 $V(\cdot,t) = f - \int_{s=0}^{t/2} u(\cdot,s)\,\mathrm{d}s - \int_{s=t/2}^{t} u(\cdot,s) \mathrm{d}s$，所以有不等式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda(t)}\left\|V(\cdot,t)\right\|_{BV} \le \frac{1}{\lambda(t)}\|f\|_{BV} + \frac{\lambda(t/2)}{\lambda(t)} \int_{s=0}^{t/2} \frac{1}{\lambda(s)} \\
\cdot \left\|u(\cdot,s)\right\|_{BV} + \int_{s=t/2}^{t} \frac{1}{\lambda(s)} \left\|u(\cdot,s)\right\|_{BV}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

因为当 $t \to \infty$ 时，$\lambda(t) \to \infty$ ，所以上面不等式右边第 1 项趋于 0；由假设和定理 3，第 2 项和第 3 项也趋于 0。这样，得到 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda(t)} \left\|V(\cdot,t)\right\|_{BV} = 0$ 。

注意到 $\left\|u(\cdot,t)\right\|_{BV} \le \left\|V(\cdot,t)\right\|_{BV}$ ，再由定理 2，有 $\int_\Omega V(\cdot,t) \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\lambda(t)} \left\|u(\cdot,t)\right\|_{BV} \le \frac{1}{\lambda(t)} \left\|V(\cdot,t)\right\|_{BV}$ ，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} \int_\Omega V(\cdot,t) \mathrm{d}\Omega = 0$ 。　　证毕

定理 4 说明随着时间的增加，残差图像的平均灰度值收敛于零。

4　数值算法和实验

在这一节给出积分微分方程式(18)的数值离散算法和去噪效果。在数值计算方面，首先假定初始离散图像 f 大小为 $m \times m$，它是连续图像在一致采样间隔点的采样。采样点为 $(0,0),\cdots, u(x,y) = u(x\Delta x,$

$y\Delta y)$，其中 $x,y=0,\cdots,m-1$。我们选择空间采样间隔 Δx 和 Δy 为 $\Delta x=\Delta y=1$。为了确保分母不为零，在式(18)中用 $\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon}$ 来代替 $|\nabla u|$，其中 ε 是一个很小的正数。本文取 $\varepsilon=0.001$，这样式(18)可以写成

$$\int_0^t u(x,y,s)\,\mathrm{d}s-f(x,y)=\frac{1}{\lambda(t)}u(x,y,t)\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u(x,y,t)}{\sqrt{|\nabla u(x,y,t)|^2+0.001}}\right) \tag{22}$$

$U(x,y,t)=\int_0^t u(x,y,s)\,\mathrm{d}s$ 为式(22)的精确解。令 Δt 为时间步长，U^{n+1} 表示在 $t^{n+1}=(n+1)\Delta t$ 时刻的数值解，有：$U^{n+1}=U^n+W^{n+1}$，$W^{n+1}\equiv W_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n+1}\cdot\Delta t$，其中 $u_{i,j}^{n+1}\equiv u^{n+1}(i,j)$ 为积分微分方程式(22)在点 (i,j) 的数值解。在实际计算方面，用有限差分法近似计算式(22)右端的微分算子，因此在 t^{n+1} 时刻式(22)离散为

$$\begin{aligned}U_{i,j}^n+\omega_{i,j}^{k+1}&=f_{i,j}-\frac{1}{\lambda^{(n+1)}}\omega_{i,j}^{k+1}\\&\cdot\left(\frac{\omega_{i+1,j}^k-2\omega_{i,j}^{k+1}+\omega_{i,j+1}^k}{\sqrt{\left(\omega_{i+1,j}^k-\omega_{i,j}^k\right)^2+\left(\omega_{i,j+1}^k-\omega_{i,j}^k\right)^2+0.001}}\right.\\&\left.-\frac{2\omega_{i,j}^{k+1}-\omega_{i-1,j}^k-\omega_{i,j-1}^k}{\sqrt{\left(\omega_{i,j}^k-\omega_{i-1,j}^k\right)^2+\left(\omega_{i,j}^k-\omega_{i,j-1}^k\right)^2+0.001}}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\lambda^{(n+1)}=\lambda(t^{n+1})$ 为离散尺度参数。本文用雅克比迭代计算线性方程组式(23)的解。当 $k\to\infty$ 时，雅克比迭代产生序列 $\omega^{k+1}\to W^{n+1}\equiv u^{n+1}\Delta t$。实际计算中，如果 $\|\omega^{k+1}-\omega^k\|_2^2\le 0.01$，则停止迭代。接下来更新图像 U：

$$U^{n+1}=U^n+W^{n+1} \tag{24}$$

第 1 个实验用积分微分方程式(22)来演化标准的“Lenna”图像。本文选取二次函数 $\lambda(t)=0.25\times t^2$ 作为尺度函数，其中时间步长取 $\Delta t=1$。其它类型的单调增函数(例如一次函数，三次函数)也可以作为尺度函数，然而，根据数值实验，二次尺度函数不仅迭代次数少而且能获得好的去噪效果。图 1 给出了在 4 种尺度下演化的结果，可以看出对于很小的 t 值，方程式(22)的解 U 仅仅包含“Lenna”图像的模糊的轮廓。当 $t=110$ 时，解 U 已经与初始带噪图像 f 非常接近了。这说明新的积分微分方程是一种逆尺度空间方法，随着 t 和 $\lambda(t)$ 的增加，越来越多的细节被加入到解 U 中。

第 2 个实验将标准的 512×512 的“Lenna”，“Barbara”，“Fishing Boat”，“Pepper”图像加入泊松噪声。本文分别用二阶偏微分方程方法[3]，四阶偏微分方程方法[4]和本文的方法对这 4 幅图像进行去噪。在本文的实验中，用信噪比(SNR)来衡量去噪效果并且时间步长取 $\Delta t=0.5$。选择适当的停止时间 t 使得信噪比达到最大值。在表 1 中给出了 3 种不同算法对这 4 幅图像去噪的信噪比，可以看出本文算法获得了最高的信噪比。图 2 给出了 3 种算法对“Lenna”图像去噪效果的比较，可以看出二阶微分方程方法产生了块效应，四阶微分方程方法和本文的方法没有块效应。然而，本文的方法对图像细节保留得最好，这主要是因为本文算法是一种逆尺度空间算法，逆尺度空间算法能够更好地保留图像的细节。为了看清楚这一点，图 3 给出了 3 种算法去噪后图像的局部放大，可以看出二阶微分方程算法有明显的块效应，本文算法得到的图像视觉效果最好。

表 1 3 种算法信噪比的比较(dB)

原始图像	Lenna	Barbara	Fishing Boat	Pepper
带噪图像	4.13	4.19	4.72	4.38
二阶方程[3]	12.65	9.96	10.78	13.05
四阶方程[4]	12.84	10.07	10.92	13.11
本文算法	13.35	10.44	11.14	13.65

5 结束语

针对图像中泊松分布的噪声，从经典的 TV 模型出发，构造了一种新的积分微分方程去噪算法，给出了数值求解方法。本文方法具有如下特点：(1)不同于固定尺度的变分去噪算法，本文首先建立具有一系列尺度参数的多尺度分层图像表示模型，然后将其连续化(即将时间步长趋于零)就得到了新的带有尺度函数的积分微分方程。(2)新的积分微分方程方法是逆尺度空间方法，随着时间的增加，它将常数图像演化到原始图像，所以应该选取适当的停止时间以取得好的去噪效果。

数值实验也证明本文算法比经典的 TV 和四阶微分方程算法具有更高的信噪比和视觉效果。本文方法还可以推广到带有乘性噪声[2,11]图像的去噪问题中，但是如何构造相应的积分微分方程还需要进一步研究。

(a) t=4　(b) t=18　(c) t=60　(d) t=110

图 1 用积分微分方程式(22)得到的不同尺度下的图像

(a)原始图像　(b)噪声图像　(c)二阶方程像

(d)四阶方程像　(e)本文算法结果

图 2 3 种算法去噪效果的比较

(a)二阶方程像　(b)四阶方程像　(c)本文算法结果

图 3 3 种算法局部放大的比较

参 考 文 献

[1] Rudin L I, Osher S, and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, 60(1–4): 259–268.

[2] Chen B, Cai J L, Chen W S, *et al.*. A multiplicative noise removal approach based on partial differential equation model[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, DOI: 10.1155/2012/242043.

[3] Le T, Chartrand R, and Asaki T J. A variational approach to recontructing images corrupted by Poisson noise[J]. *Journal*

of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 27(3): 257–263.

[4] Zhou W F and Li Q G. Poisson noise removal scheme based on fourth-order PDE by alternating minimization algorithm [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, DOI: 10.1155/2012/965281.

[5] Figueiredo M A T and Bioucas J M. Restoration of poissonian images using alternating direction optimization [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(12): 3133–3145.

[6] Bai J and Feng X C. Image denoising and decomposition using non-convex functional[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2012, 21(1): 102–106.

[7] Janev M, Pilipovic S, Atanackovic T, *et al.*. Fully fractional anisotropic diffusion for image denoising[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2011, 54(1): 729–741.

[8] Tadmar E and Athavale P. Multiscale image representation using integral-differential equations[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2009, 3(4): 693–710.

[9] Athavale P and Tadmar E. Integro-differential equation based on (BV, $L'1$) image decomposition[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1): 300–312.

[10] Marcucilli J A. A review of some inverse scale space methods for image restoration[D]. [Ph.D. dissertation], The Faculty of San Diego State University, 2012.

[11] 姚晓莉, 冯象初, 李亚峰. 去除乘性噪声的主成分分析算法[J]. 光子学报, 2011, 40(7): 1031–1035.
Yao X L, Feng X C, and Li Y F. Principal component analysis method for muitiplicative noise removal[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, 40(7): 1031–1035.

白 键： 男，1979 年生，讲师，研究方向为偏微分方程图像处理.
冯象初： 男，1962 年生，教授，研究方向为偏微分方程图像处理.